Квантово съждително смятане (quantum propositional calculus)

асоциативност : $P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

комутативност : $P\wedge Q = Q\wedge P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

поглъщане : $P\vee(P\wedge Q) = P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

идемпотентност: $P\wedge P = P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

} Алгебрично определение за решетка

наредба: $P \preccurlyeq Q \Longleftrightarrow P = P\wedge Q$ $(\wedge \leftrightarrow \vee$ и $\preccurlyeq \leftrightarrow \succcurlyeq)$

$\hat{0}$ и $\hat{1}$: $P\wedge\hat{0} = \hat{0}$, $P\vee\hat{0} = P$, $P\wedge\hat{1} = P$, $P\vee\hat{1} = \hat{1}$

отрицание $\perp$: $P\wedge P^\perp = \hat{0}$, $P\vee P^\perp = \hat{1}$, $\hat{1}^\perp = \hat{0}$

$(P^\perp)^\perp = P$

Де Морган: $(P\wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

} Орто-реш.

-това са всички закони на класич. съждително смятане без (дистрибутивност) $P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

Заменя я по-слаба акс. : (ортомодуларност)

$$P \preccurlyeq Q \Rightarrow \underbrace{P\vee(Q\wedge P^\perp)} = Q$$

(за числа $p \leq q$: $p + (q-p) = q$)

следва от дистр. $\llcorner = (P\vee Q)\wedge(P\vee P^\perp) = Q\vee 1 = Q$

Смисъл на $Q\wedge P^\perp =: Q\setminus P$ - допълнение на P в Q

Опр.: За $P, Q \in Events$, $P \preccurlyeq Q$ казваме, че Q покрива P, ако $P \neq Q$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$

Ако P покрива 0, казваме че P е елементарно събитие

Аксиома (закон на покриването): Ако P е елементарно съб. Q-събитие т.че: $P \wedge Q = 0$, тогава $P \vee Q$ покрива Q

Опр. Вероятност (вер. разпределение) върху ортoрешетка $(Events)$

$$\rho : Events \to [0,1] : \rho(1) = 1, \quad P \preccurlyeq Q : \rho(Q) = \rho(P) + \rho(\underbrace{Q \setminus P}_{Q \wedge P^{\perp}})$$

$Prob.Dist.(Events) := \{\forall$ вер. в/у $Events\}$.

Последна аксиома: $States = Prob.Dist.(Events)$

Основни модели: "чисто квантова крайна сист."

а) Хилбертови пр-ва (крайно-мерни)

$\mathcal{H}$ - коплексно вект. пр-во (над $\mathbb{C}$)

$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\phi, \psi) \mapsto \langle \phi | \psi \rangle$ - скаларно пр.

hermitian

т.че: (ермитово) $\langle \phi | \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \rangle = \alpha_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + \alpha_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$ (лин)

$\langle \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 | \psi \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle \phi_1 | \psi \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle \phi_2 | \psi \rangle$ (антилин.), $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$ (ермитова симетрия)

(Строга полож. дефинитност) $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$ и $\underbrace{\langle \phi | \phi \rangle}_{\|\phi\|^2} = 0 \iff \phi = 0$

$\|\phi\|^2$ - норма на ϕ

б) Първи сведения от теорията на хилб. пр.

- $\exists$ ортонорм. базис: $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{H}$ т.че. $\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk} := \begin{cases} 1 - j = k \\ 0 - j \neq k \end{cases}$
- $\forall \psi \in \mathcal{H} : \phi = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \ \llcorner|\langle e_j \cdot$ ск. пр-е

Kroenecker
δ - символ на Кронекер

$$\Rightarrow \langle e_j | \phi \rangle = x_1 \underbrace{\langle e_j | e_1 \rangle}_{0} + \dots + x_j \underbrace{\langle e_j | e_j \rangle}_{1} + \dots (0) = x_j$$

$$\Rightarrow \phi = \langle e_1 | \phi \rangle e_1 + \dots + \langle e_n | \phi \rangle e_n$$

Ако $\phi = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $\psi = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то

$$\langle \phi | \psi \rangle = \bar{x}_1 y_1 \underbrace{\langle e_1 | e_1 \rangle}_{1} + \bar{x}_1 y_2 \underbrace{\langle e_1 | e_2 \rangle}_{0} + \dots = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n \bar{y}_n$$

- каноничен модел на n-мерно хилб. пр-во:

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

- Ортогонални допълнения: $\forall V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathcal{H} \quad \exists! W \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathcal{H}$

т.че: $V \cap W = \{0\}$, $V \perp W$, т.е. $\forall \phi \in V, \psi \in W : \langle \phi | \psi \rangle = 0$

$\mathcal{H} = V + W := \{ \phi + \psi \mid \phi \in V, \psi \in W \}$, при това $\forall \theta = \phi + \psi$ - единствено разлагане

$\mathcal{H} = V \oplus W$, $W := V^{\perp}$.

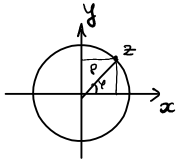
$\hookrightarrow \phi := P_V \theta$ - орт. проекция в/у V

в) Комплексни числа (преговор) $\mathbb{C} = \{\overset{Re}{x} + i\overset{Im\text{ - част}}{y} \mid x, y \in \mathbb{R}\}, i^2 = -1$

$(x+iy)(z+iw) \underset{\text{комутативно е}}{=} xz + xwi + zyi + yw\underbrace{i^2}_{-1} = xz - yw + (xw + yz)i$

$\overline{x+iy} := x - iy$ - компл. спрягане : $\overline{(x+iy)}(x+iy) = x^2 + y^2 \geq 0$

$z \in \mathbb{C}$: $|z| := \sqrt{\bar{z}z}$ - модул



$z = \underset{\text{модул}}{\rho}\, e^{i\underset{\text{фаза}}{\boxed{\varphi}}}$ - полярно представяне

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ - формула на Ойлер / Euler

$\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$, $z\bar{z} = \rho e^{i\varphi} \rho e^{-i\varphi} = \rho^2 e^{i\varphi - i\varphi} = \rho^2 = |z|^2$

Стигаме до модела: при зададено $\mathcal{H}$ - "пр-во на състоянията"

- $\mathcal{E}vents := \mathcal{Z}(\mathcal{H}) := \{V \mid V \underset{\text{мн.}}{\subseteq} \mathcal{H}\}$

това е ч.н.м. $V \preccurlyeq W \underset{\text{опр.}}{\iff} V \subseteq W$ (като множества)

$\hat{0} = \{0\}$, $\hat{1} = \mathcal{H}$ - най-голям и най-малък ел.

$V \wedge W = V \cap W$ понеже сеч. е отново мн.

но $V \vee W \neq V \cup W$ - не винаги е мн.

$V \vee W = V + W$ - най-малкото $T \underset{\text{мн.}}{\subseteq} \mathcal{H}$, т.че $\begin{cases} V \subseteq T \\ W \subseteq T \end{cases}$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ не е дистрибутивна: Нека $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ – не колин.

$\theta = \phi + \psi$. Нека $V = \mathbb{C}\phi$, $W = \mathbb{C}\psi$, $T = \mathbb{C}\theta \neq V + W$ (!)

Тогава: $(V \vee W) \wedge T = (V + W) \cap T = T \not\asymp$

но $(V \wedge T) \vee (W \wedge T) = \underbrace{(V \cap T)}_{0} + \underbrace{(W \cap T)}_{0} = \hat{0}$.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ е орто-реш. : $V^{\perp}$

– всички зак. на кв. съжд. ст. се изп. заедно с акс. за орто-мод. и зак. за покриването.

States := ProbDist.$(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ – завършва модела

Теорема За $\forall$ чисто съст. ρ $\exists!$ едномерно $\mathbb{C}\psi \subseteq \mathcal{H}$.

и ако ψ – единичен $(\|\psi\| = 1)$ то $\mathrm{Prob}_{\rho}(V) = \|P_V \psi\|^2$

До колко общ е този модел?