

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 2 / 17.10.2022, версия 1

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

аксиоматични аксиома- тични раздели	аксиоматични подходи	квантово-логически аксиоматичен подход	алгебричен аксиоматичен подход
аксиоми на обща системи		лекции 2-4	лекции 5-7
аксиоми на съставни системи		_____	лекция 8
квантови трансформации		_____	лекция 9

Исторически бележки

Квантовата механика и физика се оформя през първите три десетилетия на XX век.



Max Planck (1858 – 1947)

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Началото бележи откриването през 1900 на “елементарната порция на действието”
= “кванта на действието”
= “константата на Планк h ”.

През първите две десетилетия прилича повече на “астрология”.

Исторически бележки

Завършващ период – средата на 30те години на XX век.



Werner Heisenberg
(1901 – 1976)

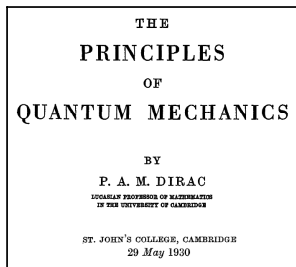


Откривателите на съвместната
неизмеримост и некомутатив-
ното произведение.

Финалът: 1928 – 1930



Paul Dirac
(1902 - 1984)



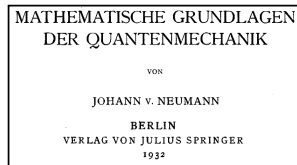
В книгата се въвежда т.нар. алгебра на наблюдаемите (“q-числа” по израза на Дирак).

Математическо обосноваване и аксиоматизация:

1932 – 1934 – 1936



John von Neumann (1903 – 1957)



В книгата се изгражда строго стандартния формализъм на квантовата механика.

Това е операторния формализъм над хилбертови пространства, който следва от аксиомите на алгебричния подход.

Математическо обосноваване и аксиоматизация:

1932 – 1934 – 1936

**ON AN ALGEBRAIC GENERALIZATION OF THE QUANTUM
MECHANICAL FORMALISM**

BY P. JORDAN, J. v. NEUMANN, AND E. WIGNER

(Received November 10, 1933)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 35, No. 1, January, 1934

Статията, която обобщава и завършва алгебричния подход.

Математическо обосноваване и аксиоматизация:

1932 – 1934 – 1936

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

Статията, която въвежда квантово-логическия подход: максималното аксиоматично обобщение на квантовата теория, известно днес.

Математическо обосноваване и аксиоматизация:

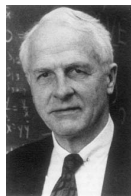
1932 – 1934 – 1936



Pascual Jordan
(1902 – 1980)



Eugene Wigner
(1902 – 1995)



Garrett Birkhoff
(1911 – 1996)

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности:

Events – множество на събитията,

States – множество на състоянията.

Заедно с това ще ни бъде определена и функция:

$$\begin{aligned} Prob : Events \times States &\rightarrow [0, 1] \\ (Q, \rho) &\mapsto Prob_{\rho}(Q) (\equiv Prob_{\rho}(Q)), \end{aligned}$$

което се нарича **вероятност за настъпване (регистриране) на събитието Q в състояние ρ .**

Накратко казваме: “зададена статистическа система от данни:

$$(Events, States, Prob : Events \times States \rightarrow [0, 1]).”$$

Определение на статистическа система:

$$(\mathcal{E}vents, \mathcal{S}tates, Prob).$$

Множествата $\mathcal{E}vents$ и $\mathcal{S}tates$, заедно с функцията $Prob$ ще бъдат структурно-определящите данни.

Заедно с това, понятията “събитие” и “състояние” ще са всичките първични понятия.

По-нататък ще определим, като вторични понятия:

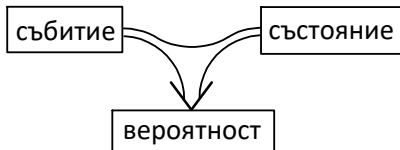
“логическата наредба и операции над събитията”, “елементарни събития”, “чисти / смесени състояния”, “експеримент”, “подсистема / надсистема”, “съвместна измеримост” и др.

Аксиоми на общи системи – начална постановка

Определение на статистическа система:

$(Events, States, Prob)$.

Илюстративна схема:

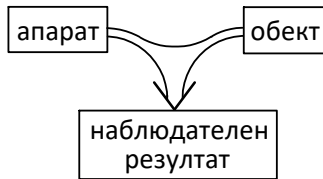


Аксиоми на общи системи – начална постановка

Определение на статистическа система:

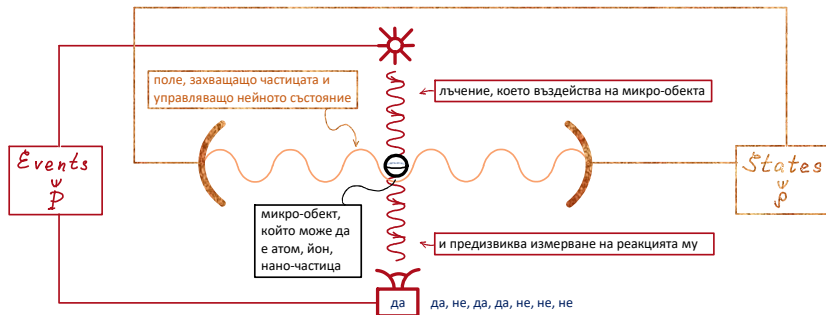
$(\mathcal{E}vents, \mathcal{S}tates, Prob)$.

Илюстративна схема:



Обръщаме внимание: квантовата теория описва взаимоотношението между “субект” (напр., апарат за наблюдение или цяла експериментална установка) И “обект” (напр., изследвания / наблюдавания обект), без да отстранява “субекта”.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



$$\text{Prob}_{\phi} P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Аксиоми на общи системи

Еднаквост (еквивалентност / изоморфност) на статистически системи:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{E}vents_1, \mathcal{S}tates_1, Prob_1 : \mathcal{E}vents_1 \times \mathcal{S}tates_1 \rightarrow [0, 1]), \\ &(\mathcal{E}vents_2, \mathcal{S}tates_2, Prob_2 : \mathcal{E}vents_2 \times \mathcal{S}tates_2 \rightarrow [0, 1]). \end{aligned}$$

Наричат се **еквивалентни** (изоморфни), ако са зададени биекции

$$\begin{aligned} F : \mathcal{E}vents_1 &\cong \mathcal{E}vents_2, \\ G : \mathcal{S}tates_1 &\cong \mathcal{S}tates_2, \end{aligned}$$

такива че

$$Prob_{G(\rho)}(F(Q)) = Prob_{\rho}(Q),$$

за всеки $Q \in \mathcal{E}vents_1$ и $\rho \in \mathcal{S}tates_1$.

Аксиоми на общи системи – еднаквост на статистически системи

Значение на аксиомата за еднаквост на статистически системи:
пълното описание на системата трябва да следва единствено от информацията, съдържаща се в задаването на тройката

$$(\mathcal{E}vents, \mathcal{S}tates, Prob : \mathcal{E}vents \times \mathcal{S}tates \rightarrow [0, 1]) .$$

Аксиоми на общи системи

Аксиоми за отделимост. Нека е зададена статистическа система

$$(\mathcal{Events}, \mathcal{States}, Prob : \mathcal{Events} \times \mathcal{States} \rightarrow [0, 1]).$$

- За всеки две състояния $\rho, \sigma \in \mathcal{States}$,
ако $Prob_{\rho}(Q) = Prob_{\sigma}(Q)$ при всяко събитие $Q \in \mathcal{Events}$,
то $\rho = \sigma$.
- За всеки две събития $P, Q \in \mathcal{Events}$,
ако $Prob_{\rho}(P) = Prob_{\rho}(Q)$ при всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$,
то $P = Q$.

Съгласно първата от горните аксиоми ние отъждествяваме две състояния, ако при всеки експеримент те водят до еднакви наблюдателни резултати. Втората аксиома привежда същия принцип спрямо събитията.

Аксиоми на общи системи

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

От първата от аксиомите за отделимост следва, че ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията $\mathcal{Events}$* .

За едно състояние $\rho \in \mathcal{States}$ ще пишем

$$\rho(Q) := \text{Prob}_\rho(Q)$$

Така, ρ става функция

$$\rho : \mathcal{Events} \rightarrow [0, 1] : Q \mapsto \rho(Q)$$

Нека подчертаем обаче, че далеч не всяка функция $\mathcal{Events} \rightarrow [0, 1]$ идва от състояние.

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathcal{E}vents, \mathcal{S}tates, Prob)$$

и произволни нейни състояния $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}tates$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0, 1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathcal{S}tates$, такова че

$$Prob_{\rho}(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathcal{E}vents$.

От първата аксиома за отделимост следва, че горното ρ е единствено.

Състоянието ρ се нарича **смес на ρ_1 и ρ_2 с тегла q_1 и q_2** .

Еквивалентно условие: $\rho(P) = q_1 \rho_1(P) + q_2 \rho_2(P)$.

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Аксиома за смесване на състояния – след итерация:

За една статистическа система $(\mathcal{E}vents, \mathcal{S}tates, Prob)$

и произволни нейни състояния $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{S}tates$ и числа

$$q_1, \dots, q_n \in [0, 1], \quad q_1 + \dots + q_n = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathcal{S}tates$, такова че

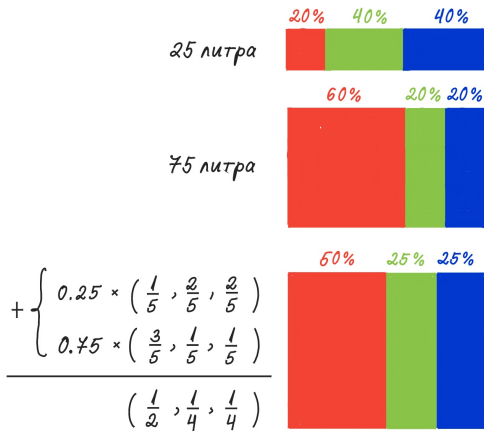
$$\rho(P) = q_1 \rho_1(P) + \dots + q_n \rho_n(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathcal{E}vents$.

Състоянието ρ се нарича **смес на** $\rho_1, \dots, \rho_n$ **с тегла** $q_1, \dots, q_n$.

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Илюстрация: смес на бои



Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Чисти и смесени състояния:

Чисто състояние е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*.

Подробно, състоянието ρ е чисто

$\Leftrightarrow$ за всяко представяне на ρ в смес $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е в сила, че
или $q_1 = 1$ ($\Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_1$), или $q_2 = 1$ ($\Leftrightarrow q_1 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_2$)

(последните именно казваме, че отговарят на тривиални смеси).

Смесено състояние = не чисто състояние.

И така, чистите състояния съответстват на най-прецизно приготвените състояния. Логично е да се очаква, че при тях вероятностите на всички събития биха били 1 или 0. Оказва се обаче, че това е така само за т.нар. “класически системи”. За обща квантова система се оказва, че дори и в чисто състояние определени събития могат да настъпват с вероятност отлична от 1 или 0. Това е именно точния израз на неотстранимия индетерминизъм на квантовата теория, за който споменахме в увода.

Аксиоми на общи системи

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство – включва:

- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ = множество на елементарните състояния
 $\equiv$ множество на елементарните “събития”.

- Зададени са вероятности:

$$\begin{array}{ccc} \Omega = \{\omega_1, & \dots, & \omega_n\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_1, & \dots, & p_n \\ & & = p_1(\omega_1), \dots, p_n(\omega_n). \end{array}$$

Тоест, $p_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^n p_j \left(\equiv \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \right) = 1$

– $(p_1, \dots, p_n)$ е вероятностно разпределение.

Аксиоми на общи системи – преговор от теория на вероятностите

В крайно вероятно пространство Ω :

- за подмножествата $S \subseteq \Omega$: $p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]$
– вероятност за събитието S
- Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:
 - (p_1) адитивност $S = S_1 \dot{\cup} S_2 \Rightarrow p(S) = p(S_1) + p(S_2)$,
където $S = S_1 \dot{\cup} S_2 \Leftrightarrow S = S_1 \cup S_2$ и $\emptyset = S_1 \cap S_2$
и се нарича *дизюнктивно обединение*;
 - (p_2) монотонност $S_1 \subseteq S \Rightarrow p(S_1) \leq p(S)$;
 - (p_3) нормировка $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$.

Аксиоми на общи системи – преговор от теория на вероятностите

В крайно вероятностно пространство Ω :

- **Условната вероятност:** $p(S \mid Q) := \frac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на Бейс)

элементарни
состояния

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6



вероятности

$\frac{1}{12}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$

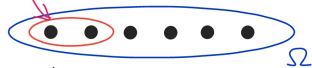
условие
 A

$(1 : 2 : 2 : 2 : 2 : 3)$

редукция
след условието

элементарни
состояния

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6



вероятности

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 0 0 0 0

$(1 : 2)$

элиминировани
от условието

като пропорциите в A се запазват

Аксиоми на общи системи – преговор от теория на вероятностите

В крайно вероятностно пространство Ω :

- **Условната вероятност:** $p(S | Q) := \frac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- Забележете: $p'(\omega_k) := p(\omega_k | Q)$ ($k = 1, \dots, n$) отново е вероятностно разпределение. Действително:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p(\omega_k | Q) &= \sum_{k=1}^n \frac{p(\{\omega_k\} \cap Q)}{p(Q)} = \frac{1}{p(Q)} \sum_{k=1}^n p(\{\omega_k\} \cap Q) \\ &= \frac{1}{p(Q)} p\left(\bigcup_{k=1}^n (\{\omega_k\} \cap Q)\right) = \frac{1}{p(Q)} p\left(\underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^n \{\omega_k\}\right) \cap Q}_{\Omega}\right) = 1. \end{aligned}$$

Аксиоми на общи системи – преговор от теория на вероятностите

В крайно вероятностно пространство Ω :

- **Условната вероятност:** $p(S | Q) := \frac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- Събитията $S, Q \subseteq \Omega$ се наричат **независими събития**, ако $p(S | Q) = p(S)$. Така, S и Q са независими

$$\iff p(Q | S) = p(Q)$$

$$\iff p(S \cap Q) = p(S)p(Q)$$

и в частност, релацията независимост е симетрична.

(но не и рефлексивна или транзитивна)

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Вероятностна смес: пример

75 зарсета
от вид 1:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
●	●	●	●	●	●
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

25 зарсета
от вид 2:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
●	●	●	●	●	●
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4 \ \omega_5 \ \omega_6 \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \end{array} \\
 + \left\{ \begin{array}{l} 0.75 \times \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \\ 0.25 \times \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4} \right) \end{array} \right. \\
 \hline
 \left(\frac{7}{48}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{16} \right)
 \end{array}$$

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме, че експеримент с елементарни събития $\tilde{\omega}_k := \{\omega_k\}$, за $k = 1, \dots, n$, има по-fino описание, при което всяко $\tilde{\omega}_k$ престава да бъде елементарно и се реализира при две взаимно допълнителни се ситуации A_1, A_2 :

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ (невъзможно събитие),}$$

$$A_1 \cup A_2 = \text{винаги изпълненото събитие.}$$

Тогава: $\tilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \tilde{\omega}_k = (A_1 \cap \tilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \tilde{\omega}_k)$, като

$$(A_1 \cap \tilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \tilde{\omega}_k) = \emptyset.$$

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме: $\tilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \tilde{\omega}_k = (A_1 \cap \tilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \tilde{\omega}_k)$, като

$$(A_1 \cap \tilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \tilde{\omega}_k) = \emptyset.$$

Следователно,

$$p(\omega_k) = p(A_1 \cap \tilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \tilde{\omega}_k) = p(A_1) p(\omega_k | A_1) + p(A_2) p(\omega_k | A_2).$$

Нека положим: $p'(\omega_k) := p(\omega_k | A_1)$, $q_1 := p(A_1)$,
 $p''(\omega_k) := p(\omega_k | A_2)$, $q_2 := p(A_2)$ ($k = 1, \dots, n$).

Тогава полученият резултат се записва като:

$$p(\omega_k) = q_1 \cdot p'(\omega_k) + q_2 \cdot p''(\omega_k) \quad (k = 1, \dots, n),$$

където $(p'(\omega_1), \dots, p'(\omega_n))$, $(p''(\omega_1), \dots, p''(\omega_n))$ и (q_1, q_1)

са вероятностни разпределения.

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Вероятностна смес: обща постановка

Полученото вероятностно разпределение $(p(\omega_1), \dots, p(\omega_n))$ се нарича **смес** на $(p'(\omega_1), \dots, p'(\omega_n))$ и $(p''(\omega_1), \dots, p''(\omega_n))$ с тегла q_1 и q_2 .

То се дава по формулата

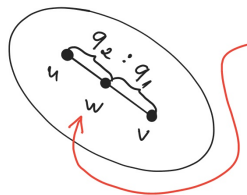
$$(p(\omega_1), \dots, p(\omega_n)) = q_1 \cdot (p'(\omega_1), \dots, p'(\omega_n)) + q_2 \cdot (p''(\omega_1), \dots, p''(\omega_n)).$$

Упражнение. За всяко събитие $S \subseteq \Omega$ е в сила равенството:

$$p(S) = q_1 p'(S) + q_2 p''(S).$$

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Геометрия на множеството на състоянията

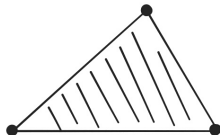


w се нарича
изпъкнала комбинация
на *u* и *v* с тегла q_1, q_2

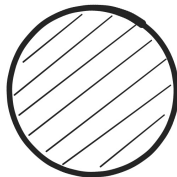
- Следователно:
- ***States*** е изпъкнало множество в линейното пространство $\{f \mid f : \mathcal{Events} \rightarrow \mathbb{R}\}$.
 - Смес $\Leftrightarrow$ изпъкнала комбинация
 - Чисто състояние $\Leftrightarrow$ екстремална точка

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Геометрия на множеството на състоянията



Всеки затворен триъгълник е изпъкнало множество.
Екстремалните му точки са само върховете му, без останалата част от границата му.



Всеки затворен диск е изпъкнало множество.
Екстремалните му точки са цялата граница.

Геометрия на множеството на състоянията

Симплексът:

$$\Delta_{n-1} := \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq p_j \leq 1, \text{ за } j = 1, \dots, n; \right. \\ \left. p_1 + \dots + p_n = 1 \right\}.$$

Това е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, в което изпъкналата комбинация, както видяхме в предната точка, има смисъл на *вероятностна смес*.

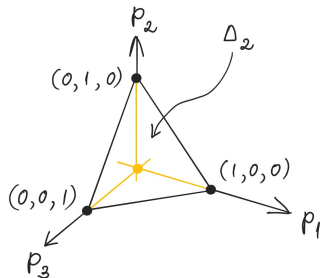
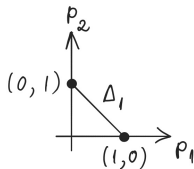
Екстремалните точки на Δ_{n-1} са разпределенията от вида $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Геометрия на множеството на състоянията

Симплексът:

$$\Delta_{n-1} := \{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq p_j \leq 1, \text{ за } j = 1, \dots, n; \\ p_1 + \dots + p_n = 1 \}.$$

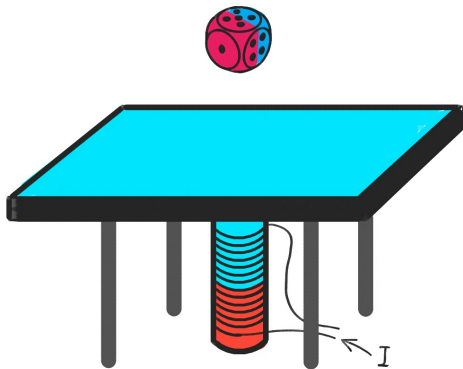


Аксиоми на общи системи

Класически системи

Класическа крайна система се определя от едно крайно множество Ω , по което задаваме:

- $States := \mathcal{P}(\Omega)$ - това е **степенното множество** (power set) на Ω
(т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);
- $States := Prob.Func.(\Omega)$ – това е множеството на всички вероятностни разпределения над Ω – то е симплекс.



Магнитно зарче, чието вероятно разпределение на паданията може да се манипулира от тока I намагнетизиращ масата

состояние $\downarrow$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
вероятност $p_{(I=+3)}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{6}$
вероятност $p_{(I=+1)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
вероятност $p_{(I=0)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
вероятност $p_{(I=-1)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
вероятност $p_{(I=-3)}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{54}$

Примерни вероятностни разпределения за зарчето от предната фигура, в зависимост от силата на тока I