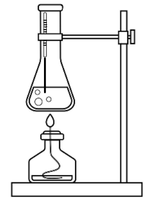
КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 8 / 24.11.2021

Корекциите спрямо предходната версия са отразени в лилав цвят

Те са на стр. 1, 2, 4, 7, 11.

1. Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)



класическо измерване

Основни понятия и изрази (език) в квантовата теория

- наблюдаема, събитие – частен случай на наблюдаема;
- състояние;
- измерване на наблюдаема (измерване / тестване на събитие) в състояние и вероятност за това.

  $\mathrm{Prob}_\rho(Q)$:= вероятност за настъпване (след измерване) на събитие Q в състояние ρ
- Възможни стойности на наблюдаема A = спектър, $\mathrm{Spec}\,A$; спектъра на събитие е $\subseteq \{0,1\}$.
- Всяка наблюдаема A и число поражда събитие

  "A приема стойност α след измерване" $\equiv$ "$A = \alpha$"
- Резултата от всяко измерване е настъпване на някакво събитие Q, т.е., "$Q = 1$".

  "$Q = 0$" $\equiv$ "$Q^\perp = 1$" ($Q^\perp$ е отрицанието на Q).
- Средна стойност на наблюдаема A при измерване в състояние ρ:

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho = \sum_{\alpha \in \mathrm{Spec}\,A} \alpha . \mathrm{Prob}_\rho \{A = \alpha\}$$

Ако $A = Q$ е събитие, то $\rho(Q) \equiv \langle Q \rangle_\rho \equiv \mathrm{Prob}_\rho(Q)$

- Смес на състояния ρ_1 и ρ_2 с тегла $q_1, q_2 \in [0,1]$, $q_1 + q_2 = 1$, се определя от:

  $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$, което означава $\rho(A) = q_1 \rho_1(A) + q_2 \rho_2(A)$ за $\forall$ наблюдаема A
- Чисто състояние = такова, което не може да бъде нетривиална смес (т.е., q_1 или $q_2 = 0$)
- Експеримент на системата $\equiv$ съвкупност от дизюнктивни събития, които разбиват $\hat{1}$ (единицата = тъждественото събитие = единичната наблюдаема):

  $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_m$, $Q_j \wedge Q_k = 0$, $Q_1, \dots, Q_n$ – елементарни събития на експеримента
- За някои наблюдаеми (и в частност, събития) се случва да могат да се измерят в общ експеримент: казваме, че те са съвместно измерими (съвместни).
- Всяка наблюдаема A отговаря на експеримент посредством спектралното си разбиване.

  $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_m Q_m$, $\alpha_j \neq \alpha_j$, $Q_j = \{A = \alpha_j\}$, $\mathrm{Spec}\,A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{R}$

  $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_m$,
- Функция f ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) от наблюдаема $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_m Q_m$ (спектралното разбиване на A) се определя от $f(A) = f(\alpha_1) Q_1 + \cdots + f(\alpha_m) Q_m$

- Съществува асоциативна $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\mathcal{A}$, така че A е наблюдаема $\iff A = A^*$

  има дистрибутивно и асоциативно произведение; $A^{**} = A$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$; алгебра на наблюдаемите; (самоспрегнатост)

- Q е събитие $\iff Q^* = Q = Q^2$

  $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$

- ρ е състояние $\iff$ ρ е линеен, положителен и нормиран функционал върху $\mathcal{A}$

  $\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha \rho(A) + \beta \rho(B)$; $\rho(A^* A) \geq 0$; $\rho(\hat{1}) = 1$

- Съвместно измерими наблюдаеми $A, B, \dots, C$ (в частност и събития)

  $\iff$ взаимно комутиращи: $AB = BA, \dots, AC = CA, \dots, BC = CB$.

- За съвместно измерими събития P, Q, логическите операции имат алгебричен израз:

$$P \wedge Q = PQ = QP, \quad P \vee Q = P + Q - PQ, \quad Q^{\perp} = \hat{1} - Q$$

В частност, $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_m \iff \begin{cases} Q_1 + \cdots + Q_m = \hat{1} \\ Q_j Q_k = 0 \text{ за } j \neq k \end{cases}$

- Математенатически резултат класифицира:

- прилаганите в квантовата информатика $*$-алгебри са от вида $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$

$$:= \left\{ \begin{array}{c} \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{array} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{за } A_j \in \mathrm{Mat}_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

блочно-диагонална матрица

за фиксиран набор $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

- За всяко състояние ρ съществува единствена наблюдаема $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ $(\hat{\rho} = \hat{\rho}^*)$, така че

  $\rho(A) \left(\equiv \langle A \rangle_\rho \right) = \mathrm{Tr}\, \hat{\rho} A$.

  следа на матрица $\mathrm{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$

  Наблюдаемата $\hat{\rho}$ се нарича матрица на плътността на състоянието. В сила е, че $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ е матрица на плътността на състояние $\iff$ $\hat{\rho}$ е положително дефинитна матрица, $\mathrm{Tr}\, \hat{\rho} = 1$.

  Ако $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ е смес, то $\hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$.

  $\hat{\rho} \geq 0$ и $\mathrm{Tr}\, \hat{\rho} = 1$

  Така, ρ е чисто $\iff$ $\hat{\rho}$ е самоспрегнатата матрица от ранг $= 1$.

- Пълният размер $n = k_1 + \cdots + k_m$ се нарича ниво на системата и е $=$ максималния брой алтернативи на експеримент. Например, един максимален експеримент се определя от следното разбиване на $\hat{1}$, което е максимално:

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единствения комутативен случай.

$$
\begin{array}{c}
1\\1\\1\\ \\ \\1\\1
\end{array}
\begin{bmatrix}
\boxed{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & \boxed{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \boxed{a_3} & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{a_{n-1}} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_n}
\end{bmatrix}
$$
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1\end{array}$$

$\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω:

$$
\Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
\Omega & = & \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, \omega_n\}\\
A\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\quad\downarrow\\
\mathbb{C} & \supseteq & \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, a_n\}
\end{array}
$$

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) + \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n) = \mathrm{diag}(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$
$$\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) \times \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n) = \mathrm{diag}(a_1\cdot b_1,\dots,a_n\cdot b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)\, B(\omega_j)$$

В този случай също:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & \Omega & = & \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, \omega_n\}\\
\text{наблюдаема} \quad A = A^* & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\quad\downarrow\\
 & \mathbb{R} & \supseteq & \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, a_n\} = Spec\, A = A(\Omega)
\end{array}
$$

събитие = характеристична функция на подмножество

$$
\begin{array}{cccccccc}
S \subseteq \Omega & = & \{\cancel{\omega_1}, \cdots, & \omega_j & ,\cdots, & \omega_k & ,\cdots, & \cancel{\omega_n}\}\\
\chi_S \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathbb{R} & \supseteq & \{0, \cdots, & 1 & ,\cdots, & 1 & ,\cdots, & 0\}
\end{array}
$$

логически и алгебрични операции:

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1}\chi_{S_2}$$
$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1}\chi_{S_2}$$

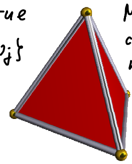
състояние ρ
$\Leftrightarrow$ вероятностно разпределение
= матрицата на плът.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Omega & = & \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, \omega_n\}\\
\hat{\rho}\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\quad\downarrow\\
\mathbb{R} & \supseteq & \{p_1, & p_2, & p_3, & \cdots & ,p_{n-1}, p_n\} \subseteq [0,1]
\end{array}
, \quad \overbrace{p_1 + \cdots + p_n}^{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}} = 1
$$

Формулата за средна стойност на наблюдаема:

$$\rho(A) = \langle A \rangle_\rho = \mathrm{Tr}\, \hat{\rho} A \left(= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{diag}(p_1,\dots,p_n)\, \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)\right)\right) = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$$

Чисто състояние: $\hat{\rho} = \mathrm{diag}(0,\dots,1,\dots,0) =$ елементарно събитие
$=$ характеристична функция на синглетон $\{\omega_j\}$



Множеството от състоянията на класическа система е симплекс с върхове – чистите състояния

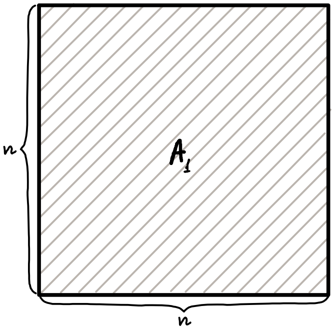
Спектрално разлагане на наблюдаема:

$$A = \sum_{\alpha \in A(\Omega)} \alpha \cdot \chi_{A^{-1}(\alpha)}$$

- чисто квантови системи, $m = 1$, $k_1 = n$ $\Rightarrow$ алгебрата на всички $n \times n$ матрици (1 блок)

Това е "напълно" некомутативен случай. В този случай:

$\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$



$\hat\rho \geq 0$ и $Tr\,\hat\rho = 1$

ρ е чисто състояние $\Leftrightarrow$ $\hat\rho = \hat\rho^*$ и има ранг 1

$$\Leftrightarrow \hat\rho = \Psi\Psi^* \equiv \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar\psi_1, \dots, \bar\psi_n) \text{ за } \Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

който е единичен вектор, $\|\Psi\|^2 = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2 = 1$

наречен вектор на състоянието. Всеки единичен вектор определя чисто състояние и два единични вектора $\Psi, \Psi' \in \mathbb{C}^n$ определят едно и също състояние $\Leftrightarrow$ $\Psi' = e^{i\theta}\Psi$ (те са пропорционални)

Средната стойност на наблюдаема A в състояние с вектор Ψ е:

$$\langle A\rangle_\Psi = Tr(\Psi\Psi^* A) = Tr(\Psi^* A \Psi) = \Psi^* A \Psi = (\bar\psi_1, \dots, \bar\psi_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}$$

$$= \langle\Psi|A\Psi\rangle = \langle\Psi|A|\Psi\rangle \text{ - в бра-кет означения}$$

<bracket>: за вектор-стълб $\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

ще пишем $\Phi \equiv |\Phi\rangle$ и ще го наричаме кет-вектор.

Тогава $\langle\Phi| := \Phi^* := (\bar\phi_1, \dots, \bar\phi_n)$ - ермитово спрегнатия вектор-ред: бра-вектор.

ред × стълб = число

Така: $\langle\Phi|\cdot|\Psi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle$ $\to$ скаларното произведение в $\mathbb{C}^n$ $(\ni \Phi, \Psi)$
хилбертовото пространство на състоянията

Матриците от вида: $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ представят едновременно матрици на плътността на чисти състояния и елементарни събития. Това дава 1-1 съответствие между чистите състояния ρ и елем. събития Q:

$$\rho \text{ и } Q \text{ са съответстващи си} \Leftrightarrow Prob_\rho\, Q = 1 \Leftrightarrow \hat\rho = Q \; (= |\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

За два единични вектора $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$: вероятност за преход $p_{\Psi\to\Phi} = |a_{\Psi\to\Phi}|^2$, където $a_{\Psi\to\Phi} := \langle\Phi|\Psi\rangle$ - амплитуда на прехода. $p_{\Psi\to\Phi} = p_{\Phi\to\Psi}$ е вероятността за настъпване на елементарно събитие определено от Ψ в състояние с вектор Φ.

Спектралното разлагане на наблюдаема $A\,(=A^*)$ се определя от задачата за собствени вектори: ако $Af_j = \lambda_j f_j$ за ортонормиран базис (о.н.б.) $f_1, \dots, f_n$ на $\mathbb{C}^n$, $\alpha_1 := \lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} < \alpha_2 := \lambda_{k_1+1} = \cdots$

то: $A = \lambda_1|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_n|f_n\rangle\langle f_n|$

$$= \alpha_1\underbrace{\left(|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_{k_1}\rangle\langle f_{k_1}|\right)}_{:= Q_1} + \alpha_2\underbrace{\left(|f_{k_1+1}\rangle\langle f_{k_1+1}| + \dots + |f_{k_1+k_2}\rangle\langle f_{k_1+k_2}|\right)}_{:= Q_2} + \cdots$$

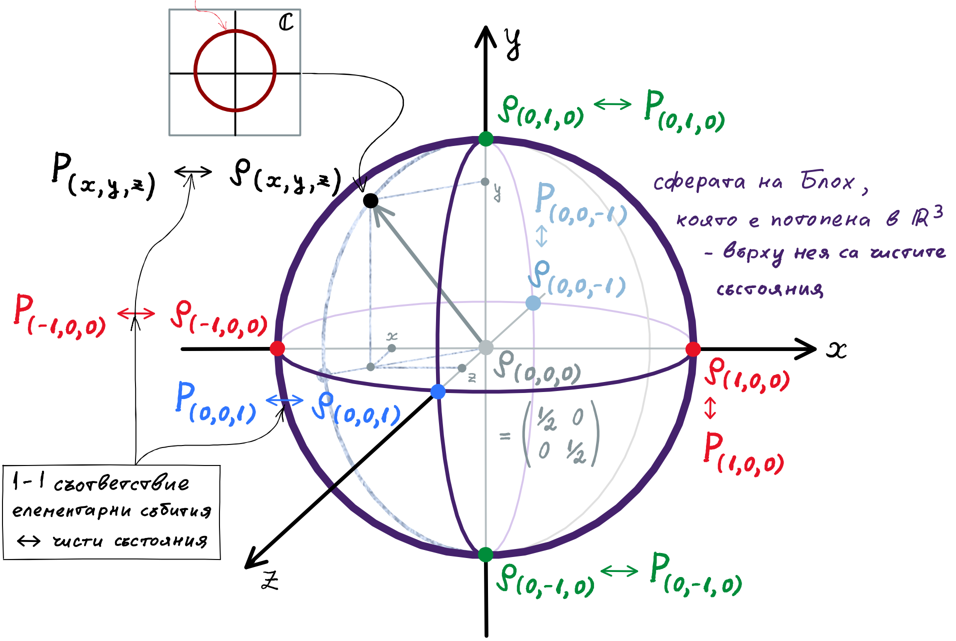
- Събитие Q в чисто квантова система $(\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C}))$
  $=$ самоспрегнат идемпотент Q в $Mat_n(\mathbb{C})$
  $=$ ортогонален проектор в хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$
  $\Longleftrightarrow$ линейно подпространство $V \subseteq \mathbb{C}^n$, като $Q = P_V$ (ортогоналния проектор върху V)
- Ако $Q_1 = P_{V_1}$ и $Q_2 = P_{V_2}$ са събития, тогава:
  $Q_1 \preceq Q_2 \iff$ от $Prob_\rho(Q_1) = 1$ следва $Prob_\rho(Q_2) = 1$ ($\forall \rho$ - състояние)
  $\iff Prob_\rho(Q_1) \leq Prob_\rho(Q_2)$ ($\forall \rho$ - състояние)
  $\iff V_1 \subseteq V_2$
- Всеки максимален експеримент отговаря на о.н.б. $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ посредством разбиването на $\hat{1}$: $\boxed{\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_n\rangle\langle f_n|}$
- Картина на елементарните събития и състоянията на квантов бит $(\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C}))$

Над всяка точка на сферата на Блох "напречно" в $\mathbb{R}^4$ се разполага единична окръжност $S^1 = \{e^{i\varphi}\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$

общ вид на матрицата на плътността на състояние

$$\hat{\rho}(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$ за $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

чисто състояние $\leftrightarrow$ $=$



2. Основни принципи на квантовата теория: статистика на съставни системи

а) Допълнителни бележки към квантовия бит

Условието $(\forall a_{jk}, \psi_j \in \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) \left(= \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \psi_1\overline{\psi}_2 \\ \psi_2\overline{\psi}_1 & \psi_2\overline{\psi}_2 \end{pmatrix} \right) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_{11} = \psi_1\overline{\psi}_1 \\ a_{12} = \psi_1\overline{\psi}_2 \\ a_{21} = \psi_2\overline{\psi}_1 \\ a_{22} = \psi_2\overline{\psi}_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \psi_1\overline{\psi}_1\psi_2\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_1\psi_1\overline{\psi}_2 = 0$$

Решенията за ψ_1, ψ_2 при дадени $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ не са единствени, а са взаимно пропорционални.

Пример 1: $\hat{\rho}_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} (\overline{e^{i\varphi}}, 0)$; $\hat{\rho}_{(0,0,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1)$;

Нека означим стандартния базис в $\mathbb{C}^2$: $e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: |0\rangle$, $e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: |1\rangle$ тук стои информацията за базисния вектор

Тогава: $\hat{\rho}_{(0,0,1)} = |0\rangle\langle 0|$, $\hat{\rho}_{(0,0,-1)} = |1\rangle\langle 1|$. О.н.б. $|0\rangle, |1\rangle$ дава един макс. експеримент.

Пример 2: $\hat{\rho}_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\hat{\rho}_{(-1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

Получаване друг о.н.б.: $e_0' := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\rightarrow\rangle$, $e_1' =: \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\leftarrow\rangle$

и $\hat{\rho}_{(1,0,0)} = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|$, $\rho_{(-1,0,0)} = |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

Пример 3: $\hat{\rho}_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2})$, $\hat{\rho}_{(0,-1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, +i/\sqrt{2})$

Получаване друг о.н.б.: $e_0'' := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\uparrow\rangle$, $e_1'' =: \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\downarrow\rangle$

и $\hat{\rho}_{(0,1,0)} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$, $\rho_{(0,-1,0)} = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$

Забележете в горните примери:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\rho}_{(0,0,1)} + \hat{\rho}_{(0,0,-1)} = \hat{1} \\ \hat{\rho}_{(1,0,0)} + \hat{\rho}_{(-1,0,0)} = \hat{1} \\ \hat{\rho}_{(0,1,0)} + \hat{\rho}_{(0,-1,0)} = \hat{1} \end{array}\right\}$$

три двойки от взаимно обратни елементарни събития

разбивания на $\hat{1}$ за три различни и несъвместни максимални експерименти

При това:

$$\hat{\rho}_{(1,0,0)}\hat{\rho}_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & -i+1 \\ 1+i & -i+1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\hat{\rho}_{(0,1,0)}\hat{\rho}_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ 1-i & i+1 \end{pmatrix}$$

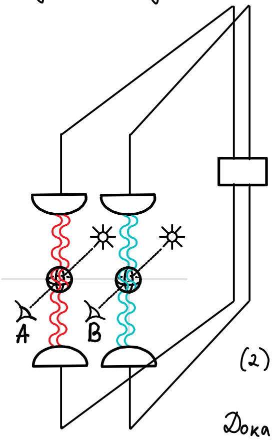
– некомутират $\Rightarrow$ не са съвместно измерими

Вероятност за преход: $P_{|\rightarrow\rangle \to |\uparrow\rangle} = |\langle\rightarrow|\cdot|\uparrow\rangle|^2 = \left|(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2$

$$= \frac{1}{2^2}|1+i|^2 = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

б) Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека C е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"
Искаме отделните кубити да са подсистеми $\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $*$-подалгебри с $\mathbb{1}$ на C

$$\mathcal{A} \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} C \overset{\iota_2}{\hookleftarrow} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall B \in \mathcal{B}$: $\iota_1(A)\iota_2(B) = \iota_2(B)\iota_1(A)$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

(2) C да се поражда алгебрично от $\iota_1(A)$ и $\iota_2(B)$ за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall B \in \mathcal{B}$

Доказва се, че за това има единствен модел за C с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по Адамар (Hadamard)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} , \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Основно свойство: $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

$$(A \otimes B)(\Phi \otimes \Psi) = (A\Phi) \otimes (B\Psi)$$

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $Mat_4(\mathbb{C}) = Mat_2(\mathbb{C}) \otimes Mat_2(\mathbb{C})$

Спрягане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

- наистина: $(\Phi \otimes \Psi)^*(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \cancel{\otimes} (\Psi^* \Psi')$

Стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^4$:

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_0 , \quad e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_1 ,$$

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_0 , \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_1 ,$$

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto \overbrace{A\otimes\hat{1}}$$

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow{\iota_1} \mathcal{C} \xhookleftarrow{\iota_2} \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\hat{1}\otimes B} \leftarrow B$$

$$\iota_2(B) =: B_{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad A\otimes B = (A.1)\otimes(1.B) = (A\otimes 1)(1\otimes B) = (1.A)\otimes(B.1) = (1\otimes B)(A\otimes 1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{(1)}B_{(2)} = B_{(2)}A_{(1)} \equiv A\otimes B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.1 & a_{11}.0 & a_{12}.1 & a_{12}.0 \\ a_{11}.0 & a_{11}.1 & a_{12}.0 & a_{12}.1 \\ a_{21}.1 & a_{21}.0 & a_{22}.1 & a_{22}.0 \\ a_{21}.0 & a_{21}.1 & a_{22}.0 & a_{22}.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.b_{11} & 1.b_{12} & 0.b_{11} & 0.b_{12} \\ 1.b_{21} & 1.b_{22} & 0.b_{21} & 0.b_{22} \\ 0.b_{11} & 0.b_{12} & 1.b_{11} & 1.b_{12} \\ 0.b_{21} & 0.b_{22} & 1.b_{21} & 1.b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

т.е., както и поискахме: абсолютно всяка наблюдаема на системата "1", $A_{(1)}$, е съвместно измерима с всяка наблюдаема на системата "2", $B_{(2)}$.

До тук изместихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на дялове "1 и 2" е $Mat_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in Mat_4(\mathbb{C})$, за което $Tr\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = Tr(\hat{\rho}\,C)$.

Използваме формулата $Tr(A\otimes B) = Tr(A)\,Tr(B)$ – наистина:

$$Tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \equiv Tr \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

$$= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$= Tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} Tr\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Следователно, всеки две отделни състояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на подсистемите води до състояние $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ на съставната система, така че за всеки две наблюдаеми A и B на подсистемите

$$\boxed{\langle A\otimes B\rangle_\rho \equiv \langle A_{(1)}B_{(2)}\rangle_\rho = \langle A\rangle_{\rho_1}\langle B\rangle_{\rho_2} \text{ – независимост}}$$

– наистина $Tr\big((\hat{\rho}_1\otimes\hat{\rho}_2)(A\otimes B)\big) = Tr\big((\hat{\rho}_1 A)\otimes(\hat{\rho}_2 B)\big) = Tr(\hat{\rho}_1 A)\,Tr(\hat{\rho}_2 B)$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = \underbrace{(\Psi\Psi^*)}_{\hat{\rho}_1} \otimes \underbrace{(\Phi\Phi^*)}_{\hat{\rho}_2}$
$= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$

Това се наричат **несплетени чисти състояния.**

Чисти състояния в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, чийто вектори на състояние Θ не могат да се представят, като $\Theta = \Phi \otimes \Psi$ се наричат сплетени / entangled

Специално за 2 бита има прост критерий за сплетеност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \phi_1\psi_2 \\ \phi_2\psi_1 \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix} \iff \theta_1\theta_4 \neq \theta_2\theta_3$$

Пример: $\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{за нормировка}}\Theta := e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

– определя сплетено чисто състояние.

3. Корелации и неравенства на Бел / Bell

Да разгледаме сплетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1\right) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle A_{(1)} \rangle_\Theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{22} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22}\right)$$

$$\langle B_{(2)} \rangle_\Theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(b_{11} + b_{22}\right)$$

$$\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_\Theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}\right)$$

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_\Theta \neq \langle A_{(1)} \rangle_\Theta \langle B_{(2)} \rangle_\Theta$ в общия случай на A и B, но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$ е 1-битово събитие $(c^2 + s^2 = 1)$

$$Z^\perp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

Тогава $\mathrm{Prob}_\Theta\left(Z_{(1)} \text{ и } Z^\perp_{(2)}\right) \equiv \langle Z_{(1)} Z^\perp_{(2)} \rangle_\Theta$

$$= \frac{1}{2}\left((1+c)(1-c) + (1-c)(1+c) - s^2 - s^2\right) = 0$$

Извод: при всеки избор на 1-битово събитие Z, ако то се измерва във всяка от подсистемите то или на две места $Z_{(1)} = 1$ и $Z_{(2)} = 1$ или на две места $Z_{(1)} = 0$ и $Z_{(2)} = 0$ – има пълен синхрон в това състояние по отношение на тези тестове.

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\mathrm{Prob}_\Theta\left(X_{(1)} \text{ и } Y^{\perp}_{(2)}\right) \equiv \left\langle X_{(1)} Y^{\perp}_{(2)} \right\rangle_\Theta = \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0\right) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Prob}_\Theta\left(Y_{(1)} \text{ и } Z^{\perp}_{(2)}\right) \equiv \left\langle Y_{(1)} Z^{\perp}_{(2)} \right\rangle_\Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-c) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-c) - \frac{1}{2}\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{4}(1-s)$$

$$\mathrm{Prob}_\Theta\left(X_{(1)} \text{ и } Z^{\perp}_{(2)}\right) \equiv \left\langle X_{(1)} Z^{\perp}_{(2)} \right\rangle_\Theta = \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{1}{2}(1-c) + 0 + 0 + 0\right) = \frac{1}{4}(1-c)$$

Класически анализ: http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/NN_Bell_extract.pdf

Забележка: в горния файл подсистемите са наречени "A" и "B" вместо "1" и "2" и се записва X_A, X_B вместо $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$, съответно; синхронизацията е записана за събитие означено с "P" вместо с "Z" и сплетеното състояние е означено с "Ψ" вместо с "Θ".

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\mathrm{Prob}_\Theta\left(X_{(1)} \text{ и } Y^{\perp}_{(2)}\right)}_{} + \underbrace{\mathrm{Prob}_\Theta\left(Y_{(1)} \text{ и } Z^{\perp}_{(2)}\right)}_{} \geq \underbrace{\mathrm{Prob}_\Theta\left(X_{(1)} \text{ и } Z^{\perp}_{(2)}\right)}_{}$$

Обаче ние получихме:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-s) \overset{?}{\geq} \frac{1}{4}(1-c)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 \geq \sin\varphi - \cos\varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{4} \geq \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

където $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$

Извод: неравенствата на Бел се нарушават в квантови системи, напр. за $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\Leftarrow$