Лекция 1: Аксиоматика на квантовата теория. Квантово-логически подход

Това са разширени записки предназначени за учебник по квантова информатика. Местата, които са влезнали в лекцията са маркирани с вертикална червена линия от дясната страна.

Една от основните особености на квантовата теория е, че тя описва взаимоотношението между “субект” и “обект”, без да отстранява “субекта”. Под “субект” разбираме наблюдател, измервател, апарат за наблюдение или експериментална установка, а “обекта” е изследвания (наблюдавания) обект.[1] За разлика от квантовото описание на света, при класическото описание се гради самостоятелна картина на обектите, отново въз основа на взаимоотношението между “субект” и “обект”, което е експеримента, но в последствие се отстранява участието на субекта от описанието. Последното се оказва невъзможно на сегашния етап на квантовата теория: “субекта” присъства на фундаментално ниво във формулировката на теорията. От друга страна, тази особеност на квантовата теория, не означава липсата на обективност при описанието

[1] В следващите лекции ще направим специален анализ на процеса на измерване.

на света: обективността означава, че има пълно съгласие между отделните субекти относно наблюденията и техните интерпретации. Отсъствието на последното би било именно "субективност".

1 Начална постановка

Първата цел в настоящия курс е дадем аксиоматично описание на квантовите системи, които за краткост ще наричаме просто системи.

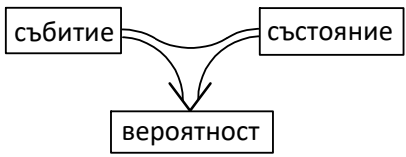
В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности, елементите на първата от които ще наричаме **събития**[2] на системата, а елементите на втората: **състояния**[3] на системата. Множествата на всички събития на системата ще означаваме с $\mathscr{Events}$, а множеството на всички състояния на системата: с $\mathscr{States}$. Заедно с това ще ни бъде определена и функция, която на всяка двойка от събитие $Q \in \mathscr{Events}$

[2] events
[3] states

и състояние $\rho \in \boldsymbol{States}$ ни задава число

$$Prob : \boldsymbol{Events} \times \boldsymbol{States} \to [0,1]\,,$$
$$(Q, \rho) \mapsto Prob_\rho(Q)\,(\equiv Prob(Q,\rho))\,, \qquad (1)$$

което се нарича **вероятност за настъпване** (**регистриране**) **на събитието** Q **в състояние** ρ. Схематично това е дадено на фиг. 1.



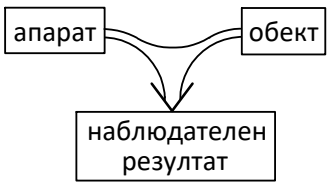
фиг. 1: Основна теоретична схема

Ние ще се постараем да приведем подходящи аксиоми за функцията (1), така че *пълното описание на системата да следва единствено от информацията, съдържаща се в задаването на тази функция.*

Понятията "събитие" и "състояние" ще разглеждаме, като първични понятия, които не подлежат на определение, също както понятията "точка" и "права" в геометрията са първични. Въпреки това обаче е полезно, а всъщност е и необходимо да се дадат по-конкретни

илюстрации на събитията, състоянията и основната ни теоретична схема от фиг. 1. Нека подчертаем, че тук става дума за само за илюстрации, които нито могат да обяснят напълно смисъла на първичните ни понятия, нито могат да изчерпат всички случаи от нашата практика, в които можем да ги приложим.

Като една първа конкретизация можем да заменим фиг. 1 със следната схема:



фиг. 2: Практическа постановка на теоретичната схема от фиг. 1

В случая: "апарат" може да бъде например изследователската установка в един физичен експеримент, в който се изследва даден физичен "обект". "Наблюдателният резултат", който дава експеримента, е някакво измерване върху изследвания обект и то включва редица елементарни алтернативи, като например,

възможни измерени стойности на някаква величина. От елементарните наблюдателни алтернативи можем да построим и събитията на провеждания експеримент и в частност, самите елементарни алтернативи съответстват на така наречените *елементарни събития на експеримента.*[4] Ако се концентрираме върху едно събитие, то наблюдателния резултат ще бъде една последователност от потвърждения или отрицания на събитието:

$$\textit{да}, \textit{не}, \textit{не}, \textit{да}, \textit{не}, \textit{да}, \textit{да}, \textit{да}, \textit{не}, \ldots, \qquad (2)$$

където "*да*" означава настъпване (регистрация) на елементарна наблюдателна алтернатива, която е включена в даденото събитие, а "*не*" – настъпване (регистрация) на друга елементарна алтернатива, която *не се включва* в събитието. Вероятността за събитието, тогава се изчислява по *закона за големите числа*,[5]

[4] В точка **??** ще въведем точното понятие за "елементарно събитие на експеримент". Преди това обаче, в точка **??** ще имаме и по-силно понятие за елементарно събитие по отношение на цялата система.

[5] law of large numbers (in probability theory)

като граница:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{брой “}\textit{да}\text{” в } N \text{ последователни опита}}{N}. \tag{3}$$

Тук опираме до една важна черта на всеки експеримент, а и на опита ни, като цяло: това е *повторяемостта*. Предполага се, че всеки експеримент може да бъде проведен многократно по “един и същи начин”.[6] Тази повторяемост присъства в двете страни на експеримента: апарата и обекта. Първо, ние считаме, че можем да направим неограничено много еднакви апарати, които да измерват (тестват, проверяват) едни и същи елементарни наблюдателни събития. От тук идват и най-първите ни емпирични разбирания за понятието за еднаквост на събития. Второ, ние считаме, че можем да приготвяме и изследваните обектите многократно, и по “един и същи начин”. От тук пък идват първоначалните ни емпирични разбирания за понятието за състояние на

[6]Тук израза “по един и същи начин” отново има първичен характер – както става обикновено за обясняването на едни първични понятия се налага въвеждането на други първични понятия и този процес се трябва да се прекрати в един момент.

обект. Ние считаме още, че има известна независимост между “апаратите” и “обектите”. Това означава, че с един апарат ние можем да изследваме обекти приготвени по различни начини, т.е., едно събитие ние можем да тестваме в различни състояния на системата. И също така ние можем да изследваме на различни апарати обекти, които са приготвени еднотипно, т.е., при едно също състояние на системата ние можем да тестваме различни събития. Всичко това са всъщност основни емпирични предположения предхождащи теорията на вероятностите, на които се основава и закона на големите числа.

Алтернативна илюстрация, която е по-близка по стил до изчислителна постановка се дава от следната схема:

фиг. 3: Изчислителна интерпретация на теоретичната схема от фиг. 1

В постановката на фиг. 3, ролята на "апарата" от фиг. 2 играе средната кутия, наречена "въздействие". Това може да бъде например изчислителния процесор в един (квантов) компютър. В ролята на изследвания "обект" от фиг. 2 е "входа" във фиг. 3, който в един компютър може да бъде началния сигнал подаден на процесора, т.е., състоянието на входните му регистри. Така, "изхода" във фиг. 3 е изходния сигнал, т.е., изходното състояние на регистрите. Горните предположения за "повторяемост" се пренасят и тук, както върху вида на въздействието, т.е., за работата на процесора, така и върху входа, т.е., за приготвянето на началното състояние на входните регистри. Измерването на крайното състояние на регистрите също трябва да се причисли към средната част на "въздействието" от фиг. 3, така че за "изхода" остава само крайния "наблюдателен резултат" от фиг. 2.

На този етап няма да конкретизираме повече първоначалната ни обща, теоретична схема от фиг. 1. В хода на излагането на аксиомите и техните следствия понякога ще привеждаме и допълнителни постановки за

илюстрация. В последствие, ще приведем и съвсем конкретни опитни постановки.

И една последна бележка към нашата първоначална илюстрационна част. Често се случва, след измерване върху даден обект той да се разруши и да престане да съществува. Например, при регистрация на частица върху фото-плака или, при регистрация на фотон в детектор, те се абсорбират (поглъщат) и престават да съществуват. В тези случаи не е възможно по нататъшно провеждане на измервания върху обекта. Има експерименти обаче, при които обекта продължава да съществува и в тези случаи особен интерес за нас ще представлява въпроса за трансформацията на състоянието на системата след първото измерване. На това ще бъде посветена и специална аксиома – така наречения *проекционен постулат на фон Нойман*[7] От гледна точка на теория на вероятностите, това отговаря на проблема за *условната вероятност*, т.е., намирането на вероятност за събитие при условие, че преди това е настъпило друго събитие.

[7] von Neumann's projection postulate

2 Общи бележки върху структурата на аксиоматичните системи в тази книга

Преди да преминем към аксиоматичното построение на квантовата теория е полезно да уточним стила и сруктурата на аксиоматичните системи, които ще изграждаме в този курс. Те ще са малко по-сложни от тези, на които сме свикнали от геометрията. Всъщност, аксиоматиката на самата геометрия е претърпяла дълго развитие докато се стигне до стройната и прецизна система на Хилберт в книгата му по основи на геометрията [**?**]. Донякъде ние сме стремили в нашето изложение да следваме стила Хилберт, чието изложение започва така: "*Мислим си за три различни системи от неща: . . . точки, . . . , прави, . . . , равнини . . . . Мислим си точките, правите, равнините в някакви взаимни съотношения и означаваме тези съотношения с думи, като "лежи", "между", . . . ; точното и пълното за математически цели описание на тези съотношения се извършва с аксиомите на геометрията.*"

В случая на аксиоматиката на квантовата теория, нашите първични понятия, които въведохме в предходната точка бяха *събитията* и *състоянията*, а ролята на първични съотношения между тях ще играе функцията *Prob*, която с думи изразихме, като *вероятност за настъпване на дадено събитие в дадено състояние*.[8] В последствие, ще определим допълнителни понятия, които ще наричаме **интерпретационни понятия**. С други думи, това ще бъдат, *производни, вторични* понятия, които ние наричаме "интерпретационни", понеже те ще задават интерпретации на допълнителни понятия от нашия опит. Част от тези понятия ще играят ролята на допълнителни множества от обекти (спрямо въведените вече множества на събитията и състоянията). Друга част ще бъдат допълнителни свойства и съотношения, а трета част ще са операции (т.е., функции) над въведените обекти. В квантово-логическия подход тези интерпрета-

[8]Може да кажем, че това е съотношение (релация) на "*вероятностна инцидентност*" или още, ма "*вероятностна принадлежност*", подобна на "размитите множества" / ("*fuzzy sets*").

ционни понятия ще включват например:

(i_1) *еквивалентност* на системи (точка 3).

(i_2) Ще въведем операция "*смесване на състояния*" и свойство "*чистота на състояние*" (точка 6).

(i_3) Ще отделим клас от системи, които ще наречем *класически* (точка 9).

(i_4) В множеството на събитията ще въведем допълнителна, нова релация (съотношение) "*мажориране*" (точка 10);

(i_5) "*логически*" операции върху събитията (точки 12 и 13).

(i_6) Допълнително, ново свойство на събитията ще бъде тяхната "*елементарност*" (*елементарни събития*, точка **??**).

(i_7) *Подсистеми* (точка **??**).

(i_8) Допълнителен, нов вид обекти ще бъдат "*експериментите*" над една система (точка **??**).

(i_9) За експериментите ще въведем релации на *прецизиране* (точка **??**), както и

свойството на *максималност* (спрямо прецизирането, точка **??**).

(i_{10}) За събитията ще въведем допълнителна релации на *съвместна проверимост* (точка **??**) и на *дизюнктивност* (точка **??**).

Въпреки, че интерпретационните понятия ще бъдат въвеждани, като определения, те ще носят известен аксиоматичен характер първо, защото те ще се съотнасят с определени страни на нашия опит (ще ги интерпретират). Заедно с това, ще се наложи да въвеждаме и явни аксиоми, които ще дават определени ограничения върху основните структурни обекти ($\mathscr{Events}$, $\mathscr{States}$, *Prob*), така че да се осигури съществуването и единствеността на интерпретационните понятия.

В хода на изложението ще се наложи да въведем определена математическа теория, която макар, че е стандартна и добре известна, не предполагаме, че е позната на читателите. Така, редом с горните интерпретационни определения ще даваме и *математически определения* на понятия, като например:[9]

[9] също девет, в което обаче няма никакъв от напред

(m_1) някои елементарни понятия от *теория на вероятностите* (точка 7);

(m_2) понятията *изпъкнали множества в линейни пространства* и техните *екстремални точки* (точка 8);

(m_3) *частично наредени множества* (точка 10);

(m_4) *решетка* (наредбена), *решетка с нула и единица* (точка 12);

(m_5) *атоми* в решетка с нула, *ниво* на елементи в решетка (точка **??**);

(m_6) *орто-решетка* и *орто-модуларни решетки* (точка 14);

(m_7) *подрешетки* (точка **??**);

(m_8) *булеви алгебри* (точка **??**);

(m_9) *разбивания на единицата* (точка **??**);

(m_{10}) *вероятности в орто-решетки* (точка **??**).

заложен смисъл

Всъщност, от математическа гледна точка интерпретационните понятия, като (i_1)–(i_{10}) по-горе, са напълно равностойни на математическите понятия (m_1)–(m_{10}). Просто последните имат по-универсален характер и се срещат в много по-широка литература, докато първите са въведени специално за аксиоматиката на квантовата теория, която развиваме в тези лекции.

Допълнителни интерпретационни и математически определения ще имаме за алгебричния аксиоматичен подход, но предварителен обзор на тях ще направим в точка **??**.

В нашето изложение, освен споменатите вече "интерпретационни" и математически части, ще има и **мотивационни части**. Те ще включват *илюстрации* на въведените понятия и аксиоми, и ще имат за цел да убедят читателя в тяхната "целесъобразност". Разбира се, в логически (математически) план, мотивационните части няма да играят никаква роля. В книгите по физика, интерпретационните определения и илюстративните примери често се срещат под израза: "*физически смисъл на въведените математически понятия*".

3 Еквивалентност (изоморфизъм) на системи

Както споменахме в точка 1, нашата цел е да построим общата теория на квантовите системи единствено на основата на задаването на множествата на събитията $\boldsymbol{Events}$ и на състоянията $\boldsymbol{States}$, заедно с функцията *Prob* (1).

Въз основа на това ние приемаме следното определение, две системи, зададени с данни

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Events}_j\,, \quad \boldsymbol{States}_j\,, \\ &\boldsymbol{Events}_j \times \boldsymbol{Events}_j \underset{Prob}{\longrightarrow} [0,1]\,, \end{aligned} \tag{4}$$

за $j = 1, 2$ ще наричаме **еквиваленти** или също **изоморфни**, ако съществуват взаимно–еднозначни и обратими съответствия (т.е., биекции)

$$\begin{aligned} F &: \boldsymbol{Events}_1 \to \boldsymbol{Events}_2\,, \\ G &: \boldsymbol{States}_1 \to \boldsymbol{States}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

така, че

$$Prob_{G(\rho)}(F(P)) = Prob_{\rho}(P) \tag{6}$$

за всеки $P \in \boldsymbol{Events}$ и $\rho \in \boldsymbol{States}$.

В допълнение на горната мотивировката на определението по-горе ще обърнем внимание, че въведеното понятие за еквивалентност не изключва въвеждането в бъдеще на допълнителни структури върху квантовите системи. Така например, третирането на една система, като съставена от части (например, система от няколко бита) е вид допълнителна структура. На този етап ние просто определяме най-общото понятие за еквивалентност. Аналогична ситуация имаме и в теория на множествата, където първо се отделя понятието еднаквост (биекция) между множествата, като безструктурни съвкупности. Едва след това, когато някои множества се снабдят с допълнителна структура, като група, линейно пространство и т.н., ние вече отделяме пофини понятия за еднаквост (изоморфизъм) на получените структури.

4 Аксиоми за отделимост

Нашите ***първи аксиоми*** изхождат от идеята, че единствените наблюдателни резултати, с които разполагаме са вероятностите $Prob_\rho(P)$. Поради това, дори само на базата на сравня-

ването на тези вероятности ние трябва да можем да отличаваме различните състояния и събития. По конкретно, приемаме, следните аксиоми.

За всеки две състояния $\rho, \sigma \in \boldsymbol{States}$, ако $Prob_\rho(P) = Prob_\sigma(P)$ при всяко събитие $P \in \boldsymbol{Events}$, то $\rho = \sigma$. (7)

За всеки две събития $P, Q \in \boldsymbol{Events}$, ако $Prob_\rho(P) = Prob_\rho(Q)$ при всяко състояние $\rho \in \boldsymbol{States}$, то $P = Q$. (8)

Съгласно аксиома (7) ние отъждествяваме две състояния, ако при всеки експеримент те водят до еднакви наблюдателни резултати. Аксиома (8) привежда същия принцип спрямо събитията. Нека отбележим, че при нашите илюстрации от точка 1, ние вече предположихме, че имаме някакви първични, *априорни* понятия за тъждественост на състояния и събития въз основа на "еднаквост в начина на приготвяне (конструиране)". Тук обаче засилваме нашите понятия за тъждественост, вече като следствие от наблюдателния ни опит. В частност, особено интересно следствие е въз-

можността за отъждествяване на събития по аксиома (8) независимо от това дали експериментите, в които участват тези събития могат да се проведат съвместно или не.

Всъщност, отъждествяването от аксиомите за отделимост има и *прагматичен характер*. Ние нищо не губим, ако го направим, тъй като винаги може да опитаме се откажем от това в бъдеще. Ние ще се върнем отново на този момент в дискусията по т.нар. "проблем за *скритите параметри*"[10].

5 Състоянията като функции от събитията

Съгласно първата от аксиомите за отделимост, (7), ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* $\boldsymbol{\mathscr{Events}}$: за едно състояние $\rho \in \boldsymbol{\mathscr{States}}$ ще пишем

$$\rho(Q) \;:=\; Prob_\rho(Q) \tag{9}$$

и по такъв начин ρ става функция

$$\rho \,:\, \boldsymbol{\mathscr{Events}} \,\to\, [0,1] \,:\, Q \,\mapsto\, \rho(Q)\,. \tag{10}$$

[10] *hidden variables*

Нека подчертаем обаче, че далеч не всяка функция $\mathscr{Events} \to [0,1]$ идва от състояние. Специална аксиома (точка **??**) ще отдели клас от допустими функции. Също ще отбележим, че във втората аксиома за отделимост, състоянията и събитията си разменят ролите, и следователно бихме могли и събитията да ги третираме, като функции на състоянията. Последната практика обаче, макар че е възможна, не се е утвърдила в квантовата теория, докато третирането на състоянията, като функции се оказва изключително удобно, което ще видим още в следващата точка.

Забележете: Когато разглеждаме състоянията, като функции от събитията ние автоматично удовлетворяваме първата аксиома за отделимост (7). Втората аксиома за отделимост (8) обаче си остава, като условие. От математическа гледна точка, условие (8) може да се изкаже така: *множеството от функции, които представят състоянията,* разделя точките *на множеството* $\mathscr{Events}$.[11]

[11] това е всъщност определението на термина "разделяне на точките"

6 Смес на състояния. Чисти състояния

За две състояния ρ_1 и $\rho_2 \in \boldsymbol{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1, \tag{11}$$

определяме **смес на** ρ_1 **и** ρ_2 **с тегла** q_1 **и** q_2 по формулата:

$$\rho(Q) := q_1\,\rho_1(Q) + q_2\,\rho_2(Q), \tag{12}$$

като фунцкия, за всяко събитие $Q \in \boldsymbol{Events}$. Последното равенство ще записваме още и във "функционален вид", като:

$$\rho = q_1\,\rho_1 + q_2\,\rho_2. \tag{13}$$

Нашата поредна ***аксиома*** – **аксиомата на смесването** – гласи, че:

функцията ρ (12) е винаги състояние на системата.

Еквивалентно, *изискваме да съществува състояние* ρ*, такова че*

$$Prob_\rho(Q) = q_1\,Prob_{\rho_1}(Q) + q_2\,Prob_{\rho_2}(Q), \tag{14}$$

за всяко събитие Q (и тогава, съгласно аксиома (7), токова състояние ρ ще е единствено).

С итериране на операцията на бинарното смесване (12), получаваме и по-общи смеси: ако $\rho_1, \ldots, \rho_k \in \boldsymbol{States}$ и

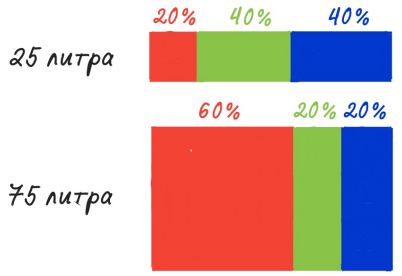
$$q_1, \ldots, q_k \in [0,1], \quad q_1 + \cdots + q_k = 1, \quad (15)$$

то е определено състоянието смес на $\rho_1, \ldots, \rho_k$ с тегла $q_1, \ldots, q_k$ по формулата

$$\rho(Q) := q_1\, \rho_1(Q) + \cdots q_k\, \rho_k(Q), \quad (16)$$

за всяко събитие $Q \in \boldsymbol{Events}$.

В следващата точка 7 ще дадем мотивация от теория на вероятностите на въведеното понятие за смес на състояния, а в точка 8 ще дадем и геометрична интерпретация на тази операция. В тази точка ние ще се ограничим до една проста илюстрация на смесването. Нека си представим два вида смеси от боя, както е представено на фиг. 4.



фиг. 4: Две смеси от боя, приготвени за общо смесване

Във всяка от смесите пропорциите на трите цвята се определят съответно като

$$(20\% : 40\% : 40\%) = \left(\frac{1}{5} : \frac{2}{5} : \frac{2}{5}\right),$$
$$(60\% : 20\% : 20\%) = \left(\frac{3}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5}\right).$$

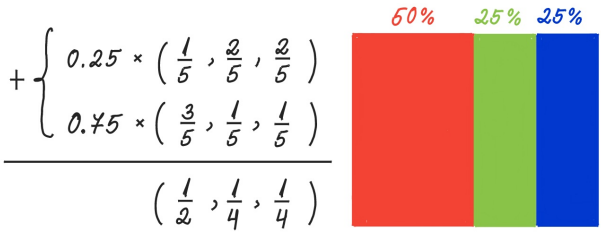
Заедно с това, в общата смес пропорциите между обемите на първоначалните две смеси са:

$$(25 : 75) = \left(\frac{1}{4} : \frac{3}{4}\right). \qquad (17)$$

Следователно в общата смес пропорциите между трите цвята ще са

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} : \frac{2}{5} : \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}\right),$$

както е изобразено на фиг. 5.



фиг. 5: Резултата от смесването на смесите от фиг. 4

След тези прости пресмятания, които илюстрират как се смесват смеси от бои, ние може да направим следната аналогия. На всяка смес от бои съпоставяме едно "неакуратно приготвено състояние", в което подобно на сместа от бои, отделните "чисти компоненти" присъстват в определени съотношения (процентни състави). В допълнение на това, ние допълнително смесваме състоянията, отново като следствие на нашата неакуратност в приготвянето. Тогава, като са ни известни пропорциите между двете смеси от ф–ла (17), които играят ролята на теглата q_1 и q_2 във ф-ли (11) и (12) по-горе, ние пресмятаме и дяла на отделните чисти примес в резултантната смес.

И така, интерпретацията на операцията смесване на състояния е, че това изразява нашата неакуратност, а също и несигурност

в приготвянето на състояния. Следователно, в обратния процес на процеса на смесване можем да видим начин на "*изчистване*" на състояния. Това ни води до следното определение:

Чисто състояние[12] е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*. Подробно, състоянието $\rho \in \mathcal{States}$ е чисто, тогава и само тогава, когато за всяко негово представяне в смес (13) е в сила, че или $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, или $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ (последните именно казваме, че отговарят на тривиални смеси).

И така, чистите състояния съответстват на най-прецизно приготвените състояния. Логично е да се очаква, че при тях вероятностите на всички събития биха били 1 или 0. Оказва се обаче, че това е така само за т.нар. "класически системи", които ще дефинираме точно във точка 9. За обща квантова система се оказва, че дори и в чисто състояние определени събития могат да настъпват с вероятност отлична от 1 или 0. Това е именно точния израз на неотстранимия

[12] pure state

индетерминизъм на квантовата теория, за който споменахме в увода.

7 Преговор от теория на вероятностите

С предната точка, понятието за вероятност започва вече да играе съществена роля в настоящия курс. За това, ще направим кратко отстъпление и в тази точка ще преговорим някои части на елементарната теория на вероятностите, отнасящи се до **крайни вероятностни пространства**. По определение, последните включват:

- Крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. То се нарича *множество на елементарните състояния*, а също и *множество на елементарните събития*. За момента обаче, термините състояния и събития в тази точка няма да бъдат обвързани с въведените в точка 1 първични понятия за състояние и събитие.

- На елементите на Ω са зададени *вероят-*

ности:

$$\begin{array}{c} \Omega = \{\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n\} \\ \Big\downarrow \qquad\quad \Big\downarrow \\ p_1,\ \ldots,\ p_n \\ = p_1(\omega_1),\ \ldots,\ = p(\omega_n)\,. \end{array} \tag{18}$$

Системата от вероятности $(p_1, \ldots, p_n)$ изпълняват условията

$$p_j \in [0,\, 1]\,, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\equiv \sum_{\omega\in\Omega} p\,(\omega)\right) \,=\, 1\,, \tag{19}$$

които накратко се означават, че $(p_1, \ldots, p_n)$ е **вероятностно разпределение**. Казваме също че функцията $p : \Omega \to [0, 1]$ задава вероятностно разпределение върху Ω.

Всяко вероятностно разпределение върху Ω поражда вероятности за събитията S в Ω, т.е., за подмножествата $S \subseteq \Omega$:

$$p(S) \,:=\, \sum_{\omega\in S} p(\omega) \in [0,\, 1]\,. \tag{20}$$

Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:

(p_1) *адитивност*

$$S = S_1 \,\dot\cup\, S_2 \quad \Rightarrow \quad p(S) = p(S_1) + p(S_2)\,,$$

където $S = S_1 \overset{\bullet}{\cup} S_2$ по определение означава, че $S = S_1 \cup S_2$ и $\emptyset = S_1 \cap S_2$ и се нарича *дизюнктивно обединение* (по-късно, ще го обощим в точка **??**);

(p_2) *монотонност*

$$S_1 \subseteq S \quad \Rightarrow \quad p(S_1) \leqslant p(S)\,;$$

(p_3) *нормировка*

$$p(\emptyset) = 0\,, \quad p(\Omega) = 1\,.$$

Следващо важно понятие, което ще преговорим е *условната вероятност*:[13]

$$p(S \,\big|\, Q) \;:=\; \frac{p(S \cap Q)}{p(Q)} \tag{21}$$

и следващия оттук *закон на Бейс*[14]

$$p(S \cap Q) \;=\; p(Q)\, p(S|Q) \;=\; p(S)\, p(Q|S)\,. \tag{22}$$

Смисълът на закона е, че ако определяме вероятността за S и Q, чрез последователно установяване на Q и после на S, при условие, че е налице Q, то резултатът ще бъде същия

[13] conditional probability

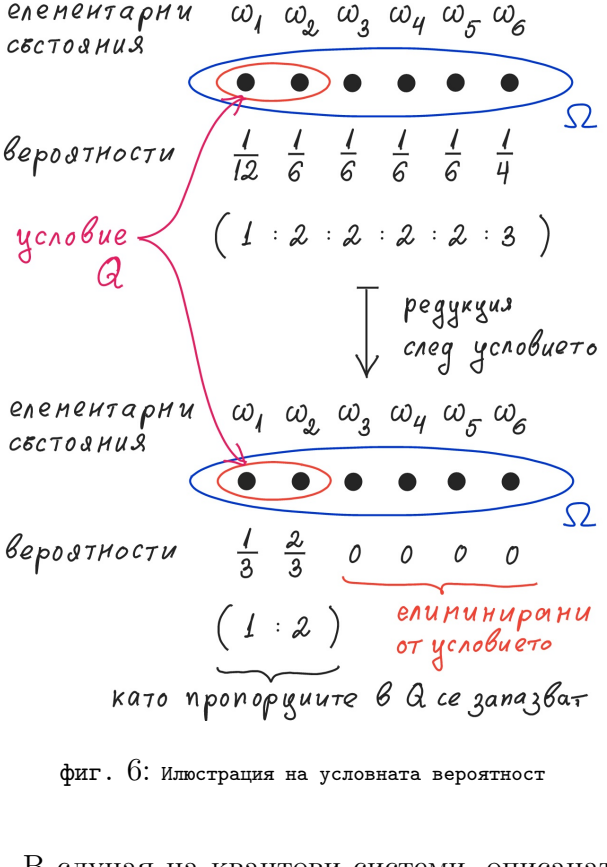
[14] Bayes' law / theorem

ако сменим реда на S и Q. Това е главният закон, който се нарушава при квантовата статистика.

Една мотивация на определението (21) идва от следното съображение. Ако имаме вероятностно разпределение $p(\omega_k)$, $\omega_k \in \Omega$, то след настъпване на събитие $Q \subseteq \Omega$, вероятностното разпределение се редуцира до

$$p'(\omega_k) := p(\omega_k|Q)\,,$$

което на свой ред означава, че вероятностите за $\omega_k \notin Q$ стават нула, а за $\omega_k \in Q$ вероятностите запазват взаимните си пропорции, каквито са имали преди настъпването на условието. Един това за пример това е илюстриран на фиг. 6.



фиг. 6: Илюстрация на условната вероятност

В случая на квантови системи, описаната ситуация се обобщава от споменатия преди *проекционен постулат*.

Забележете: $p'(\omega_k) := p(\omega_k|Q)$ $(k = 1, \ldots, n)$ отново е вероятностно разпределение.

Действително:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p(\omega_k \,|\, Q) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{p(\{\omega_k\} \cap Q)}{p(Q)} \\ &= \frac{1}{p(Q)} \sum_{k=1}^{n} p\big(\{\omega_k\} \cap Q\big) \\ &= \frac{1}{p(Q)}\, p\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \big(\{\omega_k\} \cap Q\big)\Big) \\ &= \frac{1}{p(Q)}\, p\Big(\underbrace{\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \{\omega_k\}\Big)}_{\Omega} \cap Q\Big) = 1.\end{aligned}$$

Събитията S, $Q \subseteq \Omega$ се наричат **независими събития**, ако $p(S \,|\, Q) = p(S)$. Така, S и Q са независими

$$\begin{aligned}&\iff \quad p(Q \,|\, S) = p(Q) \\ &\iff \quad p(S \cap Q) = p(S)\, p(Q)\end{aligned}$$

и в частност, релацията независимост е симетрична.[15]

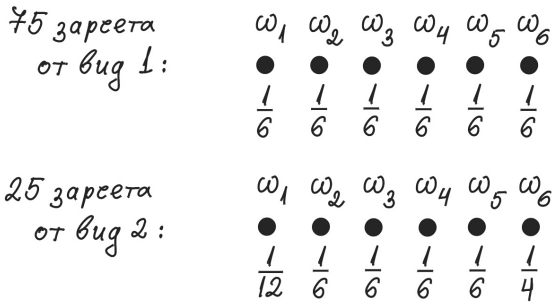
Достигаме до понятието за вероятностни смеси,[16] което дава обосновка на понятието за смес на състояния от предходната точка.

[15] но не и рефлексивна (!)

[16] mixture probability

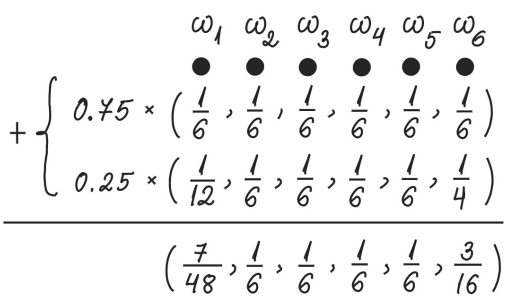
Ще илюстрираме най-напред понятието на пример.

Нека разполагаме с два вида зарчета: първият вид са симетрични и всичките 6 страни (елементарните събития ω_1, ..., ω_6) се падат с равни вероятности ($= 1/6$), а вторият вид зарчета са несиметрични. **Смесваме** 75 зарчета от първия вид с 25 от втория вид, както са дадени на фиг. 7, след което произволно изтегляме едно от всичките и питаме какви са вероятностите за елементарните събития.



фиг. 7: Смес от два типа зарчета

Резултатът според теория на вероятностите е представен на фиг. 8.



фиг. 8: Вероятностите след смесването на зарчетата от фиг. 7

Обща постановка:

Нека предположим, че провеждаме експеримент, който определя вероятностно пространство, като е дадено на ф-ла (18). Да допуснем, че зад това вероятностно описание стои *по-фино* описание, при което всяко елементарно събитие

$$\widetilde{\omega}_k := \{\omega_k\}$$

престава да бъде елементарно и се реализира при две взаимно допълнителни се ситуации A_1, A_2:

$A_1 \cap A_2 \quad = \emptyset$ (невъзможно събитие),

$A_1 \cup A_2 \quad =$ винаги изпълненото събитие.

Тогава:

$$\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$$
$$\text{като } (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} p(\omega_k) &= p(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) \\ &= p(A_1)\, p(\widetilde{\omega}_k \mid A_1) + p(A_2)\, p(\widetilde{\omega}_k \mid A_2). \end{aligned}$$

Нека положим:

$$\begin{aligned} p'(\omega_k) &:= p(\widetilde{\omega}_k \mid A_1)\,, \\ p''(\omega_k) &:= p(\widetilde{\omega}_k \mid A_2)\,, \\ q_1 &:= p(A_1)\,, \\ q_2 &:= p(A_2), \text{ за } k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Тогава полученият резултат се записва като:

$$p(\omega_k) = q_1 \cdot p'(\omega_k) + q_2 \cdot p''(\omega_k) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

където $(p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n))$, $(p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))$ и $(q_1,\, q_1)$ са вероятностни разпределения.

Вероятностното разпределение $(p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n))$ се нарича *смес* на $(p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n))$ и $(p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))$ с тегла q_1 и q_2 и то се дава по формулата

$$\begin{aligned} (p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n)) &= q_1 \cdot (p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n)) \\ &+ q_1 \cdot (p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))\,. \end{aligned} \tag{23}$$

От тук и ф–ла (20) следва, че за всяко събитие $S \subseteq \Omega$ е в сила равенството:

$$p(S) \;=\; q_1\, p'(S) + q_2\, p''(S)\,. \qquad (24)$$

Последната формула на свой ред съответства точно на ф-ла (12) (и също (14)) и така обосновава понятието за смес на състояния от точка 6.

8 Геометрия на множеството на състоянията

Операцията смесване на състояния има прост геометричен смисъл: тя представлява *изпъкнала комбинация в линейно пространство*. Заедно с това и множеството на всички състояния придобива структура на *изпъкнало множество* в линейно пространство. В тази точка ще въведем подробно тези понятия.

По определение, **изпъкнало (под)множество**[17] S в едно линейно пространство V над реалните числа $\mathbb{R}$ е такова множество, за което за всеки $q_1, q_2 \in [0,1]$, такива че $q_1 + q_2 = 1$ и всеки $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in S$ следва, че и $q_1\mathrm{u}$

[17] convex set

$+ q_2$v $\in S$. При това, линейната комбинация w $:= q_1$u $+ q_2 v$ е от специален вид и се нарича **изпъкнала комбинация**[18] на u и v с тегла q_1 и q_2. Геометрически, множеството от точки w, които са изпъкнали комбинации на точките u и v е отсечката свързваща u и v в линейното пространство V. Така, едно подмножество $S \subseteq V$ е изпъкнало, ако заедно с всеки две свои точки съдържа и отсечката, която ги свързва (виж фиг. 9).

фиг. 9: Изпъкнала комбинация и изпъкнало множество

И така, множеството на всички състояния ***States*** е изпъкнало множество. Но в кое линейно пространство? Обемащото линейно пространство в случая е линейното пространство на всички реални функции

[18] convex combination

върху множеството от събития:

$$\left\{ f \,\middle|\, f \,:\, \boldsymbol{\mathscr{Events}} \to \mathbb{R} \right\}. \tag{25}$$

Важно понятие в тази теория е понятието **екстремална (крайна) точка** на едно изпъкнало множество S: това е такава точка $\mathrm{w} \in S$, която не лежи във вътрешността на нито една отсечка, която се съдържа в S. С други думи, ако $\mathrm{w} = q_1\mathrm{u} + q_2\mathrm{v}$ е изпъкнала комбинация за $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in S$, то или $\mathrm{w} = \mathrm{u}$ (и $q_1 = 1$, $q_2 = 0$) или $\mathrm{w} = \mathrm{v}$ (и $q_1 = 0$, $q_2 = 1$). Така, чистите състояния са точно екстремалните точки на $\boldsymbol{\mathscr{Events}}$, като изпъкнало множество.

Ако $T \subseteq V$ е подмножество в линейно пространство, то **изпъкнала обвивка**[19] на T се нарича множеството

$$\mathit{ConvexHull}(T) := \Big\{ \mathrm{w} \in V \Big| \mathrm{w} = q_1\mathrm{u} + q_2\mathrm{v} \text{ е произволна изпъкнала комбинация за } u,\, v \in T \Big\}. \tag{26}$$

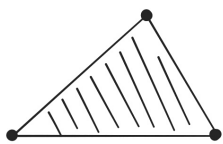
В тази връзка идва важния резултат: **теоремата на Крейн-Милман**.[20] Тя гласи, че:

[19] convex hull

[20] Krein–Milman theorem

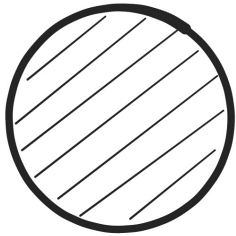
всяко затворено изпъкнало подмножество на едно реално, крайно-мерно, линейно пространство съвпада с изпъкналата обвивка на екстремалните си точки.

Забележете: в едно изпъкнало множество екстремалните точки са винаги гранични, но обратното не винаги е изпълнено. Отрицателен пример (контрапример) за последното е следния. В триъгълник екстремалните точки са единствено върховете му, но границата му включва и трите му страни (фиг. 10).



фиг. 10: Всеки затворен триъгълник е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са само върховете му, без осталата част от границата му.

Положителен пример е диска: в него всички точки от границата екстремални (фиг. 11).



фиг. 11: Всеки затворен диск е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са цялата граница.

Затворения триъгълник и *затворената* отсечка са примери на изпъкнали множества, чийто подмножества на екстремалните точки са *крайни*. Това са множествата от върховете и за триъгълника те са три, а за отсечката – два. В общия случай това ни води до понятието **симплекс**.[21] По определение, n–симплекс е изпъкнало множество, чийто екстремални точки са $(n+1)$–елементно множество. Екстремалните точки на симплекса се наричат негови *върхове* и те имат свойството, че никой от тях не лежи в изпъкналата обвивка на останалите.

Важен пример за симплекс е множеството от всички вероятностни разпределения върху

[21] **simplex**

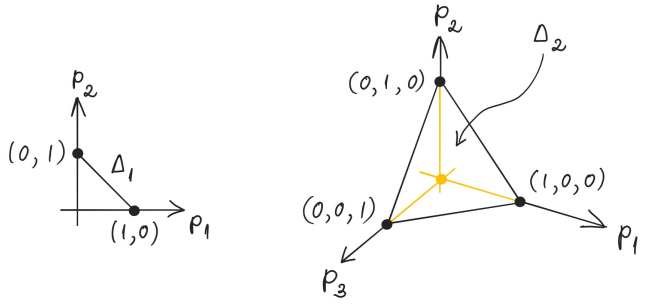
множество с n елемента. Това е подмножество на $\mathbb{R}^n$ от вида:

$$\Delta_{n-1} := \left\{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \leqslant p_j \leqslant 1, \text{ за } j = 1, \ldots, n\,;\; p_1 + \ldots + p_n = 1\right\}. \tag{27}$$

Това е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, в което изпъкналата комбинация, както видяхме в предната точка, има смисъл на *вероятностна смес*. Екстремалните точки на Δ_{n-1} са разпределенията от вида

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\,. \tag{28}$$

Нула-симплекса Δ_0 е точка, 1-симплекса Δ_1 е отсечка, а 2-симплекса Δ_2 е триъгълник. Последните два са изобразени на фиг. 12.



фиг. 12: Симплексите Δ_1 и Δ_2

9 Класически системи

В този курс ние ще се ограничим само до крайни системи.[22]

Класическа крайна система се определя от едно крайно множество Ω, по което задаваме:

$$\mathit{Events} := \mathscr{P}(\Omega)\,, \tag{29}$$

това е **степенното множество** (**power set**) на Ω, т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω; множеството на състоянията определяме като

$$\mathit{States} := \mathscr{P}rob.\mathscr{D}ist.(\Omega)\,, \tag{30}$$

което е множеството на всички *вероятностни разпределения* над Ω (както бяха определени в началото на точка 7). Функцията $Prob$ (1) се определя, като

$$Prob_p(S) := p(S)\,, \tag{31}$$

което е вероятността за $S \subseteq \Omega$ от ф–ла (20).

[22]Това обаче не означава, че безкрайните системи ще останат съвършено недостъпни за теорията ни. В точки **??** и ние ще разгледаме един подход към безкрайните системи, чрез крайни.

Така определените класически системи удовлетворяват аксиомите, които са наложени до тук: аксиомите за отделимост и аксиомата за смесването. В частност, в края на предходната точка ние видяхме, че множеството на състоянията на една крайна класическа система е симплекс, чийто върхове са чистите състояния. Последните са вероятностните разпределения от вида (28), т.е., това са вероятностни разпределения, в които всяко събитие настъпва с вероятност 1 или 0. Затова, тези състояния можем да наречем още **детерминистични състояния**. И така, *в класическите системи чистите състояния са точно детерминистичните състояния*. Това ще отпадне обаче за квантовите системи, където чисти състояния ще продължим да имаме, но детерминистични състояния няма да има.

Нека да отбележим и друг прост, но фундаментален факт. В примерите на класически системи наблюдаваме 1–1 съответствие между едно-елементните събития $\{\omega\} \subseteq \Omega$ и чистите състояния. Това 1–1 съответствие се фор-

мализира с условието:

за всяко $\{\omega\} \subseteq \Omega$ (32)
съществува единствено чисто състояние
$p \in \mathscr{P}rob.\mathscr{D}ist.(\Omega)$, такова че $p(\{\omega\}) = 1$,

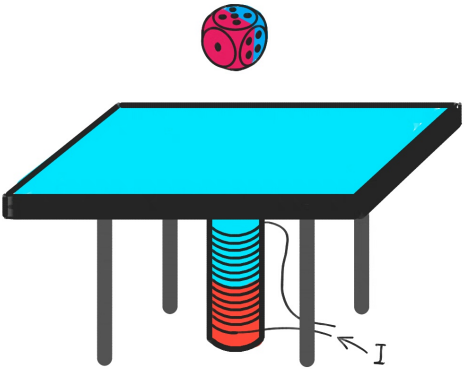
както и

за всяко чисто състояние (33)
$p \in \mathscr{P}rob.\mathscr{D}ist.(\Omega)$, съществува единствено
$\{\omega\} \subseteq \Omega$ такова че $p(\{\omega\}) = 1$.

Едно-елементните събития $\{\omega\} \subseteq \Omega$ се наричат още и *елементарни събития*, така, че може да изкажем накратко, че *в класическите системи има* 1–1 *съответствие между елементарни събития и чисти състояния*. Това свойство ще остане в сила и за най-общи квантови системи, след като въведем преди това обобщение на понятието "елементарно събитие" в точка **??**.

Тази точка ще завършим с кратка дискусия за новите аспекти, които в случая на класически системи се добавят към обичайните разглеждания в теорията на вероятностите. Преди всичко да обърнем внимание, че дока-

то при понятието "вероятностно пространство" от точка 7 ние имаме само едно вероятностно разпределение върху Ω, в случая на класическа система ние допускаме *всички възможни* вероятностни разпределения, като ги наричаме "състояния на системата". Нека илюстрираме това нагледно в следния пример от фиг. 13. Магнитно (нечестно) зарче се хвърля върху маса, която е електромагнит. В зависимост от посоката и силата на тока I, плотът на масата се намагнетизира и това променя вероятностите $p_{(I)}(\omega_k)$ за падането на числата 1, ..., 6 (елементарните събития ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6).



фиг. 13: Магнитно зарче, чието вероятностно разпределение на паданията може да се манипулира от тока I намагнетизиращ масата

На фиг. 14 е дадена примерна зависимост на вероятностите от пускания ток. По такъв начин, ние променяме състоянието а системата, което се закодира във вероятностното разпределение за паданията на зарчето.

състояние ↘	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
вероятност $p_{(I=+3)}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{6}$
вероятност $p_{(I=+1)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
вероятност $p_{(I=0)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
вероятност $p_{(I=-1)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
вероятност $p_{(I=-3)}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{54}$

фиг. 14: Примерни вероятностни разпределения за зарчето от фиг. 13 в зависимост от силата на тока I

Накратко, можем да заключим, че класическите системи са "вероятностни пространства с *променливи* вероятностни разпределения".

10 Частична наредба

Като начало, нека въведем следната основна бинарна релация в множеството на събитията: за $P, Q \in \mathbb{Events}$ нека

$P \preccurlyeq Q$ се определя чрез условието,
че за всички състояния $\rho, \sigma \in \mathbb{States}$,
от $Prob_\rho(P) = 1$ следва $Prob_\rho(Q) = 1$,
от $Prob_\sigma(Q) = 0$ следва $Prob_\sigma(P) = 0$. (34)

Когато $P \preccurlyeq Q$ ще казваме, че събитието P **се мажорира от** събитието Q. Синонимни изрази за това ще бъдат също и: $Q \succcurlyeq P$, "*Q мажорира P*", "*P се съдържа в Q*", "*Q съдържа P*", "*от P следва Q*", "*Q следва от P*".

За да изразим определение (34) с думи, нека твърдението "$Prob_\rho(P) = 1$" изкажем, като: "**събитието** P ***почти сигурно*** **настъпва** (**се случва** / **се наблюдава**) **в състояние** ρ". Също така, когато "$Prob_\rho(P) = 0$" ще казваме, че "събитието P ***почти сигурно*** **не настъпва** (не се случва / не се наблюдава) в състояние ρ".[23] Тогава определение (34) може да се изкаже по следния начин: "P се мажорира от Q, ако при всяко състояние в което P се наблюдава (случва / настъпва) почти сигурно също и Q се наблюдава почти сигурно, както и за всяко състояние, в което Q почти сигурно не се наблюдава следва, че и P почти

[23]Забележете, "$Prob_\rho(P) = 1$" и "$Prob_\rho(P) = 0$" са две *взаимно изключващи се*, но не и *взаимно допълнителни твърдения*, понеже за ситуациите с междинни вероятности нищо не се твърди. Затова е важно прилагателното "*почти сигурно*" да стои преди отрицанието.

сигурно не се наблюдава". Малко по-кратко и по-свободно, определението за $P \preccurlyeq Q$ може да се изкаже и така: "винаги когато се наблюдава събитието P се наблюдава и събитието Q, както и винаги когато Q не се наблюдава, тогава и P не се наблюдава".[24]

От ф-ла (34) непосредствено следват (чисто логически) две основни свойства на релацията $\preccurlyeq$:

(*рефлексивност*) за всяко събитие P имаме:

$$P \preccurlyeq P\,, \tag{35}$$

(*транзитивност*) за всеки три събития P, Q и R имаме че:
от $P \preccurlyeq Q$ и $Q \preccurlyeq R$
следва $P \preccurlyeq R$. (36)

Като поредна ***аксиома*** налагаме следното свойство:

[24] в случая израза "винаги когато" предполага изказването "за всяко състояние, в което" и също така "(не) се наблюдава" предполага "почти сигурност"

(*антисиметрия*) за всеки две събития P и Q имаме че: от $P \preccurlyeq Q$ и $Q \preccurlyeq P$ следва $P = Q$. (37)

Еквивалентно,

$$P = Q \tag{38}$$
$$\iff \begin{cases} Prob_\rho(P) = 1 \Leftrightarrow Prob_\rho(Q) = 1 \ (\forall \rho)\,, \\ Prob_\sigma(P) = 0 \Leftrightarrow Prob_\sigma(Q) = 0 \ (\forall \sigma)\,. \end{cases}$$

Изказана с думи горната аксиома гласи, че ако P, респективно, настъпва или не настъпва, тогава и само тогава, когато Q настъпва или не настъпва, то тогава P и Q са едно и също събитие.

По такъв начин, множеството $\boldsymbol{\mathscr{Events}}$, снабдено с релацията $\preccurlyeq$, се превръща в *частично наредено множество*,[25] тъй като (нека припомним, че) свойствата (35), (36) и (37) се явяват дефиниционни за това.

Аксиомата (37) изглежда напълно естествено. Тя засилва обаче аксиома (8), както непосредствено се вижда от еквивалентната формулировка (38).

[25] partially ordered set = poset

По-нататък (в точка **??**), в следствие на допълнителните ни аксиоми ще получим следното свойство:

$$P \preccurlyeq Q \quad \text{тогава и само тогава, когато}$$
$$\text{за всяко състояние } \rho \in \boldsymbol{States}\text{:}$$
$$Prob_\rho(P) \leqslant Prob_\rho(Q)\,. \tag{39}$$

За класическите системи от точка 9, въведената аксиома (37) се изпълнява и частичната наредба в множеството на събитията (29) за тези системи е просто релацията на включване на едно подмножество в друго (проверете!):

$$P \preccurlyeq Q \quad \Longleftrightarrow \quad P \subseteq Q \tag{40}$$

за всеки $P, Q \in \boldsymbol{Events} = \mathscr{P}(\Omega)$ (класическа система).

11 Нула и единица

Следваща ***аксиома*** ще бъде изискването, че:

в частично наредената множество на всички събития съществуват *най-голям и най-малък елемент.*

Последните ще означаваме с **0** (**нула**) и **1** (**единица**), съответно. Написано с формули,

това означа, че за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$ имаме:

$$\mathbf{0} \preccurlyeq P \preccurlyeq \mathbf{1}\,. \tag{41}$$

Изказано с думи, от събитието $\mathbf{0}$ следва всяко друго събитие, поради което то ще има смисъл на *невъзможното събитие*.[26] Аналогично, събитието $\mathbf{1}$ следва от всяко друго събитие и поради това то придобива смисъл на *винаги изпълнено събитие*.[27] Като следствие на допълнителните ни аксиоми по-нататък ще докажем, че:

$$\begin{aligned} &P = \mathbf{0} \quad \text{тогава и само тогава, когато} \\ &\text{за всяко състояние } \rho \in \mathscr{States}\text{:} \\ &Prob_\rho(P) = 0\,. \end{aligned} \tag{42}$$

[26] "невъзможно", понеже от него ще следват дори и "взаимно изключващи се" събития (каквото и да значи за момента това)

[27] "винаги изпълнено", понеже то ще следва, в частност и от "взаимно допълващи се" събития (което за момента също, както и в предната подлистна бележка, има само интуитивен и мотивационен смисъл)

и също, че

$$P = \mathbf{1} \quad \text{тогава и само тогава, когато за всяко състояние } \rho \in \boldsymbol{States}: \quad Prob_\rho(P) = 1\,. \tag{43}$$

Класическите системи (точка 9) притежават нула и единица – това са празното подмножество и цялото множество, съответно:

$$\mathbf{0} = \emptyset \in \mathscr{P}(\Omega)\ (= \boldsymbol{Events})\,, \qquad \mathbf{1} = \Omega \in \mathscr{P}(\Omega)\ (= \boldsymbol{Events}) \tag{44}$$

(защо?).

12 Логическите операции "*и*" и "*или*" за събития

Всяко частично наредено множество допуска формулирането на логическите операции "*и*" и "*или*" посредством понятията за *инфимум* (или още, *точна долна граница*) и *сюпремум* (*точна горна граница*), съответно.

Нашата следваща ***аксиома*** е, че

> в множеството на всички събития съществуват инфимумите и сюпремумите на произволни подмножества от събития.

Нека припомним тези понятия от общата теория на частично наредените множества. Ако $(\mathscr{T}, \preccurlyeq)$ е едно частично наредено множество и $S \subseteq \mathscr{T}$, то **инфимум** на S се определя като:

$$\wedge S\,(\equiv \inf S) := a \tag{45}$$
$$\iff \begin{cases} \forall x \in S : a \preccurlyeq x \\ \forall y \in \mathscr{T} : (\forall x \in S : y \preccurlyeq x) \Rightarrow y \preccurlyeq a\,. \end{cases}$$

Изказано с думи, a е най-големия елемент в множеството на всички елементи y, които са по-малки от всеки елемент x на S. *Дуално понятие*[28] е **сюпремума**:

$$\vee S\,(\equiv \sup S) := a \tag{46}$$
$$\iff \begin{cases} \forall x \in S : x \preccurlyeq a \\ \forall y \in \mathscr{T} : (\forall x \in S : x \preccurlyeq y) \Rightarrow a \preccurlyeq y\,, \end{cases}$$

т.е., a е най-малкия елемент в множеството на всички елементи y, които са по-големи от всеки елемент x на S. Подчертаваме, че елемен-

[28] Дуално понятие (респ., твърдение) в теорията на частично наредените множества се получава с обръщане на посоките на наредбената релация навсякъде в съответното определение (респ., твърдение).

тите $\wedge S$ и $\vee S$ не винаги съществуват. Доказва се обаче, че *ако съществуват* $\wedge S$ *или* $\vee S$, *то определенията по-горе ги дефинират еднозначно.*[29] Нека отбележим, че ако частично наредено множество $(\mathscr{T}, \preccurlyeq)$ има нула и единица, то

$$\wedge\emptyset = \mathbf{1}\,, \quad \vee\emptyset = \mathbf{0}\,, \quad \wedge\mathscr{T} = \mathbf{0}\,, \quad \vee\mathscr{T} = \mathbf{1}\,.$$

Важна теорема в теорията на инфимумите и сюпремумите ([**?**]) гласи, че: (i) *ако в едно частично наредено множество* $(\mathscr{T}, \preccurlyeq)$, *в което има нула и единица, съществуват инфимумите на произволни подмножества* $S \subseteq \mathscr{T}$, *то тогава съществуват и сюпремумите на произволни подмножества, като при това е в сила:*

$$\vee\, S \;=\; \wedge\{y \in \mathscr{T} \,|\, \forall x \in S : x \preccurlyeq y\}\,; \qquad (47)$$

(ii) дуално, *ако в едно частично наредено множество* $(\mathscr{T}, \preccurlyeq)$, *в което има нула и единица, съществуват сюпремумите на произволни подмножества* $S \subseteq \mathscr{T}$, *то тогава съществуват*

[29] опитайте да го докажете сами, ако това не вие известно(!)

и инфимумите на произволни подмножества, като при това е в сила:

$$\wedge S \;=\; \vee\{y \in \mathscr{T} \,|\, \forall x \in S : y \preccurlyeq x\}\,. \qquad (48)$$

(Всъщност, ф-ли (47) и (48) са практически определенията за сюпремум и инфимум.)

В математиката, частично наредени множества, в които произволни, непразни, крайни подмножества от елементи имат сюпремум и инфимум, се наричат *решетки* (наредбени).[30] Ако в решетка съществуват сюпремумите и инфимумите на произволни подмножества, тогава решетката се нарича *пълна*.[31] По такъв начин, аксиомите формулирани до тук могат да се свият просто до формулировката, че *множеството на събитията* $\boldsymbol{\mathscr{Events}}$ *е пълна решетка с нула и единица, спрямо операцията "*$\preccurlyeq$*"* (34)*, в качеството на частична наредба.*

Особено важен случай е, когато имаме инфимум и сюпремум на множество от два елемента. Нека вече се концентрираме върху случая на частично нареденото множество на

[30] lattice

[31] complete lattice

събитията. За две събития $P, Q \in \mathscr{Events}$ полагаме:

$$P \wedge Q \,(\equiv \quad P \textit{ и } Q \quad) := \wedge\{P, Q\}\,,$$
$$P \vee Q \,(\equiv P \textit{ или } Q\,) := \vee\{P, Q\} \qquad (49)$$

и по-нататък ние основно ще използваме означения "$\wedge$" и "$\vee$" за обозначаване на логическите операции "*и*" и "*или*" между събитията, съответно. В следващата точка специално ще разгледаме инфимума и сюпремума, "$\wedge$" и "$\vee$", като бинарни операции. По-нататък, операциите "$\wedge$" и "$\vee$" ще наричаме също **решетъчни операции**.

За класическите системи (точка 9) множеството на събитията, което е степенното множество (ф-ла (29)), е пълна решетка. В този случай решетъчните операции "$\wedge$" и "$\vee$" съвпадат с теоретико-множествените операции сечение "$\cap$" и обединение "$\cup$", съответно:

$$P \wedge Q = P \cap Q\,, \quad P \vee Q = P \cup Q \qquad (50)$$

за всеки $P, Q \in \mathscr{Events} = \mathscr{P}(\Omega)$ (класическа система).

Тази точка ще завършим с дискусия относно мотивацията и илюстрацията (т.е., "прак-

тическата реализация") на въведените логически операции "$\wedge$" и "$\vee$" между събитията. И така, възниква следния въпрос: доколко тези операции биха могли да се изпълнят в експерименти. Нека първо допуснем, че събитията P и Q могат да се определят в един общ експеримент, като подмножества от елементарни наблюдателни алтернативи. Тогава операциите "$\wedge$" и "$\vee$" ще преминат в операциите сечение и обединение на съответните подмножества от елементарни събития на експеримента. В общия случай обаче може и да не съществува общ експеримент за P и Q. Тогава се предлага следния изход ([**?**, Theorem 2.1]). Нека $\{P_\alpha\}_\alpha$ е произволна фамилия от събития, като индекса α е "името" на експеримента, на който P_α се измерва (проверява). Допускаме, че може да конструираме експеримент, който се извършва по следния начин: избираме напълно случайно произволен експеримент "α" и проверяваме (измерваме) в него събитието P_α. Тогава, в така конструирания експеримент почти сигурното изпълняване на измерваното събитие ще има смисъла точно на почти сигурното изпълняване на инфимума

$\wedge\{P_\alpha\}_\alpha$. Това донякъде оправдава предположението, че в частично наредено множество на събитията съществуват инфимумите на произволни подмножества.

И така, ако по една или друга причина допуснем съществуване на произволни инфимуми, то съгласно теоремата по го-горе (ф-ла (47)) ще съществуват и сюпремумите на произволни множества от събития. Обръщаме внимание, че за целта е нужно съществуването на инфимум да се допусне за произволни подмножества от събития $\{P_\alpha\}_\alpha$, а не само на крайни. Това е така, защото в последствие във ф-ла (47) се налага конструирането на инфимуми по безкрайни множества, даже и когато изходното множество S е крайно.

13 Отрицанието

За да завършим въвеждането на основните логически релации и операции между събитията ни остава да въведем и операцията *отрицание*.

Ще предположим, като поредна ***аксиома***, че

за всяко събитие P съществува събитие Q такова, че Q се случва (наблюдава) тогава и само тогава, когато P не се случва, както и P се случва тогава и само тогава, когато Q не се случва.

Написано с формула това условие изглежда така: за всяко състояние $\rho \in \boldsymbol{States}$ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} Prob_\rho(P) \,=\, 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad Prob_\rho(Q) \,=\, 0\,, \\ Prob_\rho(P) \,=\, 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad Prob_\rho(Q) \,=\, 1\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Съгласно аксиома (38) за равенство на две събития следва, че събитието Q е еднозначно определено от събитието P. Ще казваме, че Q **е отрицание на събитието** P и ще пишем:

$$Q \;=:\; P^\perp \,(\equiv \textit{ не } P)\,. \tag{52}$$

Друго следствие, което получаваме от определенията и аксиомите ни до тук е твърдението, че всички събития P_1 и P_2 имаме:

$$P_1 \preccurlyeq P_2 \quad \Longrightarrow \quad P_2^\perp \,=\, P_1^\perp\,. \tag{53}$$

По-нататък, като следствие на останалите ни аксиоми ще покажем, че

$$Prob_\rho(P^\perp) \,=\, 1 - Prob_\rho(P) \tag{54}$$

за всички $P \in \mathscr{Events}$ и $\rho \in \mathscr{States}$.

За класическите системи (точка 9) отрицанието е теоретико-множественото допълнение (защо?):

$$P^{\perp} = \Omega \setminus P \tag{55}$$

за всеки $P, Q \in \mathscr{Events} = \mathscr{P}(\Omega)$ (класическа система).

Следващата точка беше започната в края на лекцията, но ще бъде повторена и завършена в началото на следващата лекция.

14 Общи закони на съждителното (пропозиционалното) смятане за събития

Нека изброим основните свойства на въведените до тук логически операции и релации върху събитията, които следват от въведени-

те до сега аксиоми:

$$P \wedge (Q \wedge R) \;=\; (P \wedge Q) \wedge R\,,$$
$$P \vee (Q \vee R) \;=\; (P \vee Q) \vee R\,, \tag{56}$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P\,, \quad P \vee Q = Q \vee P\,, \tag{57}$$
$$P \vee (P \wedge Q) \;=\; P\,,\; P \wedge (P \vee Q) \;=\; P\,, \tag{58}$$
$$P \wedge P \;=\; P \;=\; P \vee P\,, \tag{59}$$
$$P \wedge Q \;=\; P \quad \Leftrightarrow \quad Q \preccurlyeq P\,,$$
$$P \vee Q \;=\; Q \quad \Leftrightarrow \quad P \preccurlyeq Q\,. \tag{60}$$
$$\big(P^{\perp}\big)^{\perp} \;=\; P\,, \tag{61}$$
$$P \vee P^{\perp} \;=\; \mathbf{1}\,,\; P \wedge P^{\perp} \;=\; \mathbf{0}\,,\; \mathbf{1}^{\perp} \;=\; \mathbf{0}\,, \tag{62}$$
$$\big(P \wedge Q\big)^{\perp} \;=\; P^{\perp} \vee Q^{\perp}\,,$$
$$\big(P \vee Q\big)^{\perp} \;=\; P^{\perp} \wedge Q^{\perp} \tag{63}$$

(за всеки $P, Q, R \in \boldsymbol{\mathscr{Events}}$). Поименно:

- (56) са тъждествата за *асоциативност*;
- (57) са тъждествата за *комутативност*;
- (58) се наричат тъждества за "*поглъщането*";[32]
- (59) са тъждествата за *идемпотентност*;

[32] absorption laws

- (60) дават обратна характеризация на релацията на частична наредба $\preccurlyeq$ посредством операциите $\wedge$ или $\vee$;

- (61) е *идемпотентността на отрицанието*;

- (62) започва със *закона за изключеното трето*;

- и накрая, (63) са *законите на де Морган.*[33]

Доказателството на горните тъждества се състои просто в пряко следване на дадените до тук определения и аксиоми, и затова ще го пропуснем.

Тъждествата (56)–(63) съставляват законите за класическото съждително смятане, от които са изпуснати само *законите за дистрибутивност*:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\,, \\ P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\,. \end{aligned} \qquad (64)$$

[33] de Morgan's laws

В общия случай, това което следва вместо тъждествата (64) са неравенствата

$$P \wedge (Q \vee R) \;\succcurlyeq\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\,,$$
$$P \vee (Q \wedge R) \;\preccurlyeq\; (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \qquad (65)$$

(докажете ги(!) – упражнението е много полезно).

В алгебрата, множество с бинарни операции "$\wedge$" и "$\vee$" и едномесна операция "$\perp$", в което изпълняват тъждествата (56)–(63) се нарича **орто-решетка**.[34] Така, аксиомите до тук могат на кратко да се изкажат така:
множеството $\boldsymbol{\mathscr{Events}}$ *на квантовите събития е орто-решетка* (*спрямо релацията* (34) *и операциите* (49) *и* (52)).

Структурата на орто-решетка е сравнително силна и съдържателна, но не достатъчно. Допълнително усилване идва от т.нар.[35]

закон за орто-модуларност:

ако $P \preccurlyeq Q$ тогава $P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = Q$ (66)

за всеки две събития $P, Q \in \boldsymbol{\mathscr{Events}}$,

[34] ortho-lattice
[35] ortho-modularity law

който приемаме като ***аксиома***. Условието (66) може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже

$$P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = (P \vee P^{\perp}) \wedge (P \wedge Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q\,,$$

където във второто равенство сме използвали закони (62) и (60).

В алгебрата, орто-решетки, в които се изпълнява орто-модуларния закон се наричат **орто-модуларни решетки**.[36]

[36] ortho-modular lattices