КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 1 / 10.10.2022,   версия 0

Започваме с **увод**, който не е необходима логическа част от изложението на този курс от лекции.

Ще представим някои ключови физически експерименти, които са придружени от кратки сведения за използваните в тях физически явления.

В курса обаче няма да се предполагат, нито да се въвеждат някакви понятия и знания от физиката, собствено за излагането на квантовата информатика.

Необходимата начална подготовка включва единствено базисни знания от линейната алгебра (и аналитична геометрия).

В изложението се използва и началната теория на вероятностите, която се отнася до крайни вероятностни разпределения и е предмет на изучаване още в училищното образование.


Теоретична квантова физика
Алгебра
Експериментална и инженерна квантова физика
Квантова информатика
Компютърни науки
Вероятности и статистика
Математическа логика и теория на алгоритмите

УВОД

Квантови свойства, квантови събития, квантови множества

В класическата физика (физиката до XX век) всяка физична система се описва с множество:
множество на (елементарните) състояния на системата Ω.

Различните свойства на системата съответстват на подмножества $A \subseteq \Omega$:

Така, свойство = (под)множество
и те са синонимни изрази в този контекст.

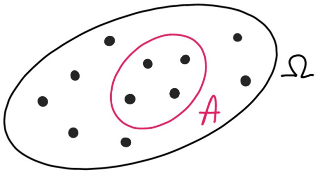
Различните свойства на системата съответстват на подмножества $A \subseteq \Omega$:

Така, свойство = (под)множество
и те са синонимни изрази в този контекст.

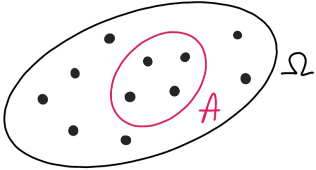
В контекста на теория на вероятностите множеството Ω се нарича също *множество на елементарните събития*, а подмножествата $A \subseteq \Omega$ се наричат *събития*.

И така, ние ще използваме като синоними "събитие" = "(под)множество" (= "свойство").

Различните свойства на системата съответстват на подмножества $A \subseteq \Omega$:



Множество на елементарните събития Ω и отделяне на свойство "A", като подмножество на Ω.



Множество на елементарните събития Ω и отделяне на свойство “A”, като подмножество на Ω.

Свойствата могат да се комбинират чрез логическите връзки “***и***” и “***или***”, които на езика на подмножествата отговарят на операциите *сечение* $\cap$ и *обединение* $\cup$:

$$A\,\textit{\textbf{и}}\,B \quad \longleftrightarrow \quad A \cap B\,,$$

$$A\,\textit{\textbf{или}}\,B \quad \longleftrightarrow \quad A \cup B\,.$$

Квантов феномен 1: некомутативност на наблюденията

В класическата физика и статистика, в едно множество Ω можем да отделим последователно две събития $A, B \subseteq \Omega$ (т.е. подмножества, свойства) по два равносилни начина:

(1) $\Omega \rightsquigarrow A \rightsquigarrow A$ **и** B,

(2) $\Omega \rightsquigarrow B \rightsquigarrow B$ **и** A.

Количествена илюстрация на класическата еквивалентност –

ако означим:

$$\begin{aligned} N(\Omega) &:= \text{ брой на елементи на } \Omega \\ N(A) &:= \text{ брой на елементи на } A \\ N(A \,\textit{и}\, B) &:= \text{ брой на елементи на } A \,\textit{и}\, B \end{aligned}$$

то тъждеството:

$$\underbrace{\frac{N(A \,\textit{и}\, B)}{N(\Omega)}}_{\substack{\text{относителен} \\ \text{дял на } A \textit{ и } B \\ \text{в } \Omega}} = \underbrace{\frac{N(A)}{N(\Omega)}}_{\substack{\text{относителен} \\ \text{дял на } A \\ \text{в } \Omega}} \cdot \underbrace{\frac{N(A \,\textit{и}\, B)}{N(A)}}_{\substack{\text{относителен} \\ \text{дял на } B \\ \text{в } A}}$$

Количествена илюстрация на класическата еквивалентност

ако означим:

$$N(\Omega) := \text{брой на елементи на } \Omega$$

$$N(A) := \text{брой на елементи на } A$$

$$N(A \text{ и } B) := \text{брой на елементи на } A \text{ и } B$$

то тъждеството:

$$\underbrace{\frac{N(A \text{ и } B)}{N(\Omega)}}_{\substack{\text{относителен} \\ \text{дял на } A \text{ и } B \\ \text{в } \Omega}} = \underbrace{\frac{N(A)}{N(\Omega)}}_{\substack{\text{относителен} \\ \text{дял на } A \\ \text{в } \Omega}} \cdot \underbrace{\frac{N(A \text{ и } B)}{N(A)}}_{\substack{\text{относителен} \\ \text{дял на } B \\ \text{в } A}}$$

съответства на вероятностния закон:

$$\underbrace{p(A \text{ и } B)}_{\substack{\text{вероятност} \\ \text{за } A \text{ и } B}} = \underbrace{p(A)}_{\substack{\text{вероятност} \\ \text{за } A}} \cdot \underbrace{p(B|A)}_{\substack{\text{условна} \\ \text{вероятност} \\ \text{за } B \text{ при} \\ \text{условие } A}}$$

(което е всъщност е определението за *условна вероятност*).

Тогава, равенството

$$N(A\,\textit{и}\,B) = N(B\,\textit{и}\,A)$$

се изразява във вероятностния закон

$$p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B),$$

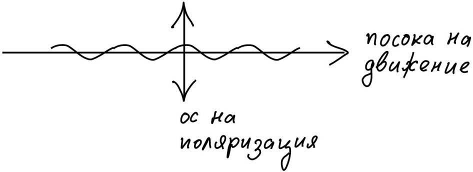
който се нарича *закон на Бейс* (Bayes' law / theorem).

Той се нарушава се в квантовата физика (и статистиката) и условната вероятност става първичен обект.

Илюстрация на това нарушение дава така наречения:

Експеримент с *кръстосани поляризатори*[1]

Извършва се с *фотони* - частици “пренасящи” светлината.

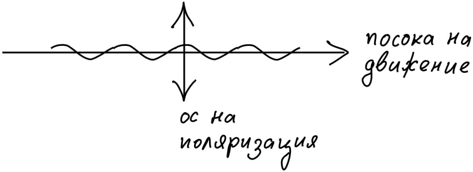


Състоянието на един фотон се описва от една наредена тройка (посока на движение, енергия, вътрешно състояние). Вътрешното състояние на фотона съответства на така наречената *поляризация* на фотона.

[1] crossed polarizer experiment

Експеримент с *кръстосани поляризатори*

Извършва се с *фотони* - частици "пренасящи" светлината.

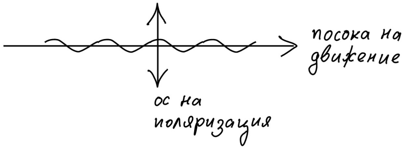


Състоянието на един фотон се описва от една наредена тройка (посока на движение, енергия, вътрешно състояние). Вътрешното състояние на фотона съответства на така наречената *поляризация* на фотона.

Поляризационните състояния са същите, като състоянията на най-простата квантова система наречена "*квантов бит*". В описания експеримент се използват само фотони със специален тип вътрешни състояния: те се наричат линейни поляризации. Състояние на *линейна поляризация се характеризира с ос, която е перпендикулярна на посоката на движение на фотона.*

Експеримент с *кръстосани поляризатори*

Извършва се с *фотони* - частици "пренасящи" светлината.

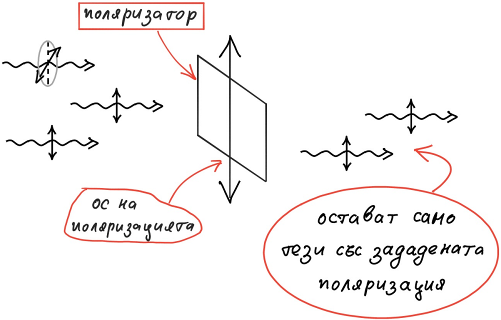


Така, ако група фотони се разпространяват в една и съща посока, то от тях може да бъде отделено подмножество, които имат еднаква "линейна поляризация" – вид "свойство".

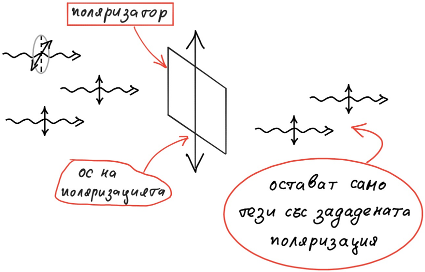
Отделянето на фотони с фиксирана линейна поляризация се извършва чрез филтри, наречени *поляризатори*.

Експеримент с *кръстосани поляризатори*

Експериментът започва със селекция на фотони с фиксирана поляризация:



Експеримент с *кръстосани поляризатори*



Ако сега поставим втори поляризатор след първия, който е идентичен, тогава всички фотони, които са преминали през първия, ще преминат и през втория.

Фотони ще продължават да преминават дори и ако завъртим оста на поляризация на втория поляризатор на ъгъл α спрямо първия.

Преминава обаче само част $\cos^2\alpha$ ($\in [0, 1]$) от фотоните.

Експеримент с *кръстосани поляризатори*

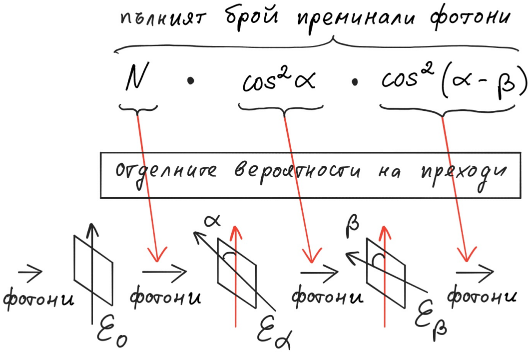
Важно е да се отбележи, че ние може да пускаме фотоните един по един и в този случай един фотон преминава или напълно не преминава през всеки поляризатор.

Числото $\cos^2\alpha$ в този случай представлява *вероятността* за преминаване на фотон през втория поляризатор след, като е бил пропуснат от първия.

Експеримент с *кръстосани поляризатори*

Нека сега допълним опита и с трети поляризатор:

Статистика на преминалите фотони през два последователни поляризатора след първоначалната селекция



Експеримент с *кръстосани поляризатори*

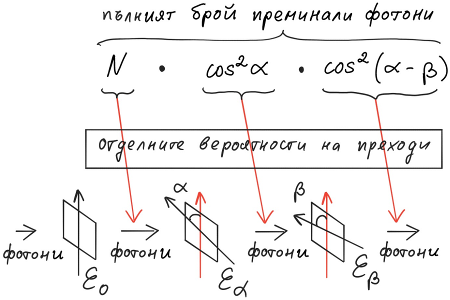
Ако сравним резултатите при размяната $\alpha \leftrightarrow \beta$, то ще получим:

$$\begin{aligned} & N \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2(\alpha - \beta) \\ & \stackrel{?}{=} N \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Следователно е разлика възможна, например при $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 90^\circ$:

$$\underbrace{N(\text{“}A \text{ и } B\text{”})}_{N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \neq \underbrace{N(\text{“}B \text{ и } A\text{”})}_{N \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}} .$$

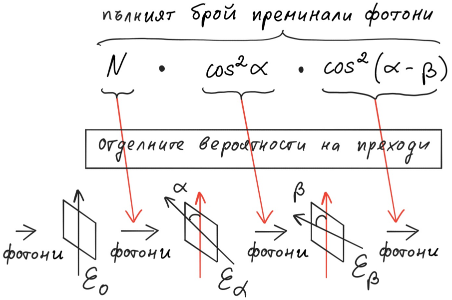
Експеримент с *кръстосани поляризатори*



В разгледания експеримент, свойството (събитието) A отговаря на поляризация под ъгъл α ($\mathcal{E}_\alpha$), а B на поляризация под ъгъл β.

В частност виждаме, че поляризациите под ъгъл 0° и 90° отговарят на взаимно изключващи се събития (свойства), но ако между тях стои поляризатор $\mathcal{E}_{45^\circ}$ под ъгъл 45°, то прехода между $\mathcal{E}_{0^\circ}$ и $\mathcal{E}_{90^\circ}$ става възможен!

Експеримент с *кръстосани поляризатори*



Нека обърнем внимание, че в някои от формулите по-горе сме поставили в кавички "A **и** B", понеже броя нито в лявата страна, нито в дясната има смисъл на брой на обектите със свойство A **и** B.

В квантовата логика, която ще споменем след малко, се оказва, че логическите операции остават комутативни и в горния експеримент събитието A **и** B се оказва нулевото събитие (т.е., празното или още, невъзможното събитие).

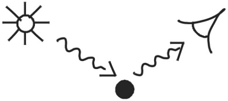
По определение, две квантови събития A и B, за които винаги е изпълнен закона на Бейс

$$p(A)\,p(B\,\big|\,A) \;=\; p(B)\,p(A\,\big|\,B)$$

се наричат *взаимно комутиращи* или също *съвместно проверяеми* (*съвместно измерими*).

По такъв начин, квантовата теория допуска, че има събития които ***не могат*** съвместно да се проверяват (измерват) – това именно наблюдаваме в представения по-горе квантов феномен 1.

Физическото обяснение на квантовия феномен 1 е, че всяко наблюдение и измерване в природата е активен процес.



То е свързано с неотстранимо смущение върху наблюдавания обект и това смущение има минимален праг, който се нарича "елементарна порция / квант (quantum) на действието".

Квантово-логическите операции и тяхната недистрибутивност

Квантовите свойства, както и класическите свойства се намират в отношение (релация) на *мажориране*:

това изразяваме с израза "*свойство* A *влече свойство* B.

На езика на множествата:

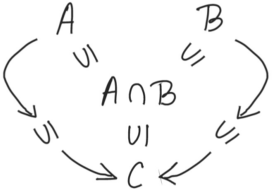
$$A \subseteq B$$

(A е подмножество /включва се/ в B).

Това води до т.нар. **квантово–логически подход** към обосноваването (аксиоматизацията) на квантовата теория.

В основата му стои предположението, че множеството на квантовите събития е **частично наредено множество**.

Това поражда по-нататък логически операции



Логическите операции при тази конструкция остават винаги комутативни:

$$A \text{ и } B = B \text{ и } A, \quad A \text{ или } B = B \text{ или } A.$$

При квантовите системи обаче условната вероятност:

$$p(B \mid A) \neq \frac{p(A \text{ и } B)}{p(A)},$$

тъй като в противен случай, както видяхме, няма да се нарушава закона на Бейс. Защо?

Условните вероятности, както и пълните вероятности трябва да изпълняват *адитивния закон*:

$$p\,((A\,\textbf{или}\,B)\;|\,C) \;=\; p(A\,|\,C) + p(B\,|\,C)\,, \qquad (*)$$

$$p(A\,\textbf{или}\,B) \;=\; p(A) + p(B)\,, \qquad (**)$$

ако $A\,\textbf{и}\,B = \emptyset$ – празното (невъзможното) събитие.

От закона на Бейс би следвало $(**) \Longrightarrow (*)$, ако е в сила

$$(A\,\textbf{или}\,B)\,\textbf{и}\,C \;=\; (A\,\textbf{и}\,C)\,\textbf{или}\;(B\,\textbf{и}\,C) \quad (\textit{дистрибутивност})$$

В квантови системи дистрибутивните закони се нарушават:

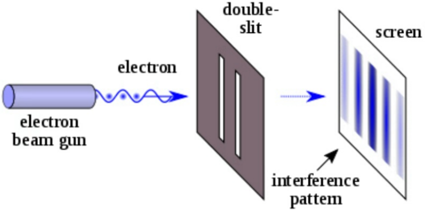
имаме, $$(A \text{ или } B) \text{ и } C \neq (A \text{ и } C) \text{ или } (B \text{ и } C) \,,$$
$$(A \text{ и } B) \text{ или } C \neq (A \text{ или } C) \text{ и } (B \text{ или } C) \,.$$

Това следва от:

Квантов феномен 2: интерференция на вероятността

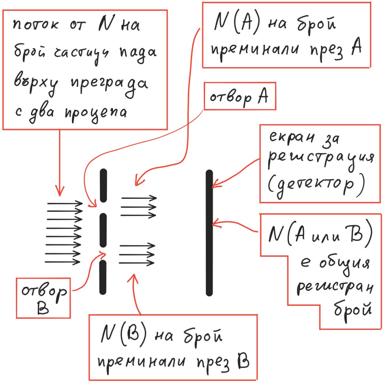
Експеримент с *двоен процеп*[2]

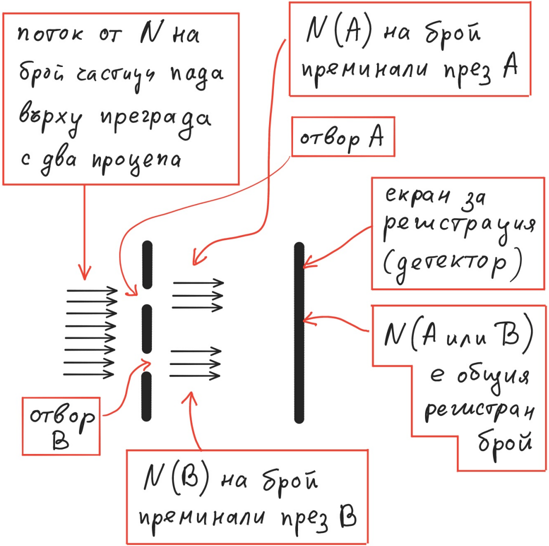
Опитната постановка в реалистичен вид



[2]double-slit experiment

Експеримент с *двоен процеп*



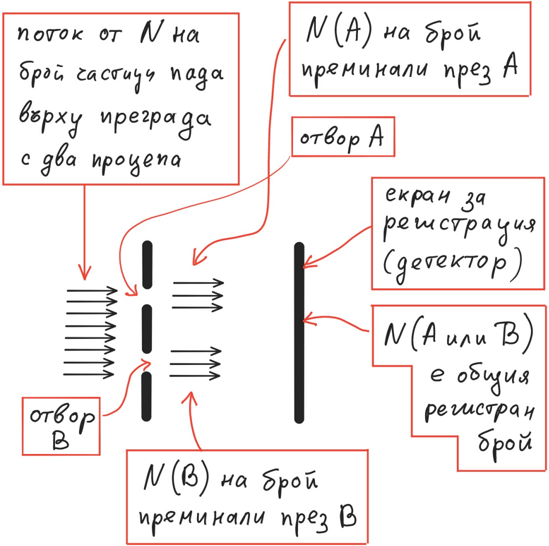


Случай (1): изследва се общото количество на преминалите частици:

(1_A) отворен е само процеп A, при което определяме $N(A)$;

(1_B) отворен е само процеп B, при което определяме $N(B)$;

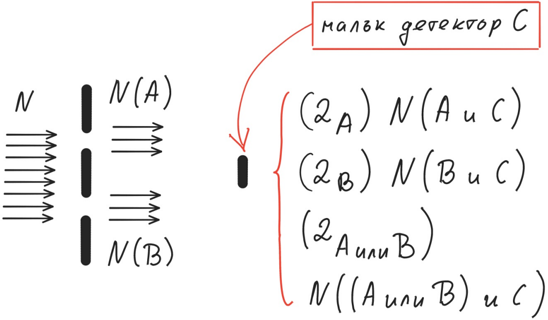
($1_{A \text{ или } B}$) отворени са A и B, т.е. всяка частица преминава през A или B и следователно, така определяме $N(A \text{ или } B)$.



Случай (1): изследва се общото количество на преминалите частици.

Резултат:

$$N(A\,\textit{или}\,B) = N(A) + N(B).$$

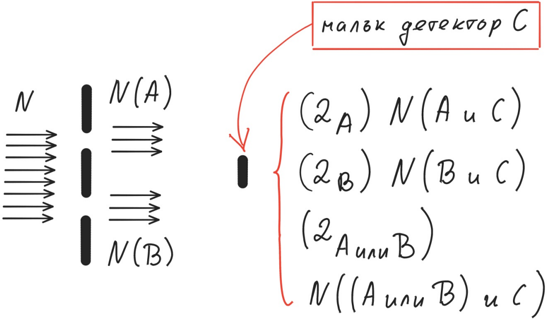


Случай (2): зад процепите е поставен малък екран (детектор) C:

(2_A) отворен е само процеп A. В C се регистрират $N(A$ ***и*** $C)$ на брой частици.

(2_B) отворен е само процеп B. В C се регистрират $N(B$ ***и*** $C)$ на брой частици.

$(2_{A\text{ или }B})$ отворени са A и B.
В C се регистрират $N\left((A\text{ или }B)\text{ и }C\right)$ на брой частици.



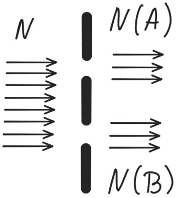
Случай (2): зад процепите е поставен малък екран (детектор) C:

Резултат:

$$N\big((A\, \textit{или} B)\, \textit{и}\, C\big)$$
$$\neq N(A\, \textit{и} C)$$
$$+ N(B\, \textit{и} C).$$

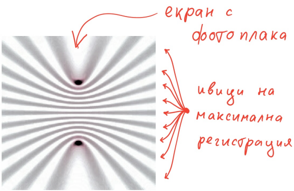
Случай (2): зад процепите е поставен малък екран (детектор) C:

Резултат:

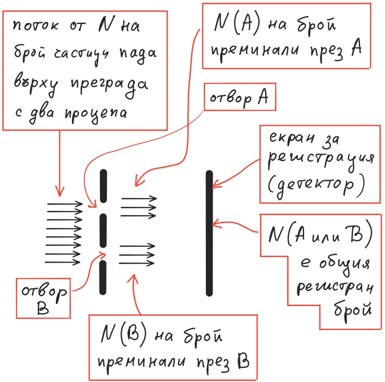


$\boxed{\text{малък детектор } C}$

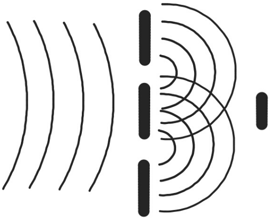
$$\left\{\begin{array}{l} (2_A)\ N(A \text{ и } C) \\ (2_B)\ N(B \text{ и } C) \\ (2_{A \text{ или } B}) \\ N((A \text{ или } B) \text{ и } C) \end{array}\right.$$



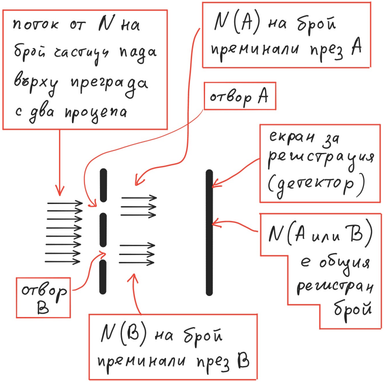
Експеримент с *двоен процеп*



Първи опит за интерпретация: имаме работа не с частици, а с вълни, и наблюдаваме явлението *интерференция*

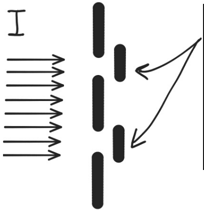


Експеримент с *двоен процеп*



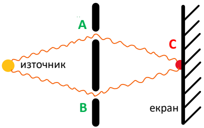
Първи опит за интерпретация: имаме работа не с частици, а с вълни, и наблюдаваме явлението *интерференция*

Опровергава се от:



Опита с индивидуална регистрация пред всеки процеп: той показва, че всяка частица преминава през точно един от процепите.

Експеримент с *двоен процеп*



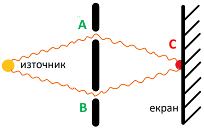
И така, констатирахме, че за една частица

да премине през A и да попадне в C
или да премине през B и да попадне в C

не е същото, като

да премине без проследяване през
A или B и да попадне в C.

Експеримент с *двоен процеп*



$$\left(\left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \text{преминава}\\ \text{през } A\end{matrix}\right) \text{ и } \left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \text{пристига}\\ \text{в } C\end{matrix}\right)\right) \text{ или } \left(\left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \text{преминава}\\ \text{през } B\end{matrix}\right) \text{ и } \left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \text{пристига}\\ \text{в } C\end{matrix}\right)\right)$$

$$\neq \left(\left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \text{преминава}\\ \text{през } A\end{matrix}\right) \text{ или } \left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \textit{преминава}\\ \text{през } B\end{matrix}\right)\right) \text{ и } \left(\begin{matrix}\text{Частицата}\\ \text{пристига}\\ \text{в } C\end{matrix}\right)$$

Констатирахме нарушение на дистрибутивността при квантовите събития:

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup C\,,$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap C\,,$$

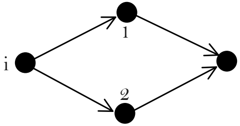
спрямо логическите операции произтичащи от подредба им.

Амплитуди вместо вероятности

Експериментът по-горе в малко по-абстрактен вариант:

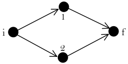
преход на система между две състояния,
начално "i" (initial) и крайно "f" (final), през
две алтернативни междинни състояния: "1" и "2".

Два канала за преход:

$\mathrm{i} \to 1 \to \mathrm{f}$ и $\mathrm{i} \to 2 \to \mathrm{f}$: 

.

Два канала за преход: i → 1 → f и i → 2 → f:

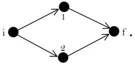


В класическата статистика, ако вероятностите за преходи i → 1, i → 2, 1 → f и 2 → f са $p_{\mathrm{i},1}$, $p_{\mathrm{i},2}$, $p_{1,\mathrm{f}}$ и $p_{2,\mathrm{f}}$, съответно, то прехода i → f се извършва с вероятност

$$p_{\mathrm{i,f}} = p_{\mathrm{i},1}\, p_{1,\mathrm{f}} + p_{\mathrm{i},2}\, p_{2,\mathrm{f}}$$

В този случай обаче не се наблюдава “интерференцията” (т.е., погасяването) на вероятността от експеримента по-горе.

Два канала за преход: $\mathrm{i} \to 1 \to \mathrm{f}$ и $\mathrm{i} \to 2 \to \mathrm{f}$:



Оказва се, че в квантовата статистика, заедно с вероятностите за преход $p_{\mathrm{i},1}$, $p_{\mathrm{i},2}$, $p_{1,\mathrm{f}}$ и $p_{2,\mathrm{f}}$, са определени и *комплексни числа* $a_{\mathrm{i},1}$, $a_{\mathrm{i},2}$, $a_{1,\mathrm{f}}$ и $a_{2,\mathrm{f}}$, за които

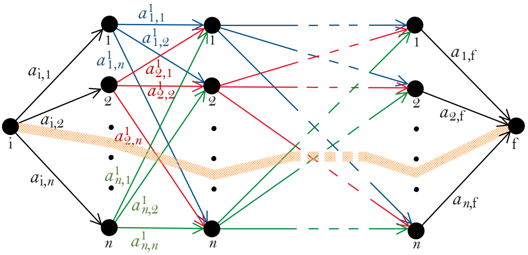
$$a_{\mathrm{i},\mathrm{f}} = a_{\mathrm{i},1}\, a_{1,\mathrm{f}} + a_{\mathrm{i},2}\, a_{2,\mathrm{f}}$$

които са свързани с отношенията

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{i},1} &= \left|a_{\mathrm{i},1}\right|^2, \quad p_{\mathrm{i},2} = \left|a_{\mathrm{i},2}\right|^2, \\ p_{1,\mathrm{f}} &= \left|a_{1,\mathrm{f}}\right|^2, \quad p_{2,\mathrm{f}} = \left|a_{2,\mathrm{f}}\right|^2, \quad p_{\mathrm{i},\mathrm{f}} = \left|a_{\mathrm{i},\mathrm{f}}\right|^2 . \end{aligned}$$

Наричат се: *амплитуди на вероятността.*

В по-обща ситуация, прехода i → f може се извърши през n алтернативни междинни състояния на k брой стъпки:



В определени условия, наречени във физиката “класическа граница” амплитудите на повечето пътища се погасяват взаимно и остава един доминиращ път – оцветения с плътна оранжева линия – това е “класическата траектория” на системата.

Други теми от курса:

- Квантови изчисления.
- Квантова логика и квантови категории.
- Неотстраним индетерминизъм на наблюденията върху квантовите системи.
- Квантово сплитане и неговите приложения.


Теоретична квантова физика
Алгебра
Експериментална и инженерна квантова физика
Квантова информатика
Компютърни науки
Вероятности и статистика
Математическа логика и теория на алгоритмите