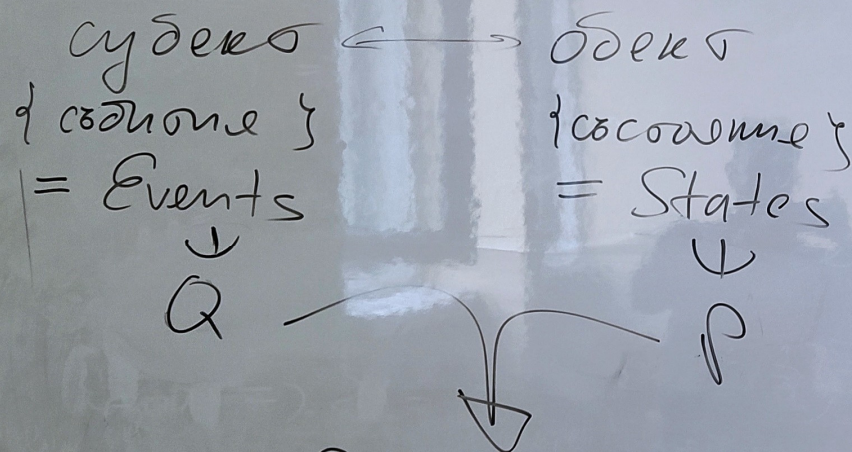


Аксиоми на квантовата теория

- квантово логически подход
- алгебричен подход



$\text{Prob}_P(Q) \in [0, 1]$
 - вероятное $\exists Q \in P$

$$\text{Prob}_P(Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ga в } N \text{ посл. опыта}}{N}$$

Эквивалентные квантовые системы
 (изоморфизм)

$$F: \text{Events}_1 \cong \text{Events}_2$$

$$G: \text{States}_1 \cong \text{States}_2$$

т.е.:

$$\text{Prob}_{G(P)}(F(Q)) = \text{Prob}_P(Q)$$

$$\forall P \in \text{States}_1, \forall Q \in \text{Events}_1$$

Аксиомы за. отгеммост.

$$\bullet \text{Prob}_p(Q_1) = \text{Prob}_p(Q_2) \text{ за } \forall p \in \text{States} \implies Q_1 = Q_2$$

$$\bullet \text{Prob}_{p_1}(Q) = \text{Prob}_{p_2}(Q) \text{ за } \forall Q \in \text{Events} \implies p_1 = p_2$$

определение
Обозначение: Если $p \in \text{States}$

$$p(Q) := \text{Prob}_p(Q), \text{ т.е. } p: \text{Events} \rightarrow [0, 1]$$

Аксиома за смесването:

$$\forall p_1, p_2 \in \text{States}, \forall q_1, q_2 \in [0, 1]$$

$$\text{т.е. } q_1 + q_2 = 1, \exists p \in \text{States}$$

$$\text{т.е. } \text{Prob}_p(Q) = q_1 \text{Prob}_{p_1}(Q) + q_2 \text{Prob}_{p_2}(Q) \quad \forall Q \in \text{Events}$$

$$(\Leftrightarrow p(Q) = q_1 p_1(Q) + q_2 p_2(Q))$$

$\Leftrightarrow$ като функции

$$p = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

Състоящото p се нарича смес на p_1 и p_2

с тегла q_1, q_2 (то е единственото опр. по акс. за смесването)

Интерпретации:

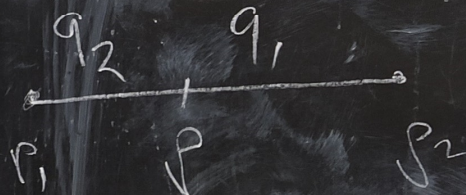
— статистически - вероятности ^{смес}
(несигурност в изготвянето)

— теоретична: това е изнъкване
мн. комбинации

Презовор от геометрията

$$V \ni p_1, p_2, q_1, q_2 \in [0, 1], \text{ т.е. } q_1 + q_2 = 1$$

$p = q_1 p_1 + q_2 p_2$ се нарича източкена комбинация на p_1 и p_2
с тегла q_1, q_2



Източкено множ. $S \subseteq V$ е такова, което с $\forall$ две точки съдържа и свързващата ги отсечка

Следствие S е източкено множ. във век. пр. $\{ \text{Events} \} \rightarrow \mathbb{R}$

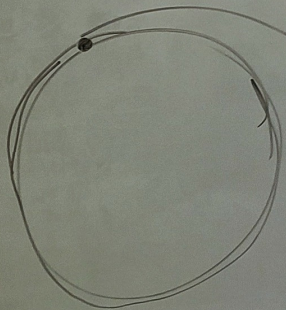
Опр. $S \subseteq V$ - век. пр., тогда $p \in S'$
 если карта экстремальна точке $p \in S$, то

$$p = q_1 p_1 + q_2 p_2, \text{ изм. комб. с } p_1, p_2 \in S$$

$$\Rightarrow \text{или } q_1 = 1 \quad (q_2 = 0, p = p_1)$$

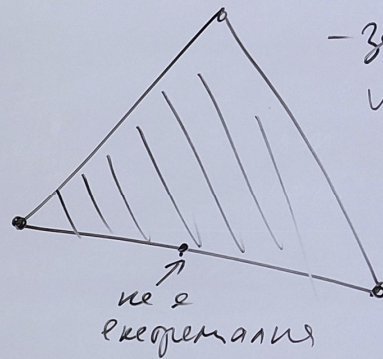
$$\text{или } q_1 = 0 \quad (q_2 = 1, p = p_2)$$

То есть, p не может быть выпр. точкой из S'



Вектор p не принадлежит к
 замкнутой выпуклой оболочке
 экстремалей.

convex combination



- замкнутая выпуклая
 оболочка S
 экстремальных
 точек
 - не выпуклая оболочка

Единственное, которое является экстремальной
 точкой из S' это чистые
 pure states

т.е. p есть чистое, оно не может быть
 представлено в неограниченном виде

Проверка по теории вероятностей

Крайко вероятности ир. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

$$p_1 + \dots + p_n = 1 \quad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ p_1, \dots, p_n \in [0, 1] \end{matrix}$$

вероятностно разпределение

$S \subseteq \Omega$ - событие

- аддитивность ако $S = S_1 \cup S_2$

$$P(S) = \sum_{j \in S} p_j \quad \begin{matrix} \text{вероятност} \\ \text{за } S \end{matrix}$$

тогава $P(S) = P(S_1) + P(S_2)$

$$p_i = P(\omega_i)$$

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

Виткание: $S = S_1 \cup S_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S' = S_1 \cup S_2 \\ \phi = S_1 \cap S_2 \end{cases}$$

— дизъюнктивно обединение

Условна вероятност (conditional prob.)

$$P(S' | Q) := \frac{P(S' \cap Q)}{P(Q)}$$

$$P(S \cap Q) = P(Q) P(S | Q)$$

$$\bar{P}(S') P(Q | S')$$

закон на Бейс (Bayes)

— изразаването на този закон в
квантовата теория ще отговаря
на некомпютрируемостта при

последователни измервания

probability mixture
Вероятности смеси

totals

-задача

$$\Omega = S_1 \cup S_2 \quad \text{II}$$

$$S' = (S_1 \cap S') \cup (S_2 \cap S')$$

$$= (S_1 \cup S_2) \cap S' = \Omega \cap S' = S'$$

$\cap = \emptyset$ because $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S') &= P(S_1 \cap S') + P(S_2 \cap S') \\ &= \underbrace{P(S_1)}_{q_1} \underbrace{P(S'|S_1)}_{p_1(S')} + \underbrace{P(S_2)}_{q_2} \underbrace{P(S'|S_2)}_{p_2(S')} \end{aligned}$$

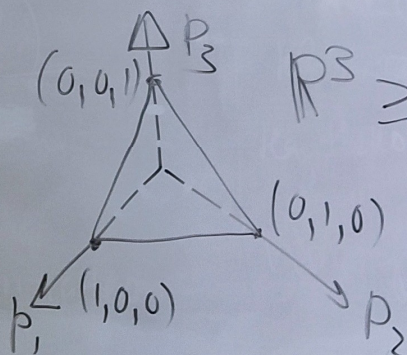
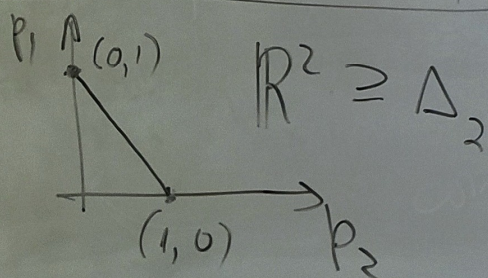
Определение Крайна класическа система - определена е от Ω -кр. множ.

Events $:= P(\Omega) :=$ множеството на всички подмнож. на Ω
power set / съвкупно множество

States $:=$ множеството на всички вероятностни разпределения в Ω

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \in [0, 1], p_1 + \dots + p_n = 1\} = \Delta_n$
- симплекс (n-симплекс) - то е изпъкнало множ.

• $(1) \in \mathbb{R}^1 - \Delta_1$



- призьватик

Δ_n е симплекс
тетраедър

Извад: Екстремалните точки на Δ_n са n
и те са вер. разпр. $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
— то, това са детерминистичните вер. разпр.
(вероятност = 0 или 1)

Така пишем $1-1$ отговори

Множество състояния $\longleftrightarrow$ едно-елем. подмножество $\{w, y\}$
= елем. събитие

Пример за еквивалентност на системи, при класическите

$$f: \Omega_2 \xrightarrow{\sim} \Omega_1, \quad F: \underbrace{P(\Omega_1)}_{\text{Events}_1} \xrightarrow{\sim} \underbrace{P(\Omega_2)}_{\text{Events}_2}$$

$$S = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_s}\} \subseteq \Omega_1, \quad F(S') := f^{-1}(S') = f^*(S')$$

$$F(S') = \{\omega_{f(j_1)}, \dots, \omega_{f(j_s)}\} \quad \text{— показва се то} \quad \underline{\text{pull-back}}$$

$$(p_1, \dots, p_n) \in \text{States},$$

$G(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n)$ като вер. разпр.
ако f прехвърля вероятността в Ω_2

$$\text{Prob}_{G(p)} F(Q) = \text{Prob}_p(Q)$$

почти сигурно

Логическа структура на възможности

а) Логическа поредба (максимална)

$$Q_1 \preceq Q_2 \iff \begin{cases} \text{Prob}_p(Q_1) = 1 \xrightarrow{\forall p} \text{Prob}_p(Q_2) = 1 \\ \text{Prob}_p(Q_2) = 0 \xrightarrow{\forall p} \text{Prob}_p(Q_1) = 0 \end{cases}$$

а) рефлексивна $Q \preceq Q$

б) транзитивност: $Q_1 \preceq Q_2, Q_2 \preceq Q_3 \Rightarrow Q_1 \preceq Q_3$

в) антисиметрия: $Q_1 \preceq Q_2 \text{ и } Q_2 \preceq Q_1 \Rightarrow Q_1 = Q_2$ — аксиома

Свойство: Events е частично наредено множество (Ч.Н.М.)
partially ordered set = poset

Точки долне и горна граници:

inf sup

$S' \subseteq \text{Events}$, $\inf(S') = Q$ т.е.: $\forall Q' \in S': Q \preceq Q'$

Sup е глобально maximum

ако Q'' е т.е.: $Q'' \preceq Q' \forall Q' \in S'$
тогава $Q'' \preceq Q$

$\sup(S') = Q$ т.е.: $\forall Q' \in S': Q' \preceq Q$

$\forall Q''$ т.е. $Q \preceq Q'' \forall Q' \in S' \Rightarrow Q \preceq Q''$

Аксиома: В Events обхващуват $\inf$ & $\sup$
за произволни множества

Матем. теория: Решетка (Lattice / order /
е т.н.м., в която за $\forall$ крайно множество S'
 $\exists \sup, \exists \inf$.

Ако за $\forall S \exists \sup, \inf$ — complete
— всички решетки

Забележка: Доказва се, че $\sup$ и $\inf$ ако $\exists$ а ефиксивни

Определение: $S' = \{Q_1, Q_2\}$, $\sup \{Q_1, Q_2\} = Q_1 \vee Q_2$

— решетъчно обединение, join

$\inf \{Q_1, Q_2\} = Q_1 \wedge Q_2$ — решетъчно сечение, meet

$\wedge$ = кв. лог. "и", $\vee$ = кв. лог. "или"

Забележка: Доказва се, че

$$\begin{array}{ccccccc} \vee \{Q_1, \dots, Q_n\} & \equiv & \sup \{Q_1, \dots, Q_n\} & = & (\vee \{Q_1, \dots, Q_{n-1}\}) & \vee & Q_n \\ \uparrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \wedge & & \inf & & \wedge & & \wedge \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{— асоциативна} \\ \text{бинарна операция} \end{array}$$

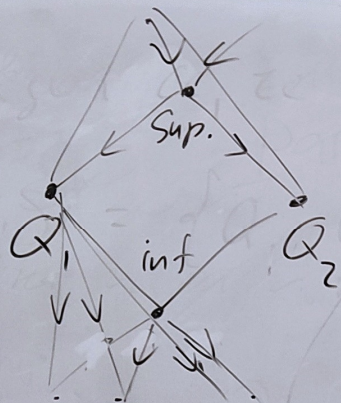
Unregelmäßige: sprunghaft - anomale

$\forall Q \in \text{Events} \quad \exists Q' \in \text{Events}$

$$\text{Prob}_p(Q) = 1 \xLeftrightarrow{\forall p} \text{Prob}_p(Q') = 0$$

$$\text{Prob}_p(Q) = 0 \xLeftrightarrow{\forall p} \text{Prob}_p(Q') = 1$$

Зад.



Диаграммы не Хассе

$P\{1,2,3\}$

уровень 3

$\{1,2,3\}$

уровень 2

$\{1,2\}$

$\{1,3\}$

$\{2,3\}$

уровень 1

$\{1\}$

$\{2\}$

$\{3\}$

уровень 0

$\emptyset$

$\sup \emptyset = ? = 0$

$\inf \emptyset = ? = 1$

Нуль и единица в г.ч.м.

0 = минимальный элемент (если есть)

1 = максимальный элемент (если есть)

(Аксиомы) Events имеют 0 и 1

Зад.: В полной решетке T , $\sup T = 1$, $\inf T = 0$

Квантово отрицательно (propositional) сматане

асоциативност $P \wedge (Q \wedge S) = (P \wedge Q) \wedge S$
 $\wedge \leftrightarrow \vee$

коммутативност: $P \wedge Q = Q \wedge P$ (обичајно $\wedge \leftrightarrow \vee$)

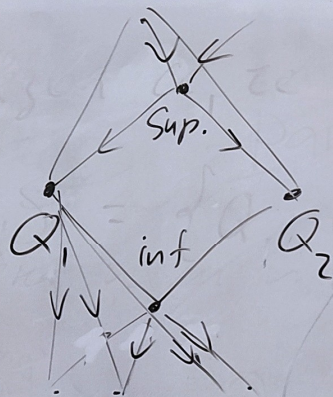
поглупување: $P \vee (P \wedge Q) = P$ $\wedge \leftrightarrow \vee$

идемпотентност: $P \wedge P = P$ $\wedge \leftrightarrow \vee$

наредба $P \wedge Q = P \Leftrightarrow P \leq Q$ ($\wedge \leftrightarrow \vee$, $\leq \leftrightarrow \geq$)

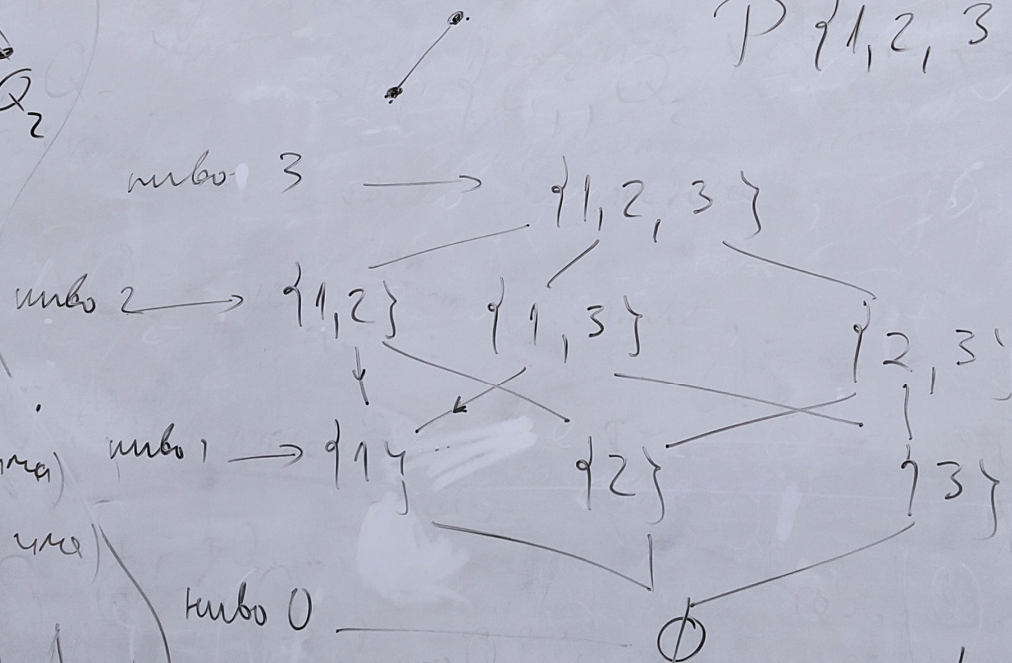
не $P = P^\perp$ $P^\perp^\perp = P$, $(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp$ $\wedge \leftrightarrow \vee$

Зад.



Диаграммы на Хассе

$P \{1, 2, 3\}$



Нуль и единица в т.ч.м.

0 = минимальный элемент (если есть)

1 = максимальный элемент (если есть)

(Аксиомы) Events имеют 0 и 1

Зад.: В полном решетке T , $\sup T = 1$, $\inf T = 0$

$\sup \emptyset = ? = 0$

$\inf \emptyset = ? = 1$

Квантово отрицательно (propositional) сматане

асоциативност $P \wedge (Q \wedge S) = (P \wedge Q) \wedge S$

$$\wedge \leftrightarrow \vee$$

коммутативност: $P \wedge Q = Q \wedge P$ (изговор: $\wedge \leftrightarrow \vee$)

поглощение: $P \vee (P \wedge Q) = P$ $\wedge \leftrightarrow \vee$

идемпотент: $P \wedge P = P$ $\wedge \leftrightarrow \vee$

порядок: $P \wedge Q = P \Leftrightarrow P \leq Q$ ($\wedge \leftrightarrow \vee$, $\leq \leftrightarrow \geq$)

не $P = P^\perp$ $P^\perp^\perp = P$, $(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp$ $\wedge \leftrightarrow \vee$ De Morgan