Квантово съждително смятане (quantum propositional calculus)

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{асоциативност:} & P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R & (\wedge \leftrightarrow \vee) \\
\text{комутативност:} & P \wedge Q = Q \wedge P & (\wedge \leftrightarrow \vee) \\
\text{поглъщане:} & P \vee (P \wedge Q) = P & (\wedge \leftrightarrow \vee) \\
\text{идемпотентност:} & P \wedge P = P & (\wedge \leftrightarrow \vee)
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\text{Алгебрично} \\
\text{определение} \\
\text{за решетка}
\end{array}
$$

наредба: $P \leq Q \iff P = P \wedge Q$ $(\wedge \leftrightarrow \vee$ и $\leq \leftrightarrow \geq)$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\hat{0} \text{ и } \hat{1}\text{:} & P \wedge \hat{0} = \hat{0}, \quad P \vee \hat{0} = P, \quad P \wedge \hat{1} = P, \quad P \vee \hat{1} = \hat{1} \\
\text{отрицание } \perp\text{:} & P \wedge P^{\perp} = \hat{0}, \quad P \vee P^{\perp} = \hat{1}, \quad \hat{1}^{\perp} = \hat{0}, \\
 & (P^{\perp})^{\perp} = P \\
\text{Де Морган:} & (P \wedge Q)^{\perp} = P^{\perp} \vee Q^{\perp} \quad (\wedge \leftrightarrow \vee)
\end{array}
\right\}
\text{орто-реш.}
$$

- това са всички закони на класич. съждително смятане без (дистрибутивност) $P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ $\quad(\wedge \leftrightarrow \vee)$

Заменя я по-слаба акс.: (ортомодуларност)

$$P \preccurlyeq Q \Rightarrow \underbrace{P\vee(Q\wedge P^{\perp})} = Q$$

(за числа $p \preccurlyeq q$: $p+(q-p) = q$)

следва от дистр. $\; = (P\vee Q)\wedge(P\vee P^{\perp}) = Q \vee 1 = Q$

Смисъл на $Q\wedge P^{\perp} =: Q\setminus P$ - допълнение на P в Q

Опр.: За $P, Q \in Events$, $P \lessdot Q$ казваме, че Q покрива P, ако $P \neq Q$ и от $P \leqslant R \leqslant Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$

Ако P покрива 0, казваме че P е елементарно събитие

Аксиома (закон на покриването): Ако P е елементарно съб. Q - събитие т.че: $P \wedge Q = 0$, тогава $P \vee Q$ покрива Q

Опр. Вероятност (вер. разпределение) върху ортопрешетка (Events)

$\rho : Events \to [0,1]$: $\rho(\mathbb{1}) = 1$, $P \leqslant Q$: $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(\underbrace{Q \setminus P}_{Q \wedge P^{\perp}})$

$Prob.Dist.(Events) := \{\forall$ вер. в/у $Events\}$.

Последна аксиома: States = Prob.Dist.(Events)

Основни модели: "чисто квантова крайна сист."

a) Хилбертови пр-ва (крайно-мерни)

$\mathcal{H}$ - комплексно вект. пр-во (над $\mathbb{C}$)

$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\phi, \psi) \mapsto \langle \phi | \psi \rangle$ - скаларно пр.

т.ч.: (ермитово) hermitian $\langle \phi | \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \rangle = \alpha_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + \alpha_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$ (лин.)

$\langle \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 | \psi \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle \phi_1 | \psi \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle \phi_2 | \psi \rangle$ (антилин.), $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$ (ермитова симетрия)

(Строга полож. дефинитност) $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$ и $\underbrace{\langle \phi | \phi \rangle}_{\|\phi\|^2} = 0 \iff \phi = 0$

$\|\phi\|^2$ – норма на ϕ

б) Първи сведения от теорията на хилб. пр.

– $\exists$ ортонорм. базис: $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{H}$ т. че. $\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk} := \begin{cases} 1 - & j = k \\ 0 - & j \neq k \end{cases}$

δ - символ на Кронекер Kroenecker

– $\forall \psi \in \mathcal{H} : \forall \phi = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \;\; \Big| \langle e_j \cdot$ ск. пр-е

$\Rightarrow \langle e_j | \phi \rangle = x_1 \underbrace{\langle e_j | e_1 \rangle}_{0} + \dots + x_j \underbrace{\langle e_j | e_j \rangle}_{1} + \dots (0) = x_j$

$\Rightarrow \phi = \langle e_1 | \phi \rangle e_1 + \dots + \langle e_n | \phi \rangle e_n$

Ако $\phi = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $\psi = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то

$\langle \phi | \psi \rangle = \bar{x}_1 y_1 \underbrace{\langle e_1 | e_1 \rangle}_{1} + \bar{x}_1 y_2 \underbrace{\langle e_1 | e_2 \rangle}_{0} + \dots = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$

– каноничен модел на n-мерно хилб. пр-во :

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

– Ортогонални допълнение: $\forall V \underset{\text{мн.}}{\subseteq} \mathcal{H} \quad \exists! W \underset{\text{мн.}}{\subseteq} \mathcal{H}$

т.че: $V \cap W = \{0\}$, $V \perp W$, т.е. $\forall \phi \in V, \psi \in W : \langle \phi | \psi \rangle = 0$

$\mathcal{H} = V + W := \{ \phi + \psi \mid \phi \in V, \psi \in W \}$, при това $\forall \theta = \phi + \psi$ – единствено разлагане

$\mathcal{H} = V \oplus W$, $\quad W := V^{\perp}$.

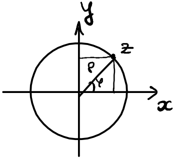
$\hookrightarrow \phi := P_V \theta$ – орт. проекция в/у V

в) Комплексни числа (преговор) $\mathbb{C} = \{ \overset{Re}{x} + i\overset{Im\text{ - части}}{y} \mid x, y \in \mathbb{R} \}, \ i^2 = -1$

$$(x+iy)(z+iw) \underset{\text{комутативно е}}{=} xz + xwi + zyi + yw\underbrace{i^2}_{-1} = xz - yw + (xw + yz)i$$

$\overline{x+iy} := x - iy$ – компл. спрягане : $\overline{(x+iy)}(x+iy) = x^2 + y^2 \geq 0$

$z \in \mathbb{C} : \ |z| := \sqrt{\bar{z} z}$ – модул



$z = \underset{\text{модул}}{\rho} e^{i\overset{\text{фаза}}{\varphi}}$ – полярно представяне

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – формула на Ойлер / Euler

$\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$, $z\bar{z} = \rho e^{i\varphi} \rho e^{-i\varphi} = \rho^2 e^{i\varphi - i\varphi} = \rho^2 = |z|^2$

Стигаме до модела: при зададено $\mathcal{H}$ - "пр-во на състоянията"

- $\mathrm{Events} := \mathcal{L}(\mathcal{H}) := \{V \mid V \underset{\text{мн.}}{\subseteq} \mathcal{H}\}$

това е г.н.м. $V \preccurlyeq W \underset{\text{опр.}}{\iff} V \subseteq W$ (като множества)

$\hat{0} = \{0\}$, $\hat{1} = \mathcal{H}$ - най-голям и най-малък ел.

$V \wedge W = V \cap W$ понеже сеч. е отново мн.

но $V \vee W \neq V \cup W$ - не винаги е мн.

$V \vee W = V + W$ - най-малкото $T \underset{\text{мн.}}{\subseteq} \mathcal{H}$, т.че $\begin{cases} V \subseteq T \\ W \subseteq T \end{cases}$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ не е дистрибутивна: Нека $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ – не колин.

$\theta = \phi + \psi$. Нека $V = \mathbb{C}\phi$, $W = \mathbb{C}\psi$, $T = \mathbb{C}\theta \neq V + W$ (!)

Тогава: $(V \vee W) \wedge T = (V + W) \cap T = T$ ✗

но $(V \wedge T) \vee (W \wedge T) = \underbrace{(V \cap T)}_{0} + \underbrace{(W \cap T)}_{0} = \hat{0}$.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ е орто-реш. : $V^\perp$

– всички зак. на кв. обжд. от. са изп. заедно с акс. за орто-мод. и зак. за покриването.

States := ProbDist.$(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ – завършва модела

Теорема За $\forall$ чисто със. ρ $\exists!$ едномерно $\mathbb{C}\psi \subseteq \mathcal{H}$.

и ако ψ - единичен ($\|\psi\| = 1$) то $\mathrm{Prob}_\rho(V) = \|P_V \psi\|^2$

До колко общ е този модел?