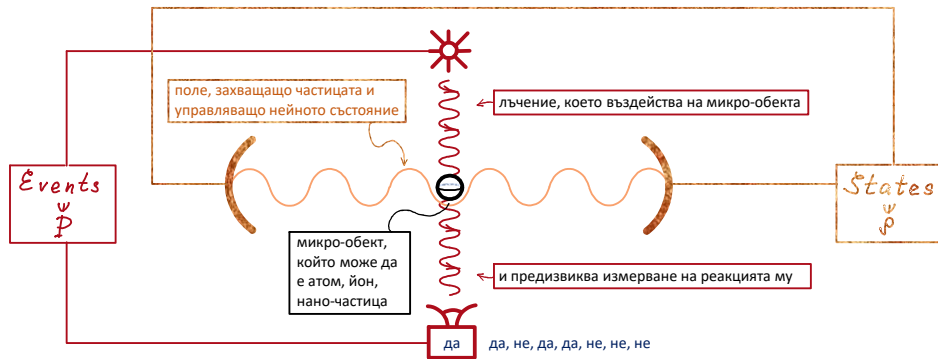


КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 4 / 31.10.2022

Николай М. Николов

Начална постановка:

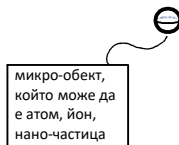


$$\text{Prob}_{\rho} P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Начална постановка:



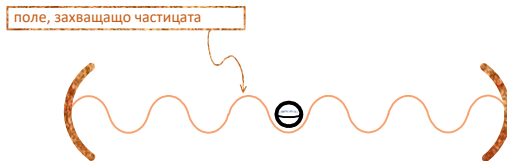
Начална постановка:



Начална постановка:



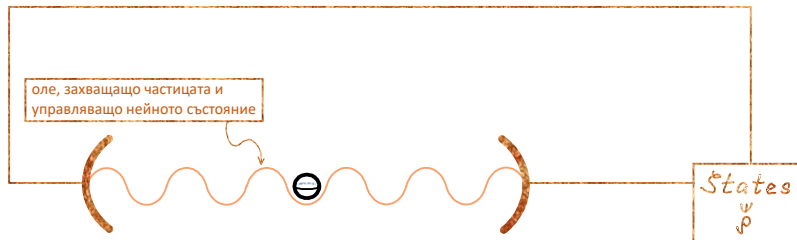
Начална постановка:



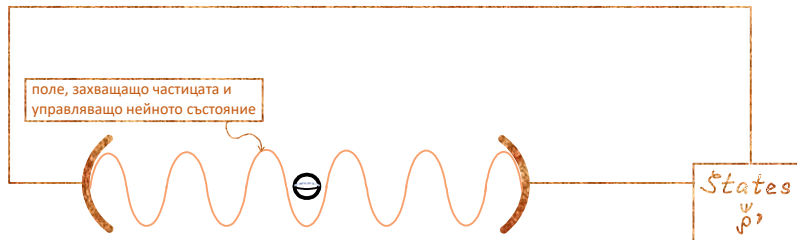
Начална постановка:



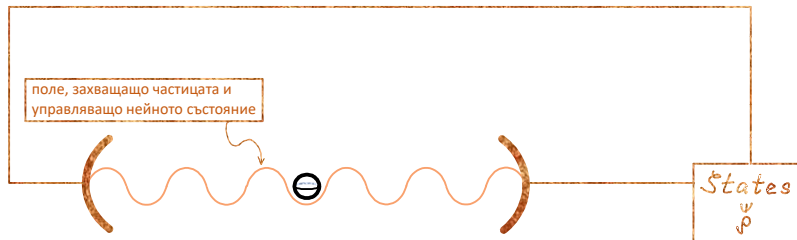
Начална постановка:



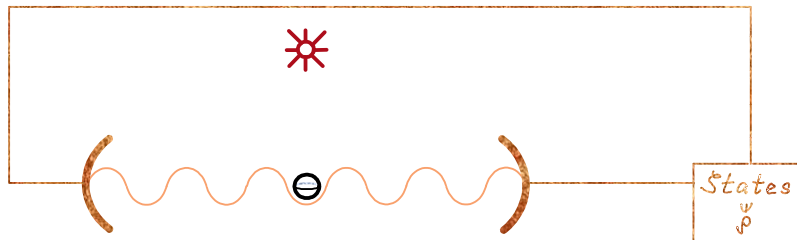
Начална постановка:



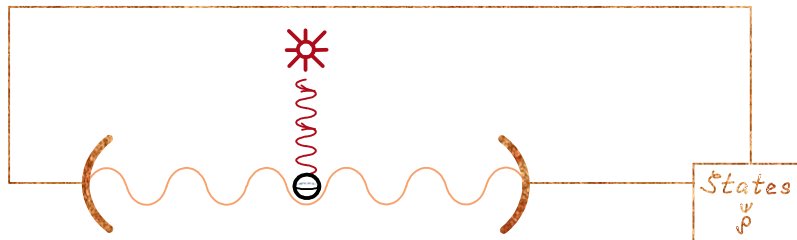
Начална постановка:



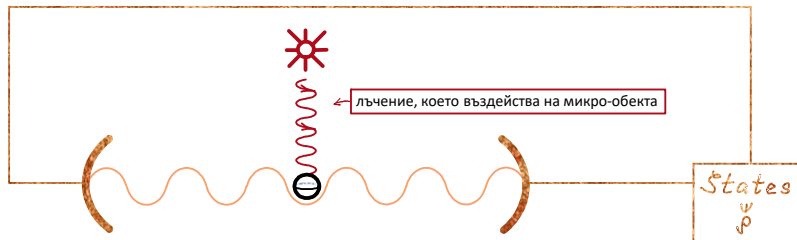
Начална постановка:



Начална постановка:



Начална постановка:



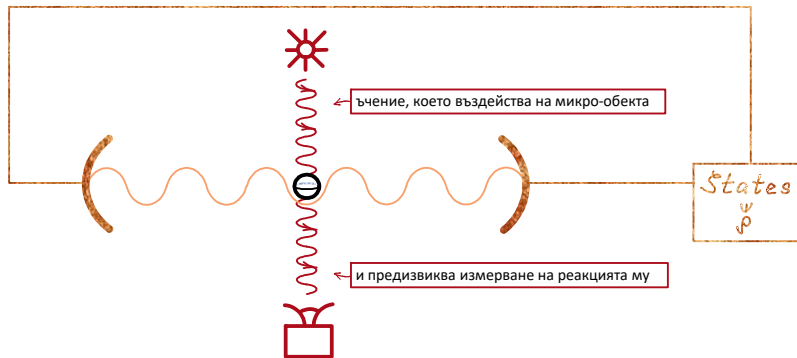
Начална постановка:



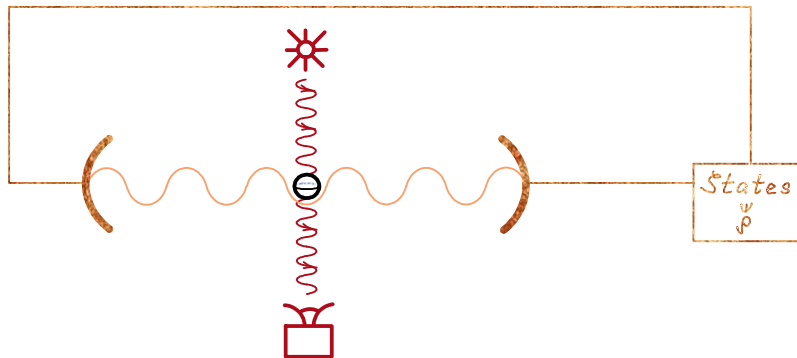
Начална постановка:



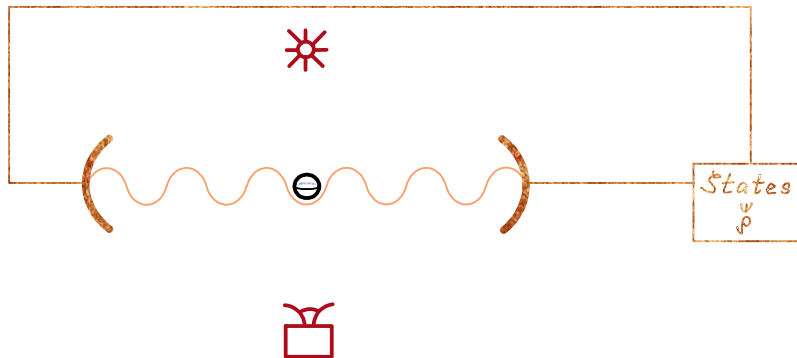
Начална постановка:



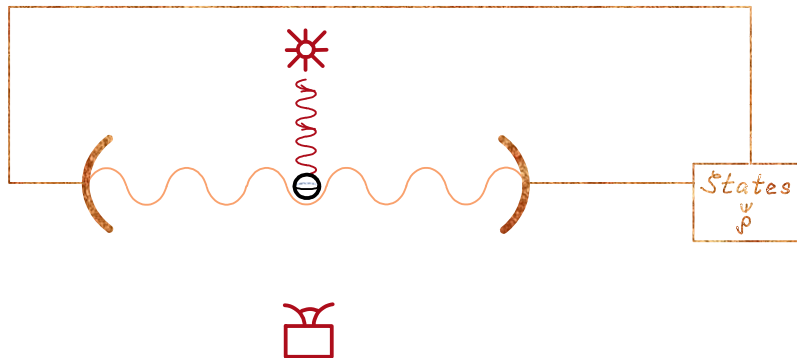
Начална постановка:



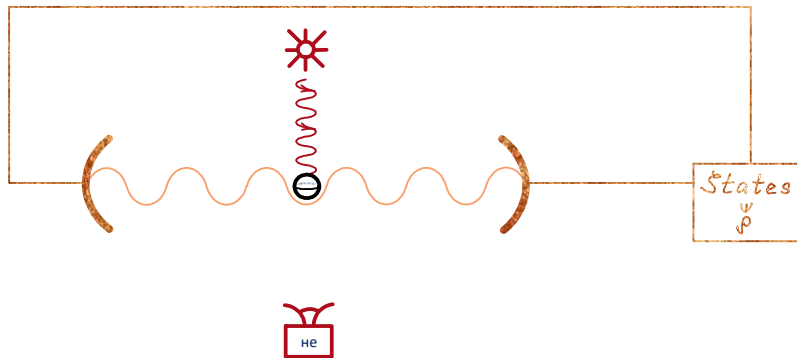
Начална постановка:



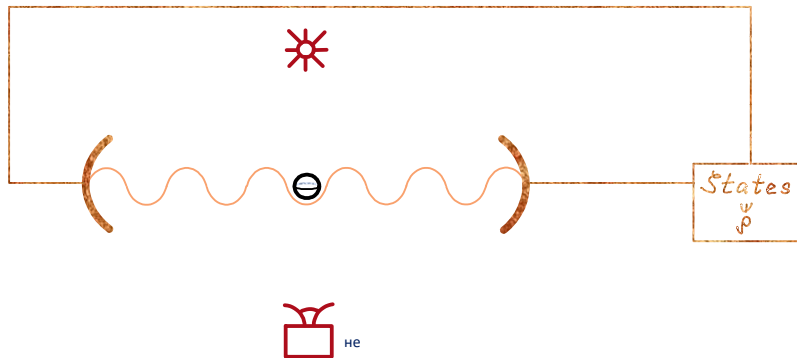
Начална постановка:



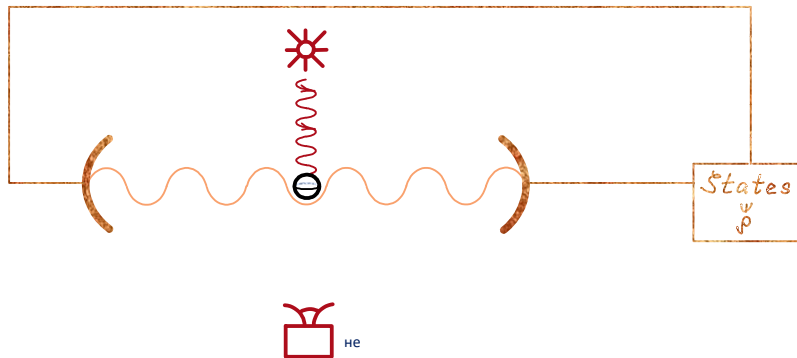
Начална постановка:



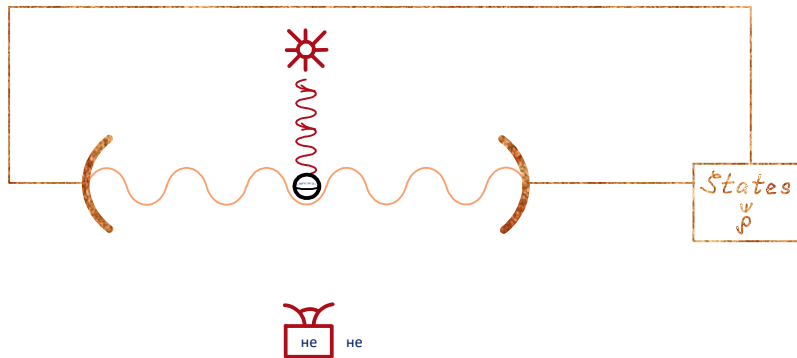
Начална постановка:



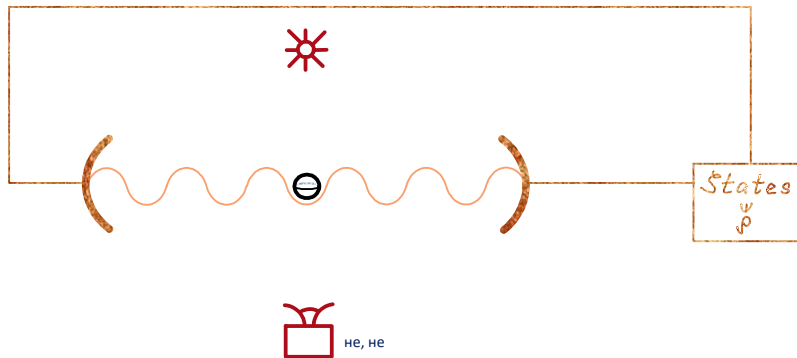
Начална постановка:



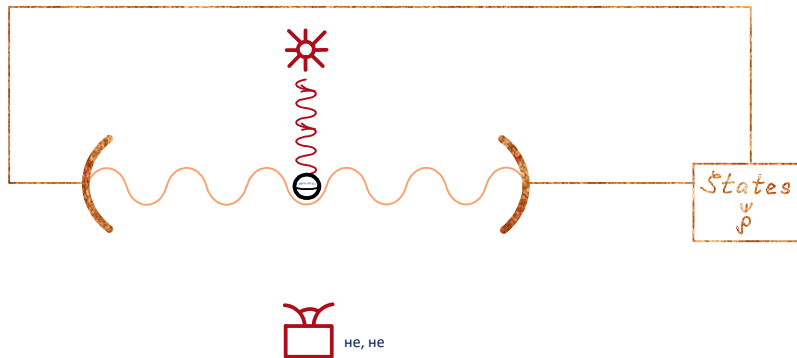
Начална постановка:



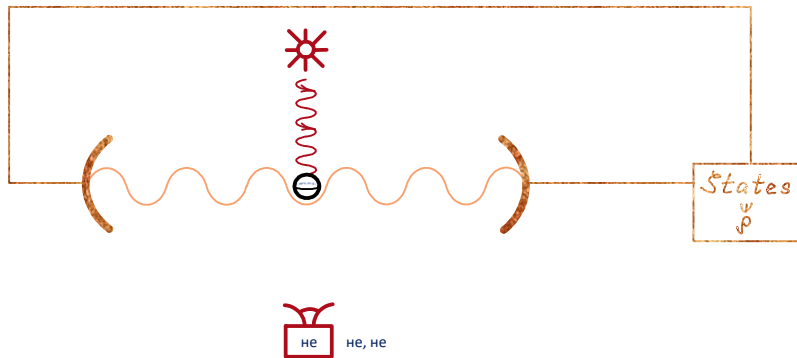
Начална постановка:



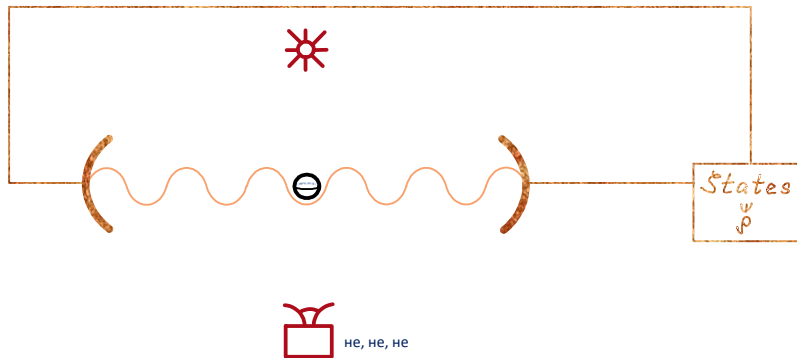
Начална постановка:



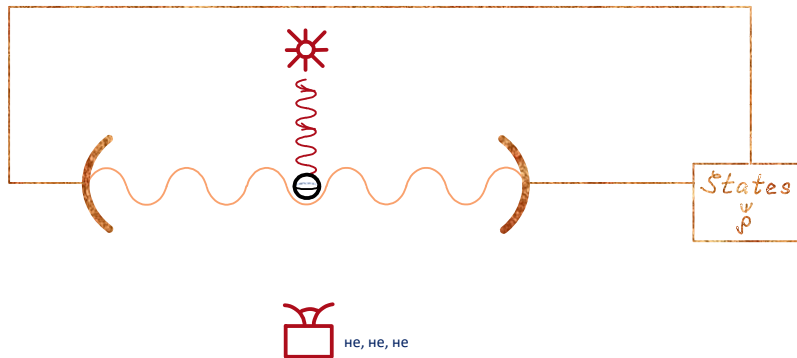
Начална постановка:



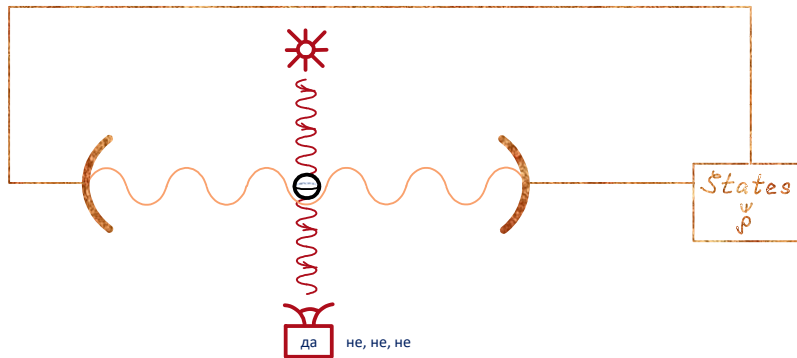
Начална постановка:



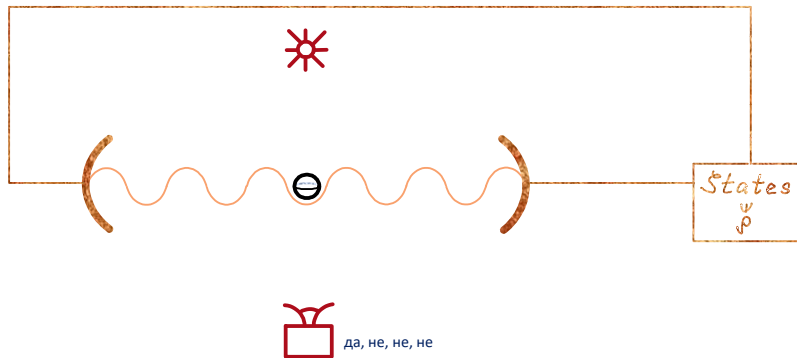
Начална постановка:



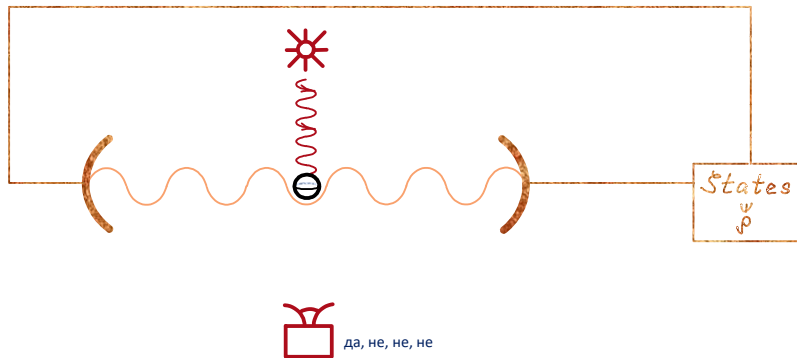
Начална постановка:



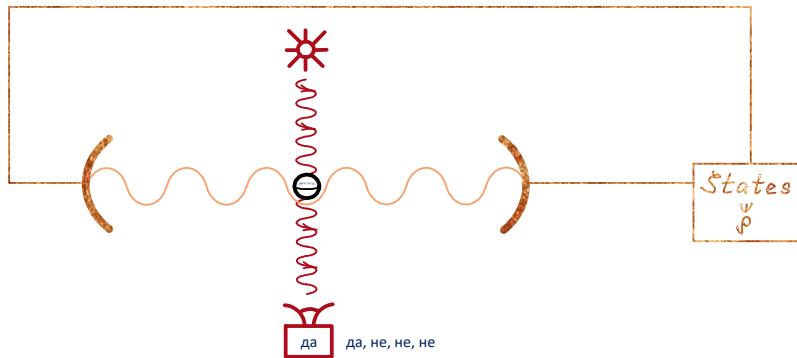
Начална постановка:



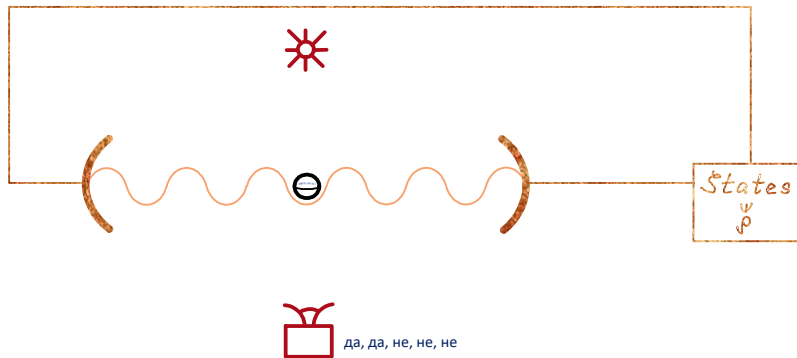
Начална постановка:



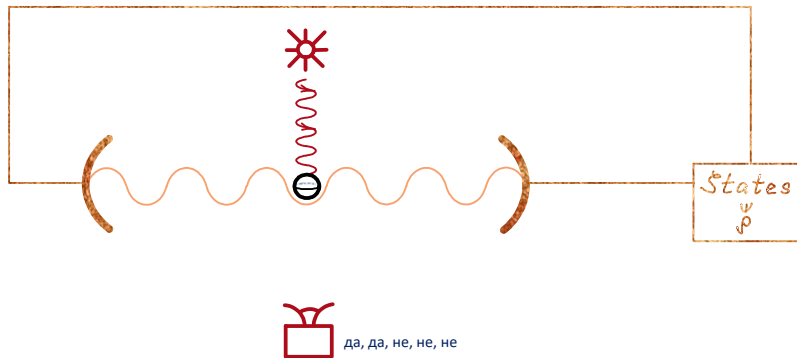
Начална постановка:



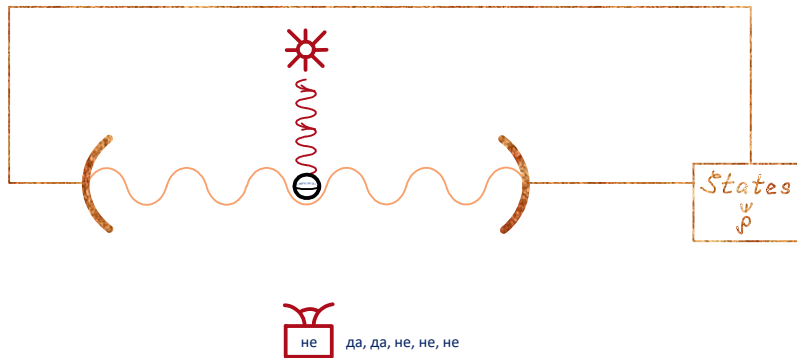
Начална постановка:



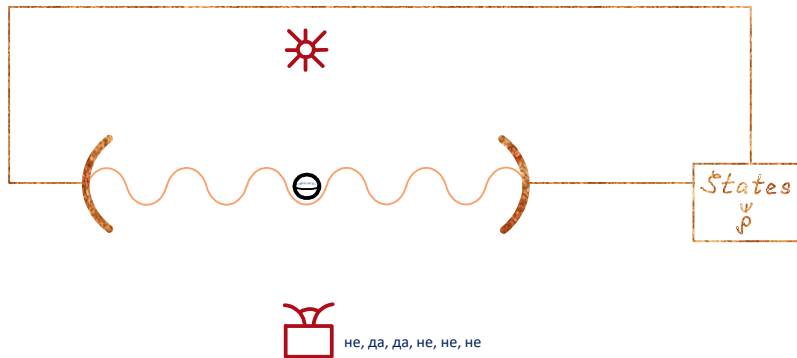
Начална постановка:



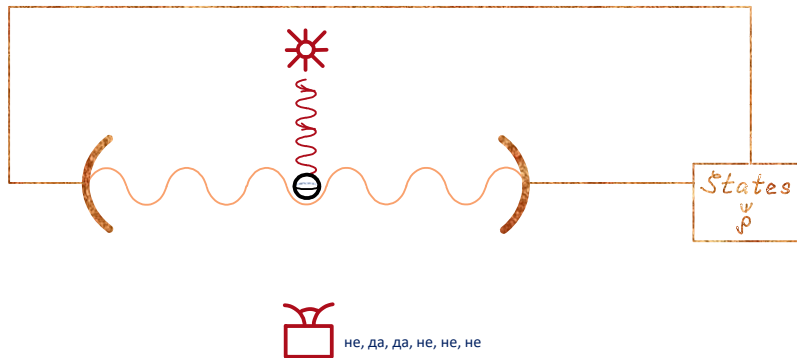
Начална постановка:



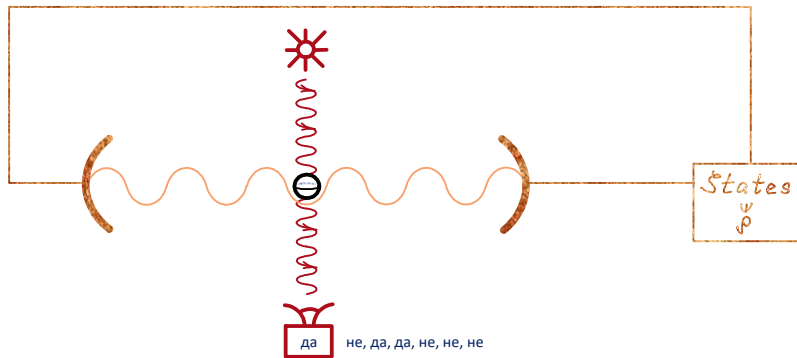
Начална постановка:



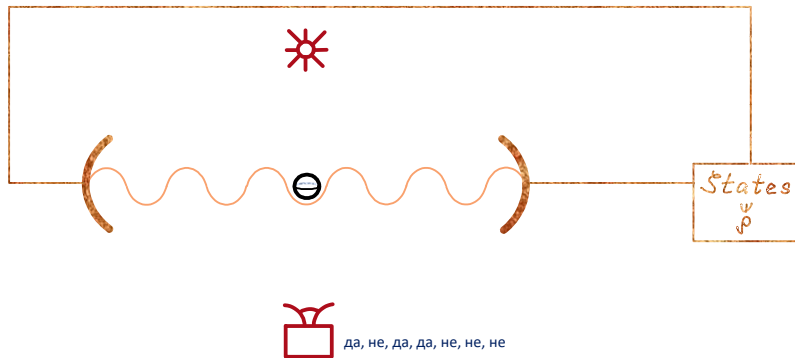
Начална постановка:



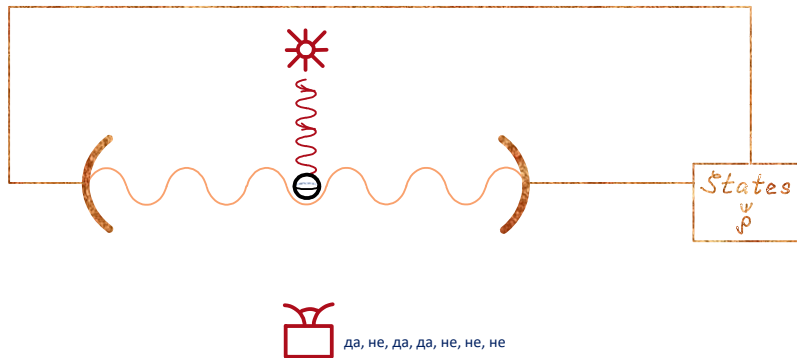
Начална постановка:



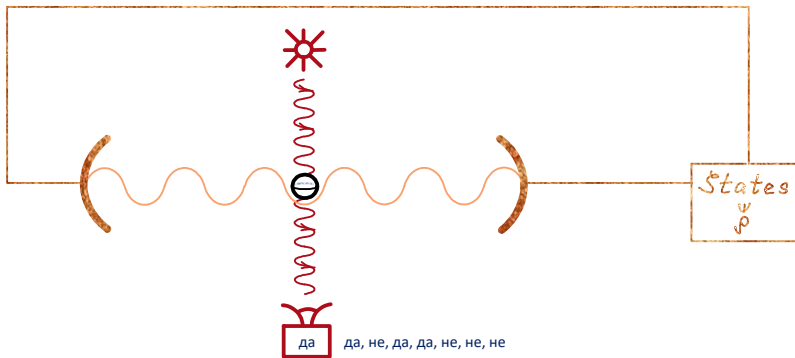
Начална постановка:



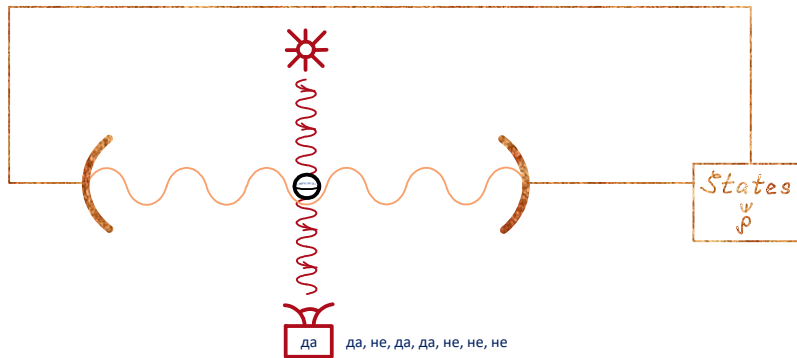
Начална постановка:



Начална постановка:

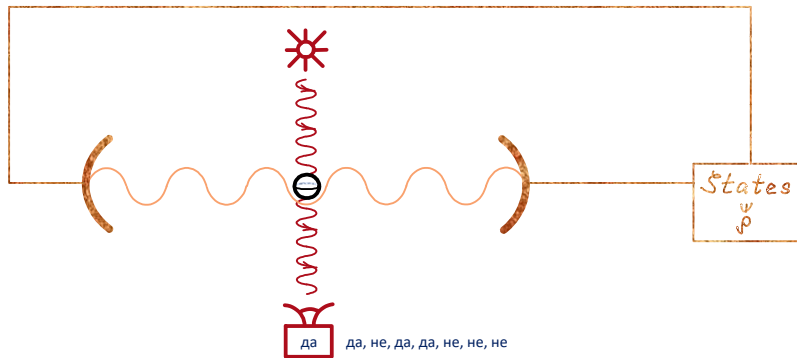


Начална постановка:



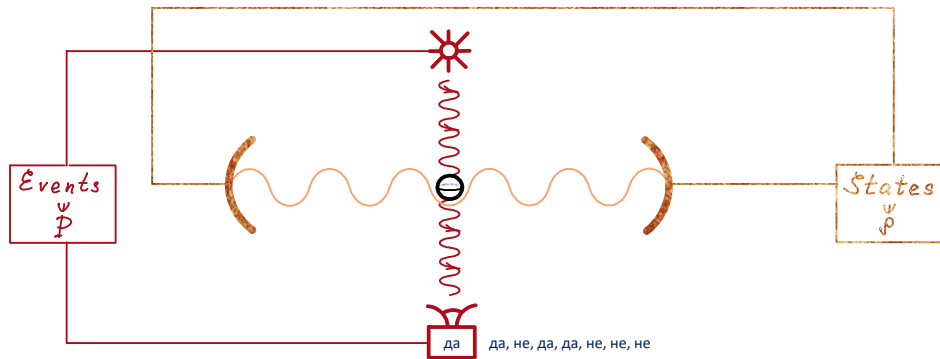
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Начална постановка:



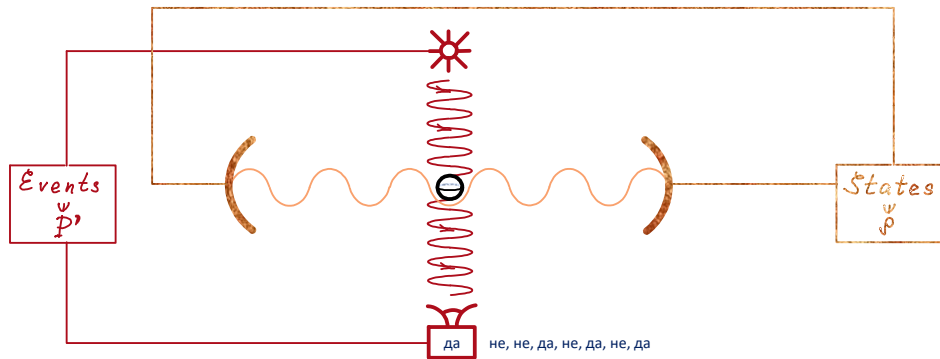
$$\text{Prob}_\rho P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Начална постановка:



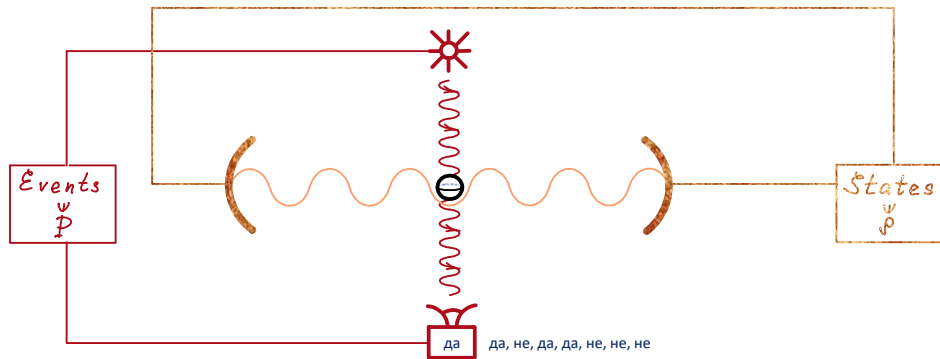
$$\text{Prob}_P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Начална постановка:



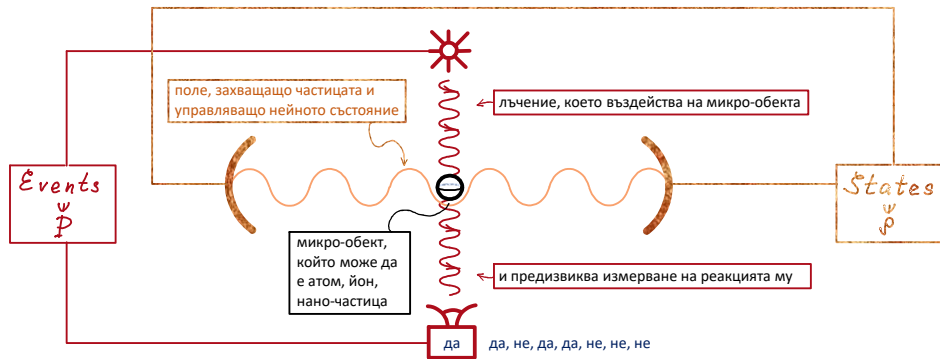
$$\text{Prob}_\rho P' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Начална постановка:

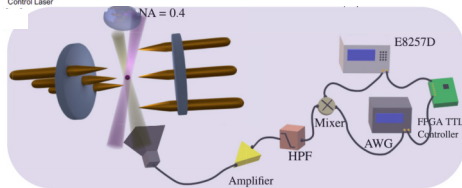
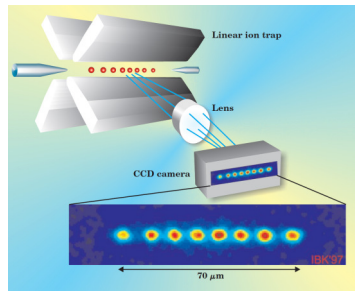
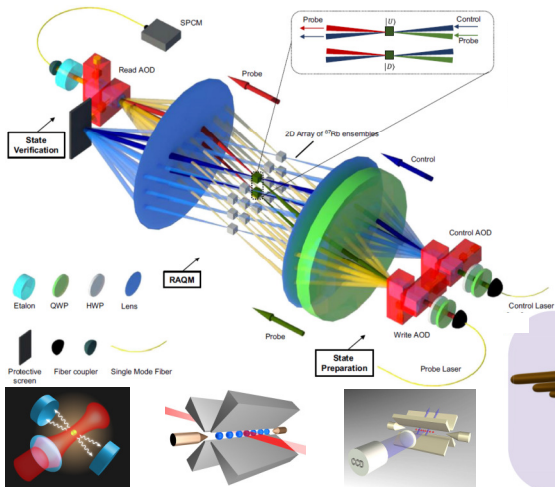


$$\text{Prob}_\rho P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

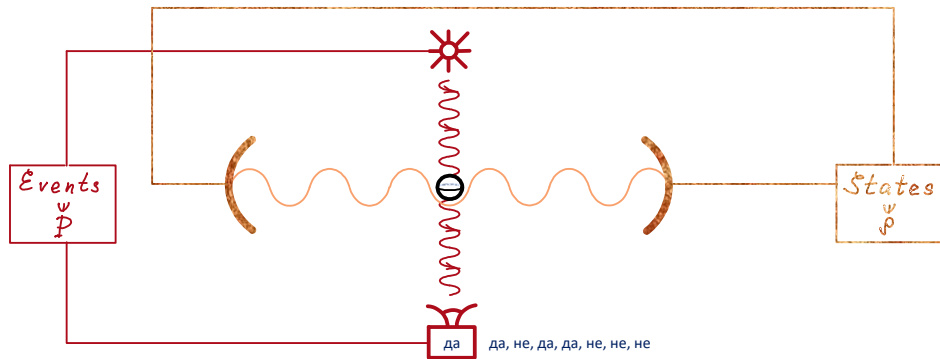
Начална постановка:



$$\text{Prob}_{\rho} P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$



Начална постановка:



$$\text{Prob}_\rho P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

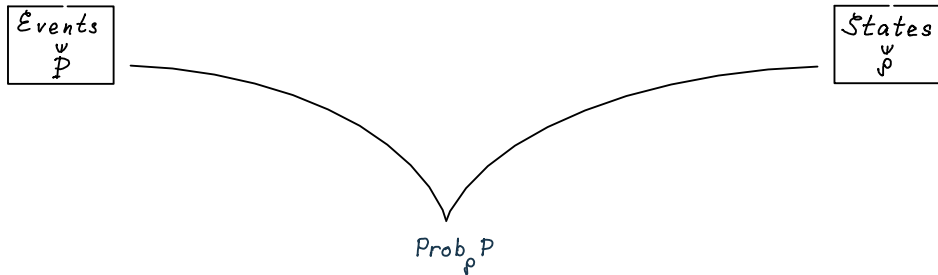
Начална постановка:

Events
 ψ
 ρ

States
 ψ
 ρ

Prob _{ρ} P

Начална постановка:



Начална постановка:

$$\text{Events} \times \text{States} \rightarrow [0,1]: (P, \rho) \mapsto \text{Prob}_\rho P$$

Начална постановка:

$$\text{Events} \times \text{States} \rightarrow [0,1]: (\mathcal{P}, \rho) \mapsto \text{Prob}_{\rho} \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\mathcal{P})$$

съгласно

първата аксиома за отделимост ние третираме състоянията, като функции от събитията

Начална постановка:

$$\text{Events} \times \text{States} \rightarrow [0,1]: (P, \rho) \mapsto \text{Prob}_\rho P =: \rho(P)$$

съгласно

първата аксиома за отделимост ние третираме състоянията, като функции от събитията

Втората аксиома за отделимост = множеството на състоянията, като функции върху множеството Events разделя елементите му.

Начална постановка:

$$\text{Events} \times \text{States} \rightarrow [0,1]: (P, \rho) \mapsto \text{Prob}_\rho P =: \rho(P)$$

съгласно

първата аксиома за отделимост ние третираме състоянията, като функции от събитията

Втората аксиома за отделимост = множеството на състоянията, като функции върху множеството Events разделя елементите му.

Две системи считаме тъждествени (изоморфни), ако има взаимно-еднозначни и обратими съответствия между множествата на събитията им и множествата на състоянията им, съответно, при което се получават еднакви вероятности при съответстващи им събития и състояния

Начална постановка:

$$\text{Events} \times \text{States} \rightarrow [0,1]: (P, \rho) \mapsto \text{Prob}_\rho P =: \rho(P)$$

съгласно

първата аксиома за отделимост ние третираме състоянията, като функции от събитията

Втората аксиома за отделимост = множеството на състоянията, като функции върху множеството Events разделя елементите му.

Две системи считаме тъждествени (изоморфни), ако има взаимно-еднозначни и обратими соответствия между множествата на събитията им и множествата на състоянията им, съответно, при което се получават еднакви вероятности при соответстващи им събития и състояния

Основна логическа релация:

$$\text{За } P, Q \in \text{Events} : P \preceq Q \iff \begin{cases} \rho(P) = 1 \implies \rho(Q) = 1 & (\forall \rho) \\ \rho(Q) = 0 \implies \rho(P) = 0 & (\forall \rho) \end{cases}$$

Основная логическая рефлексия:

$$\text{За } P, Q \in \text{Events} : P \preceq Q \iff \begin{cases} \rho(P) = 1 \implies \rho(Q) = 1 & (\forall \rho) \\ \rho(Q) = 0 \implies \rho(P) = 0 & (\forall \rho) \end{cases}$$

Основна логическа релация:

$$\text{За } P, Q \in \text{Events} : P \preceq Q \iff \begin{cases} \rho(P) = 1 \implies \rho(Q) = 1 & (\forall \rho) \\ \rho(Q) = 0 \implies \rho(P) = 0 & (\forall \rho) \end{cases}$$

Квантово логически операции "л" и "в" : изискваме да съществуват, т.е.

$$(\text{наредба}) \quad P \preceq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$$

Основна логическа релация:

$$\text{За } P, Q \in \text{Events} : P \preceq Q \iff \begin{cases} \rho(P) = 1 \implies \rho(Q) = 1 & (\forall \rho) \\ \rho(Q) = 0 \implies \rho(P) = 0 & (\forall \rho) \end{cases}$$

Квантово логически операции "∧" и "∨" : изискваме да съществуват, т.е.

$$(\text{наредба}) \quad P \preceq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$$

$$\left. \begin{array}{ll} (\text{асоциативност}) & P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R \\ (\text{комутативност}) & P \wedge Q = Q \wedge P \\ (\text{поглъщане}) & P \wedge (P \vee Q) = P \\ (\text{идемпотентност}) & P \wedge P = P \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\wedge \leftrightarrow \vee) \\ (\wedge \leftrightarrow \vee) \\ (\wedge \leftrightarrow \vee) \\ (\wedge \leftrightarrow \vee) \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Events} \\ \text{е решетка} \end{array} \right\}$$

Основна логическа релация:

$$\text{За } P, Q \in \text{Events} : P \preceq Q \iff \begin{cases} \rho(P) = 1 \implies \rho(Q) = 1 & (\forall \rho) \\ \rho(Q) = 0 \implies \rho(P) = 0 & (\forall \rho) \end{cases}$$

Квантово логически операции "∧" и "∨" : изискваме да съществуват, т.е.

$$(\text{наредба}) \quad P \preceq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$$

$$\left. \begin{array}{ll} (\text{асоциативност}) & P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R \\ (\text{комутативност}) & P \wedge Q = Q \wedge P \\ (\text{поглъщане}) & P \wedge (P \vee Q) = P \\ (\text{идемпотентност}) & P \wedge P = P \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\wedge \leftrightarrow \vee) \\ (\wedge \leftrightarrow \vee) \\ (\wedge \leftrightarrow \vee) \\ (\wedge \leftrightarrow \vee) \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Events} \\ \text{е решетка} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{нула и единица}) \quad P \wedge \hat{0} = \hat{0}, \quad P \vee \hat{0} = P \\ \quad \quad \quad P \wedge \hat{1} = P, \quad P \vee \hat{1} = \hat{1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Events} \\ \text{е решетка с } 0 \text{ и } 1 \end{array}$$

Квантово логически операции "∧" и "∨" : изискваме да съществуват, т.е.

(наредба) $P \leq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$

(асоциативност)	$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	} Events е решетка
(комутативност)	$P \wedge Q = Q \wedge P$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	
(поглъщане)	$P \wedge (P \vee Q) = P$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	
(идемпотентност)	$P \wedge P = P$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	
(нула и единица)	$P \wedge \hat{0} = \hat{0}, P \vee \hat{0} = P$		} Events е решетка с 0 и 1
	$P \wedge \hat{1} = P, P \vee \hat{1} = \hat{1}$		

Квантово логически операции "∧" и "∨" : изискваме да съществуват, т.е.

(наредба) $P \leq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$

(асоциативност) $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$
 (комутативност) $P \wedge Q = Q \wedge P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$
 (поглъщане) $P \wedge (P \vee Q) = P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$
 (идемпотентност) $P \wedge P = P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

(нула и единица) $P \wedge \hat{0} = \hat{0}, P \vee \hat{0} = P$
 $P \wedge \hat{1} = P, P \vee \hat{1} = \hat{1}$

(отрицание) $(P^\perp)^\perp = P$
 $P \wedge P^\perp = \hat{0}, P \vee P^\perp = \hat{1}$
 $(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

Квантово логически операции "∧" и "∨" : изискваме да съществуват, т.е.

(наредба) $P \leq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$

(асоциативност)	$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	$\left. \begin{array}{l} \text{Events} \\ \text{е решетка} \end{array} \right\}$
(комутативност)	$P \wedge Q = Q \wedge P$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	
(поглъщане)	$P \wedge (P \vee Q) = P$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	
(идемпотентност)	$P \wedge P = P$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	
(нула и единица)	$P \wedge \hat{0} = \hat{0}, P \vee \hat{0} = P$ $P \wedge \hat{1} = P, P \vee \hat{1} = \hat{1}$		$\left. \begin{array}{l} \text{Events} \\ \text{е решетка с } 0 \text{ и } 1 \end{array} \right\}$
(отрицание)	$(P^\perp)^\perp = P$ $P \wedge P^\perp = \hat{0}, P \vee P^\perp = \hat{1}$ $(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp$	$(\wedge \leftrightarrow \vee)$	$\left. \begin{array}{l} \text{Events} \\ \text{е орто-решетка} \end{array} \right\}$

-това са всички закони на класическото
пропозиционално смятане без дистрибутивността:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$(\wedge \leftrightarrow \vee)$

Заключителни аксиоми :

Заключителни аксиоми:

Закон за орто-модуларност: Ако $P \preceq Q$, $P, Q \in \text{Events}$, то $Q = P \vee (Q \setminus P)$,
където $Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$

Заключителни аксиоми:

Закон за орто-модуларност: Ако $P \leq Q$, $P, Q \in \text{Events}$, то $Q = P \vee (Q \setminus P)$,
където $Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$

Закон за покриването: Ако $P, Q \in \text{Events}$, P е елементарно, то $P \vee Q$ покрива Q .

Където: • събитието T покрива събитието S , ако

$S \leq T$, $S \neq T$ и от $S \leq R \leq T$ следва, че $S = R$ или $R = T$

• събитието P е елементарно, ако P покрива $\hat{0}$.

Заключителни аксиоми:

Закон за орто-модуларност: Ако $P \leq Q$, $P, Q \in \text{Events}$, то $Q = P \vee (Q \setminus P)$,
където $Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$

Закон за покриването: Ако $P, Q \in \text{Events}$, P е елементарно, то $P \vee Q$ покрива Q .

Където: • събитието T покрива събитието S , ако

$S \leq T$, $S \neq T$ и от $S \leq R \leq T$ следва, че $S = R$ или $R = T$

• събитието P е елементарно, ако P покрива $\hat{0}$.

Атомарност: Всяко ненулево събитие мажорира елементарно събитие.

Заключителни аксиоми:

Закон за орто-модуларност: Ако $P \leq Q$, $P, Q \in \text{Events}$, то $Q = P \vee (Q \setminus P)$,
където $Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$

Закон за покриването: Ако $P, Q \in \text{Events}$, P е елементарно, то $P \vee Q$ покрива Q .

Където: • събитието T покрива събитието S , ако

$S \leq T$, $S \neq T$ и от $S \leq R \leq T$ следва, че $S = R$ или $R = T$

• събитието P е елементарно, ако P покрива $\hat{0}$.

Атомарност: Всяко ненулево събитие мажорира елементарно събитие.

Крайност: Съществува $N \in \mathbb{N}$, т.е. за всяка верига

$$\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_n \leq \hat{1} \text{ имаме } n \leq N.$$

$$0 \neq Q_1 \neq \dots \neq Q_n \neq \hat{1}$$

Заключителни аксиоми:

Състояния: $\text{States} = \text{Prob. Dist.}(\text{Events})$.

Където:

- $\text{Prob. Dist.}(\text{Events}) = \{ p : \text{Events} \rightarrow [0, 1] \mid p \text{ е вероятност} \}$;
- $p : \text{Events} \rightarrow [0, 1]$ е вероятност, ако е нормирана: $p(I) = 1$
и адитивна: $p(Q) = p(P) + p(Q \setminus P)$ за $P \preceq Q$

Заключителни аксиоми:

Състояния: $\text{States} = \text{Prob. Dist.}(\text{Events})$.

Където:

- $\text{Prob. Dist.}(\text{Events}) = \{ p : \text{Events} \rightarrow [0, 1] \mid p \text{ е вероятност} \}$;
- $p : \text{Events} \rightarrow [0, 1]$ е вероятност, ако е нормирана: $p(\hat{1}) = 1$
и адитивна: $p(Q) = p(P) + p(Q \setminus P)$ за $P \preceq Q$

По такъв начин, една система се определя напълно от задаването на Events , като орто-решетка.

Заключителни аксиоми:

Състояния: $\text{States} = \text{Prob. Dist.}(\text{Events})$.

Където:

- $\text{Prob. Dist.}(\text{Events}) = \{ p : \text{Events} \rightarrow [0, 1] \mid p \text{ е вероятност} \}$;
- $p : \text{Events} \rightarrow [0, 1]$ е вероятност, ако е нормирана: $p(I) = 1$
и адитивна: $p(Q) = p(P) + p(Q \setminus P)$ за $P \preceq Q$

По такъв начин, една система се определя напълно от задаването на Events , като орто-решетка.

С други думи: Всичко се определя от това, какви събития можем да наблюдаваме.

Заключителни аксиоми:

Състояния: $\text{States} = \text{Prob. Dist.}(\text{Events})$.

Където:

- $\text{Prob. Dist.}(\text{Events}) = \{ p : \text{Events} \rightarrow [0, 1] \mid p \text{ е вероятност} \}$;
- $p : \text{Events} \rightarrow [0, 1]$ е вероятност, ако е нормирана: $p(\mathbf{i}) = 1$
и адитивна: $p(Q) = p(P) + p(Q \setminus P)$ за $P \preceq Q$

По такъв начин, една система се определя напълно от задаването на Events , като орто-решетка.

С други думи: Всичко се определя от това, какви събития можем да наблюдаваме.

Пример: класическа система - определя се от крайно множество Ω , така че

$$\text{Events} := \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad \text{States} := \text{Prob. Dist.}(\Omega) \quad (\cong \text{Prob. Dist.}(\mathcal{P}(\Omega)))$$

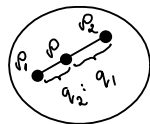
Това, което в началото на курса бяхме сложили, като аксиома, сега може да се докаже:

Теорема. Множеството на състоянията е затворено изпъкнало подмножество на линейното пространство на всички функции $\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}$.

Това, което в началото на курса бяхме сложили, като аксиома, сега може да се докаже:

Теорема. Множеството на състоянията е затворено изпъкнало подмножество на линейното пространство на всички функции $\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}$.

Припомняме: States ще бъде изпъкнало подмножество на $\{\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}\}$, ако за $\forall p_1, p_2 \in \text{States}$ и $\forall q_1, q_2 \in [0, 1], q_1 + q_2 = 1$



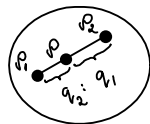
$\Rightarrow p = q_1 p_1 + q_2 p_2 \in \text{States}$

това се нарича: $\rightarrow \begin{cases} \text{в геометрията - изпъкнала линейна комбинация} \\ \text{с тегла } q_1, q_2 \\ \text{в квант. теория - смес на състояния с тегла } q_1, q_2 \end{cases}$

Това, което в началото на курса бяхме сложили, като аксиома, сега може да се докаже:

Теорема. Множеството на състоянията е затворено изпъкнало подмножество на линейното пространство на всички функции $\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}$.

Припомняме: States ще бъде изпъкнало подмножество на $\{\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}\}$, ако за $\forall p_1, p_2 \in \text{States}$ и $\forall q_1, q_2 \in [0, 1], q_1 + q_2 = 1$



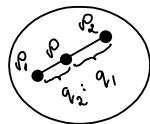
$\Rightarrow p = q_1 p_1 + q_2 p_2 \in \text{States}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{в геометрията - изпъкнала линейна комбинация} \\ \text{с тегла } q_1, q_2 \end{array} \right.$
това се нарича: $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{в квант. теория - смес на състояния с тегла } q_1, q_2 \end{array} \right.$

Точките на изпъкнало множество, които не могат да се представят в нетривиална изпъкнала комбинация (т.е., с нетривиални тегла $q_1, q_2 \neq 0$ и 1) се наричат в геометрията **екстремални** точки, а в квантовата теория - **чисти състояния**.

Това, което в началото на курса бяхме сложили, като аксиома, сега може да се докаже:

Теорема. Множеството на състоянията е затворено изпъкнало подмножество на линейното пространство на всички функции $\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}$.

Припомняме: States ще бъде изпъкнало подмножество на $\{\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}\}$, ако за $\forall p_1, p_2 \in \text{States}$ и $\forall q_1, q_2 \in [0, 1], q_1 + q_2 = 1$



$\Rightarrow p = \underbrace{q_1 p_1 + q_2 p_2}_{\text{това се нарича:}} \in \text{States} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{в геометрията - изпъкнала линейна комбинация} \\ \text{с тегла } q_1, q_2 \\ \text{в квант. теория - смес на състояния с тегла } q_1, q_2 \end{array} \right.$

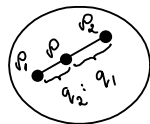
Точките на изпъкнало множество, които не могат да се представят в нетривиална изпъкнала комбинация (т.е., с нетривиални тегла $q_1, q_2 \neq 0$ и 1) се наричат в геометрията **екстремални** точки, а в квантовата теория - **чисти състояния**.

Значение: 1) това са максимално изчистени от неопределеност състояния.

Това, което в началото на курса бяхме сложили, като аксиома, сега може да се докаже:

Теорема. Множеството на състоянията е затворено изпъкнало подмножество на линейното пространство на всички функции $\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}$.

Припомняме: States ще бъде изпъкнало подмножество на $\{\text{Events} \rightarrow \mathbb{R}\}$, ако за $\forall p_1, p_2 \in \text{States}$ и $\forall q_1, q_2 \in [0, 1]$, $q_1 + q_2 = 1$



$\Rightarrow p = q_1 p_1 + q_2 p_2 \in \text{States}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{в геометрията - изпъкнала линейна комбинация} \\ \text{с тегла } q_1, q_2 \\ \text{това се нарича: } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{в квант. теория - смес на състояния с тегла } q_1, q_2 \end{array} \right.$

Точките на изпъкнало множество, които не могат да се представят в нетривиална изпъкнала комбинация (т.е., с нетривиални тегла $q_1, q_2 \neq 0$ и 1) се наричат в геометрията **екстремални** точки, а в квантовата теория - **чисти състояния**.

Значение: 1) това са максимално изчистени от неопределеност състояния.

2) Те пораждат (по т.нар. теорема на Крейн-Милман) всички състояния при смесване.

I. Ниво на събитие. Етафна структура на събитията. Ранг на системата

^

I. Ниво на събитие. Етафна структура на събитията. Ранг на системата

- Събитието Q има ниво n , ако за всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$ имаме $m \leq n$,
 $0 \neq Q_1 \neq \dots \neq Q_{m-1} \neq Q$ $n = \max m$

I. Ниво на събитие. Етафна структура на събитията. Ранг на системата

- Събитието Q има ниво n , ако за всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$ имаме $m \leq n$,
 $0 \neq Q_1 \neq \dots \neq Q_{m-1} \neq Q$ $n = \max m$
- В орто-модулярни решетки, каквато е $\mathcal{E}vents$, нивата формират етафи: доказва се, че всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$, която не може да се разшири, т.е., всеки $0 \neq Q_1 \neq \dots \neq Q_{m-1} \neq Q$ нейн елемент покрива предходния, има една и съща дължина = нивото на Q .

(Нарича се свойство на Жордан-Холдер / Jordan - Hoelder)

I. Ниво на събитие. Етажна структура на събитията. Ранг на системата

- Събитието Q има ниво n , ако за всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$ имаме $m \leq n$,
 $0 \neq Q_1 \neq \dots \neq Q_{m-1} \neq Q$ $n = \max m$
- В орто-модулярни решетки, каквато е Events , нивата формират етажи: доказва се, че всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$, която не може да се разшири, т.е., всеки $0 \neq Q_1 \neq \dots \neq Q_{m-1} \neq Q$ нейн елемент покрива предходния, има една и съща дължина = нивото на Q .

(Нарича се свойство на Жордан-Холдер / Jordan - Hoelder)

Така: събитието Q покрива събитието $P \iff$ нивото на $Q = 1 +$ нивото на P .

I. Ниво на събитие. Етажна структура на събитията. Ранг на системата

- Събитието Q има ниво n , ако за всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$ имаме $m \leq n$,
 $0 \neq Q, \neq \neq Q_{m-1} \neq Q$ $n = \max m$
- В орто-модуларни решетки, каквато е $\mathcal{E}vents$, нивата формират етажи: доказва се, че всяка верига $\hat{0} \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_{m-1} \leq Q$, която не може да се разшири, т.е., всеки $0 \neq Q, \neq \neq Q_{m-1} \neq Q$ нейн елемент покрива предходния, има една и съща дължина = нивото на Q .

(Нарича се свойство на Жордан-Холдер / Jordan - Hoelder)

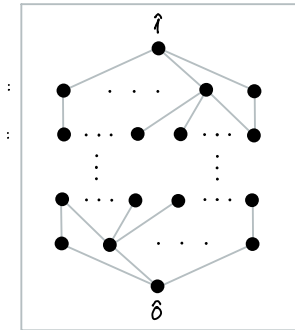
Така: събитието Q покрива събитието $P \iff$ нивото на $Q = 1 +$ нивото на P .

За $P \leq Q$: нивото на $Q \setminus P =$ нивото на $P -$ нивото на $\hat{Q}$

в частност: нивото на $Q^\perp = \underbrace{\text{нивото на } \hat{1}}_{:= \text{ранг на системата}} - \text{нивото на } \hat{Q}$

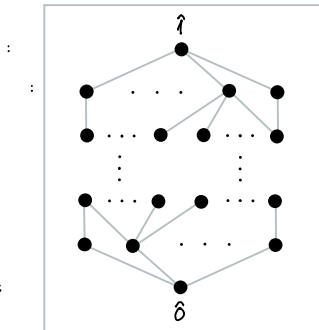
(понеже $Q^\perp = \hat{1} \setminus Q$)

$:=$ ранг на системата



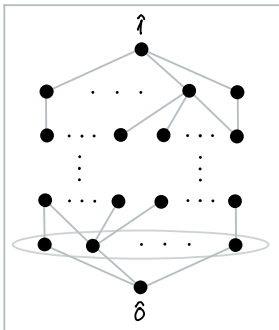
Диаграма на Хасе / Hasse : два елемента са свързани с вертикална черта, ако горният покрива долния

eraф 0 :



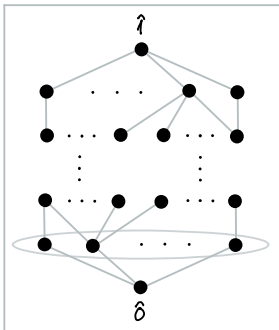
eraф 1 :

eraф 0 :



етап 1 :

етап 0 :



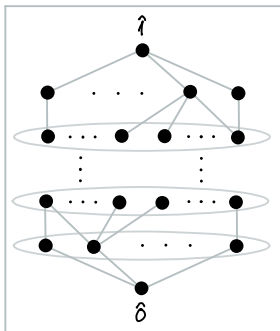
елементарни събития = атоми на Events

етап $N-2$: $\vdots$

етап 2:

етап 1:

етап 0:



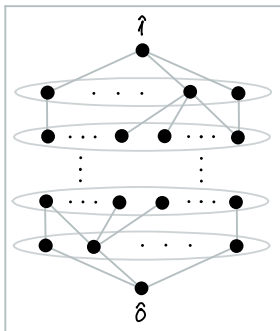
елементарни събития = атоми на Events

етап $N-1$:етап $N-2$: $\vdots$

етап 2 :

етап 1 :

етап 0 :



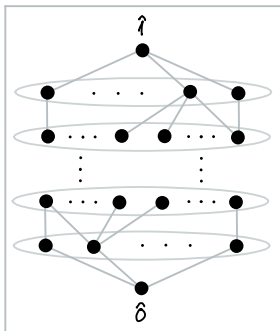
елементарни събития = атоми на Events

етап N :етап $N-1$:етап $N-2$: $\vdots$

етап 2 :

етап 1 :

етап 0 :



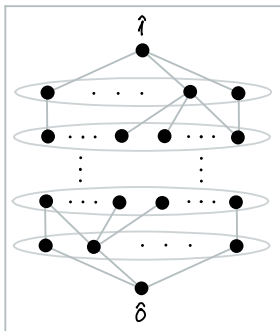
елементарни събития = атоми на Events

етап N :етап $N-1$:етап $N-2$: $\vdots$

етап 2 :

етап 1 :

етап 0 :

Нивото на $\hat{1}$ се нарича ранг на системата

елементарни събития = атоми на Events

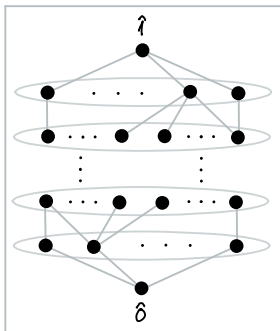
етаж N :етаж $N-1$:етаж $N-2$:

⋮

етаж 2 :

етаж 1 :

етаж 0 :

Нивото на $\hat{1}$ се нарича ранг на системата

Дијаграма на Хасе / Hasse : два елемента са свързани
с вертикална черта, ако горният покрива долния

елементарни събития = атоми на Events

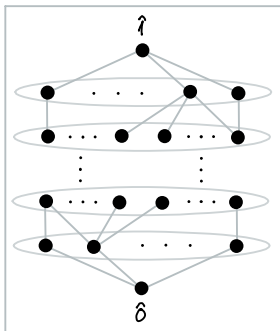
етап N :етап $N-1$:етап $N-2$:

⋮

етап 2 :

етап 1 :

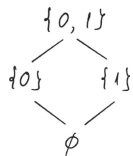
етап 0 :

Нивото на $\hat{I}$ се нарича ранг на системата

Диаграма на Хасе / Hasse : два елемента са свързани с вертикална черта, ако горният покрива долния

елементарни събития = атоми на Events

класически бит:

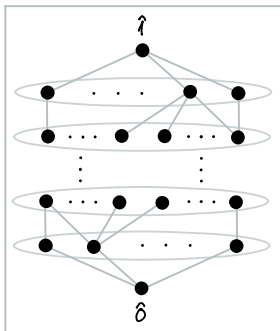


етап N :етап $N-1$:етап $N-2$: $\vdots$

етап 2:

етап 1:

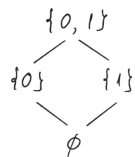
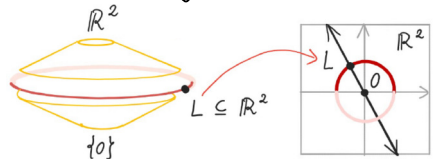
етап 0:

Нивото на $\hat{I}$ се нарича ранг на системата

Диаграма на Хасе / Hasse: два елемента са свързани с вертикална черта, ако горният покрива долния

елементарни събития = атоми на Events

класически бит:

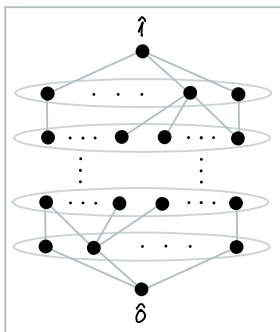
квантов бит (над $\mathbb{R}$):

етап N :етап $N-1$:етап $N-2$: $\vdots$

етап 2:

етап 1:

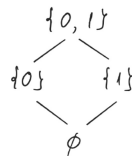
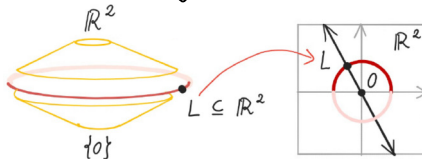
етап 0:

Нивото на $\hat{1}$ се нарича ранг на системата

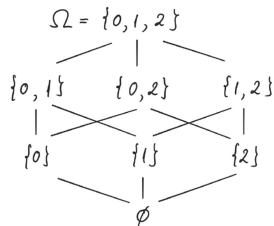
Диаграма на Хасе / Hasse: два елемента са свързани с вертикална черта, ако горният покрива долния

елементарни събития = атоми на Events

класически бит:

квантов бит (над $\mathbb{R}$):

класическа система от ниво 3



2. Подсистеми . Надсистеми

2. Подсистеми . Надсистеми

- Подсистема на система с орто-решетка на събитията $\mathcal{E}vents$ се определя от нейна под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ (припомнете: орто-решетката на събитията определя цялата структура, в частност: $States' = Prob. Dist. (\mathcal{E}vents')$).

2. Подсистеми . Надсистеми

- Подсистема на система с орто-решетка на събитията $\mathcal{E}vents$ се определя от нейна под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ (припомнете: орто-решетката на събитията определя цялата структура, в частност: $States' = Prob. Dist. (\mathcal{E}vents')$).
- Под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ е подмножество, което заедно с $\forall P, Q \in \mathcal{E}vents'$ съдържа и $P \wedge Q, P \vee Q, P^\perp$. В частност, $0 = P \wedge P^\perp \in \mathcal{E}vents'$ и $1 \in \mathcal{E}vents'$.

2. Подсистеми . Надсистеми

- Подсистема на система с орто-решетка на събитията $\mathcal{E}vents$ се определя от нейна под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ (припомнете: орто-решетката на събитията определя цялата структура, в частност: $States' = Prob.Dist.(\mathcal{E}vents')$).
- Под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ е подмножество, което заедно с $\forall P, Q \in \mathcal{E}vents'$ съдържа и $P \wedge Q, P \vee Q, P^\perp$. В частност, $0 = P \wedge P^\perp \in \mathcal{E}vents'$ и $1 \in \mathcal{E}vents'$.
- Смисъл: подсистемата е подмножество от събития, но със старите логически операции. Това ще бъде изходна позиция при теорията на съставните системи. Но това не е всичко.

2. Подсистеми . Надсистеми

- Подсистема на система с орто-решетка на събитията $\mathcal{E}vents$ се определя от нейна под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ (припомнете: орто-решетката на събитията определя цялата структура, в частност: $States' = Prob.Dist.(\mathcal{E}vents')$).
- Под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ е подмножество, което заедно с $\forall P, Q \in \mathcal{E}vents'$ съдържа и $P \wedge Q, P \vee Q, P^\perp$. В частност, $0 = P \wedge P^\perp \in \mathcal{E}vents'$ и $1 \in \mathcal{E}vents'$.
- Смисъл: подсистемата е подмножество от събития, но със старите логически операции. Това ще бъде изходна позиция при теорията на съставните системи. Но това не е всичко.
- Над-система на система е такава, за която последната е подсистема.

2. Подсистеми . Надсистеми

- Подсистема на система с орто-решетка на събитията $\mathcal{E}vents$ се определя от нейна под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ (припомнете: орто-решетката на събитията определя цялата структура, в частност: $States' = Prob.Dist.(\mathcal{E}vents')$).
- Под-орто-решетка $\mathcal{E}vents' \subseteq \mathcal{E}vents$ е подмножество, което заедно с $\forall P, Q \in \mathcal{E}vents'$ съдържа и $P \wedge Q, P \vee Q, P^\perp$. В частност, $0 = P \wedge P^\perp \in \mathcal{E}vents'$ и $1 \in \mathcal{E}vents'$.
- Смисъл: подсистемата е подмножество от събития, но със старите логически операции. Това ще бъде изходна позиция при теорията на съставните системи. Но това не е всичко.
- Над-система на система е такава, за която последната е подсистема.
Това описва: $\mathcal{E}vents_1 \subseteq \mathcal{E}vents_2 \subseteq \mathcal{E}vents_3 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}vents_\infty$
— процеса на преуизиране на измерванията и също,
процеса на "надграждане" на изчисленията.

3. Булеви алгебри и подалгебри . Експерименти на системата

3. Булеви алгебри и подалгебри . Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват *дистрибутивните закони* :

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват *дистрибутивните закони*:
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват *дистрибутивните закони*:
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.
- Подсистема, определена от булева подалгебра на *Events* се нарича експеримент.

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват *дистрибутивните закони*:
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.
- Подсистема, определена от булева подалгебра на *Events* се нарича експеримент.
- Чрез теорията на булевите алгебри се доказва, че множеството от събитията на една (крайна) система е булева алгебра $\Leftrightarrow$ системата е класическа.

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват *дистрибутивните закони*:
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.
- Подсистема, определена от булева подалгебра на *Events* се нарича експеримент.
- Чрез теорията на булевите алгебри се доказва, че множеството от събитията на една (крайна) система е булева алгебра $\Leftrightarrow$ системата е класическа.
- Всъщност, атомите на булевата алгебра $\mathcal{P}(\Omega)$ са синглетоните $\{\omega\}$ при $\omega \in \Omega$ и така те са 1-1 съответствие с Ω .

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват **дистрибутивните закони**:
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.
- Подсистема, определена от булева подалгебра на *Events* се нарича експеримент.
- Чрез теорията на булевите алгебри се доказва, че множеството от събитията на една (крайна) система е булева алгебра $\Leftrightarrow$ системата е класическа.
- Всъщност, атомите на булевата алгебра $\mathcal{P}(\Omega)$ са синглетоните $\{\omega\}$ при $\omega \in \Omega$ и така те са 1-1 съответствие с Ω .
- Елементарни събития (алтернативи) на експеримент са атомите на булевата му подалгебра

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват **дистрибутивните закони**:
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.
- Подсистема, определена от булева подалгебра на *Events* се нарича експеримент.
- Чрез теорията на булевите алгебри се доказва, че множеството от събитията на една (крайна) система е булева алгебра $\Leftrightarrow$ системата е класическа.
- Всичко, атомите на булевата алгебра $\mathcal{P}(\Omega)$ са синглетоните $\{\omega\}$ при $\omega \in \Omega$ и така те са 1-1 съответствие с Ω .
- Елементарни събития (алтернативи) на експеримент са атомите на булевата му подалгебра. Те може да не са елементарни събития на *Events* обаче!

3. Булеви алгебри и подалгебри . Експерименти на системата

- Примери на булеви подалгебри (експерименти) :

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Примери на булеви подалгебри (експерименти) :

- във всяка орто-решетка (в т.ч. и *Events*) и всеки нейн елемент P
 $\{\hat{0}, \hat{1}\}$ и $\{\hat{0}, P, P^\perp, \hat{1}\}$ са булеви подалгебри от ниво 1 и 2, съотв.

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Примери на булеви подалгебри (експерименти) :

- във всяка орто-решетка (в т.ч. и Events) и всеки нейн елемент P $\{\hat{0}, \hat{1}\}$ и $\{\hat{0}, P, P^\perp, \hat{1}\}$ са булеви подалгебри от ниво 1 и 2, съотв.

Първата отговаря на тривиалния, най-малък експеримент, а втората отговаря на най-малкия експеримент, при който се тества събитието P .

3. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Примери на булеви подалгебри (експерименти) :

- във всяка орто-решетка (в т.ч. и Events) и всеки нейн елемент P $\{\hat{0}, \hat{1}\}$ и $\{\hat{0}, P, P^\perp, \hat{1}\}$ са булеви подалгебри от ниво 1 и 2, съотв.

Първата отговаря на тривиалния, най-малък експеримент, а втората отговаря на най-малкия експеримент, при който се тества събитието P .

- за всяка орто-**модуларна** решетка (в т.ч. и Events) и всеки два елемента $P \preceq Q$ т.е. $\hat{0} \neq P \neq Q \neq \hat{1}$, подмножеството $\{\hat{0}, P, Q, P^\perp, Q^\perp, Q \setminus P, P^\perp \setminus Q^\perp, \hat{1}\}$ е булева подалгебра от ниво 3.

4. Конфигурируемост на събития

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутирани или още съвместни, ако могат да утасват в общ експеримент.

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутирани или още съвместни, ако могат да утасват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \text{Events}$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на Events .

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутиращи или още съвместни, ако могат да утасоват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \text{Events}$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на Events .
- Доказва се, че P и Q комутират $\Leftrightarrow \begin{cases} P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^\perp) \\ Q = (P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q) \end{cases}$

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутиращи или още съвместни, ако могат да утасоват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \text{Events}$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на Events .
- Доказва се, че P и Q комутират $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^\perp) \\ Q = (P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q) \end{cases}$$

използва орто-модулярността

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутиращи или още съвместни, ако могат да утасоват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \text{Events}$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на Events .
- Доказва се, че P и Q комутират $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^\perp) \\ Q = (P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q) \end{cases}$$

използва орто-модулярността


- В частност, ако $P \preceq Q$, то P и Q комутират.

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутиращи или още съвместни, ако могат да утасоват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \text{Events}$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на Events .
- Доказва се, че P и Q комутират $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^\perp) \\ Q = (P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q) \end{cases}$$

използва орто-модулярността


- В частност, ако $P \preceq Q$, то P и Q комутират.
- Доказва се, че в орто-модулярни решетки: няколко елемента комутират, ако всеки два комутират.

4. Комутируемост на събития

- Събитията P и Q се наричат комутиращи или още съвместни, ако могат да утасоват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \text{Events}$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на Events .
- Доказва се, че P и Q комутират $\Leftrightarrow \begin{cases} P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^\perp) \\ Q = (P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q) \end{cases}$

използва орто-модулярността


- В частност, ако $P \preceq Q$, то P и Q комутират.
- Доказва се, че в орто-модулярни решетки: няколко елемента комутират, ако всеки два комутират.
- Внимание: релацията "комутируемост" е симетрична, но в общия случай не е транзитивна! (Контрапример - по-късно.)

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q се наричат дизюнктивни $\Leftrightarrow \begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q са наричат дизюнктивни $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$
още: взаимно изключващи се

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q са наричат дизюнктивни $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$
 още: *взаимно изключващи се*

В класическия случай е достатъчно само $P \wedge Q = \hat{0}$ но не и в квантовия.

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q са наричат дизюнктивни $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$
още: взаимно изключващи се

В класическия случай е достатъчно само $P \wedge Q = \hat{0}$, но не и в квантовия.
 За n събития: $A_1, \dots, A_n$ са дизюнктивни, ако са две по две дизюнктивни.

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q ^{още: взаимно изключващи се} дизюнктивни $\Leftrightarrow \begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$

В класическия случай е достатъчно само $P \wedge Q = \hat{0}$, но не и в квантовия.
За n събития: $Q_1, \dots, Q_n$ са дизюнктивни, ако са две по две дизюнктивни.

- Ако за събития имаме $P = Q_1 \vee \dots \vee Q_n$ и $Q_1, \dots, Q_n$ са ненулеви и дизюнктивни тогава пишем: $P = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$ и казваме, че имаме дизюнктивно разбиване на P .

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q се наричат дизюнктивни $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$
 още: *взаимно изключващи се*

В класическия случай е достатъчно само $P \wedge Q = \hat{0}$, но не и в квантовия.
 За n събития: $Q_1, \dots, Q_n$ са дизюнктивни, ако са две по две дизюнктивни.

- Ако за събития имаме $P = Q_1 \vee \dots \vee Q_n$ и $Q_1, \dots, Q_n$ са ненулеви и дизюнктивни тогава пишем: $P = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$ и казваме, че имаме дизюнктивно разбиване на P .
 Ако $P = \hat{1}$, то казваме, че имаме (дизюнктивно) разбиване на $\hat{1}$.

5. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията P и Q се наричат дизюнктивни $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни} \\ \text{(комутират)} \end{cases}$
 още: *взаимно изключващи се*

В класическия случай е достатъчно само $P \wedge Q = \hat{0}$, но не и в квантовия.
 За n събития: $Q_1, \dots, Q_n$ са дизюнктивни, ако са две по две дизюнктивни.

- Ако за събития имаме $P = Q_1 \vee \dots \vee Q_n$ и $Q_1, \dots, Q_n$ са ненулеви и дизюнктивни тогава пишем: $P = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$ и казваме, че имаме дизюнктивно разбиване на P .
 Ако $P = \hat{1}$, то казваме, че имаме (дизюнктивно) разбиване на $\hat{1}$.
- Теорема. Имаме 1-1 съответствие между експериментите (т.е., булевите подалгебри на Events) и разбиванията на $\hat{1}$, при което събитията в разбиването на $\hat{1}$ се явяват елементарните събития на експеримента.

6. Максимални експерименти

6. Максимални експерименти

- При ситуация, когато за два експеримента имаме включване $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ за съответните булеви подалгебри, това означава, че експеримента $\mathcal{B}_1$ е по-груб от $\mathcal{B}_2$ или също, че $\mathcal{B}_2$ е по-фин експеримент от $\mathcal{B}_1$.

6. Максимални експерименти

- При ситуация, когато за два експеримента имаме включване $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ за съответните булеви подалгебри, това означава, че експеримента $\mathcal{B}_1$ е по-груб от $\mathcal{B}_2$ или също, че $\mathcal{B}_2$ е по-фин експеримент от $\mathcal{B}_1$.
- Максимален експеримент: такъв, който не може да се преуизира (разшири) повече. Тоест, това е максимална булева подалгебра и съдържа максимална информация, която можем да получим в едно наблюдение за системата.

6. Максимални експерименти

- При ситуация, когато за два експеримента имаме включване $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ за съответните булеви подалгебри, това означава, че експеримента $\mathcal{B}_1$ е по-груб от $\mathcal{B}_2$ или също, че $\mathcal{B}_2$ е по-фин експеримент от $\mathcal{B}_1$.
- Максимален експеримент: такъв, който не може да се преуизира (разшири) повече. Тоест, това е максимална булева подалгебра и съдържа максимална информация, която можем да получим в едно наблюдение за системата. Ако системата е класическа, то Events е булева алгебра и това е единствената максимална булева подалгебра. В противен случай - няма единствена максимална.

6. Максимални експерименти

- При ситуация, когато за два експеримента имаме включване $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ за съответните булеви подалгебри, това означава, че експеримента $\mathcal{B}_1$ е по-груб от $\mathcal{B}_2$ или също, че $\mathcal{B}_2$ е по-фин експеримент от $\mathcal{B}_1$.
- Максимален експеримент: такъв, който не може да се преуизира (разшири) повече. Тоест, това е максимална булева подалгебра и съдържа максимална информация, която можем да получим в едно наблюдение за системата.
Ако системата е класическа, то Events е булева алгебра и това е единствената максимална булева подалгебра. В противен случай - няма единствена максимална. Тоест, за неклассически системи максималната информация никога не е пълна!
Тогава различните максимални наблюдения се явяват "взаимно допълващи се".

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти : нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие .

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически шинлетон.

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически синглетон. В противен случай, $P_i^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow \exists$ елементарно събитие $P_2 \preceq P_1^\perp$ (аксиома).

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{I}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически синглетон. В противен случай, $P_i^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow \exists$ елементарно събитие $P_2 \preceq P_1^\perp$ (актома). Ако $P_1 \vee P_2 = \hat{I}$, то системата е от ниво 2.

6. Максимални експерименти

- Конструироване на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически шгилетон. В противен случай, $P_i^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow \exists$ елементарно събитие $P_2 \preceq P_1^\perp$ (актома). Ако $P_1 \vee P_2 = \hat{1}$, то системата е от ниво 2. В противен случай $(P_1 \vee P_2)^\perp \neq \hat{0}$ и $\exists$ елементарно събитие $P_3 \preceq (P_1 \vee P_2)^\perp$.

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически шгилетон. В противен случай, $P_i^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow \exists$ елементарно събитие $P_2 \preceq P_1^\perp$ (актома). Ако $P_1 \vee P_2 = \hat{1}$, то системата е от ниво 2. В противен случай $(P_1 \vee P_2)^\perp \neq \hat{0}$ и $\exists$ елементарно събитие $P_3 \preceq (P_1 \vee P_2)^\perp$. И т.н., получаваме елементарни събития $P_1, P_2, \dots, P_N$, за които $P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_N = \hat{1}$.

6. Максимални експерименти

- Конструироване на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически шгилетон.

В противен случай, $P_i^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow \exists$ елементарно събитие $P_2 \preceq P_1^\perp$ (актома).

Ако $P_1 \vee P_2 = \hat{1}$, то системата е от ниво 2. В противен случай $(P_1 \vee P_2)^\perp \neq \hat{0}$ и $\exists$ елементарно събитие $P_3 \preceq (P_1 \vee P_2)^\perp$. И т.н., полугаваме елементарни събития $P_1, P_2, \dots, P_N$, за които $P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_n = \hat{1}$. Показва се, че това са елементарните събития на максимален експеримент.

6. Максимални експерименти

- Конструирание на максимални експерименти: нека $P_i \in \text{Events}$ е елементарно събитие. Ако $P_i = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е. класически шинглетон. В противен случай, $P_i^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow \exists$ елементарно събитие $P_2 \preceq P_1^\perp$ (актома). Ако $P_1 \vee P_2 = \hat{1}$, то системата е от ниво 2. В противен случай $(P_1 \vee P_2)^\perp \neq \hat{0}$ и $\exists$ елементарно събитие $P_3 \preceq (P_1 \vee P_2)^\perp$. И т.н., получаваме елементарни събития $P_1, P_2, \dots, P_N$, за които $P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_N = \hat{1}$. Показва се, че това са елементарните събития на максимален експеримент.
- По-нататък ще покажем, че в нашите основни модели на квантови системи, определени от хилбертови пространства, максимален експеримент се определя от ортонормиран базис (оттам идва изрече "измерване в базис").

7. Допълнителна литература

- [http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk_on_Quantum_Logic/Birkhoff_G.,_von%20Neumann_J.,_The_Logic_of_Quantum_Mechanics,_Ann_Math_2nd_Ser_v37_No4_\(1936\)_pp823-843_cropped.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk_on_Quantum_Logic/Birkhoff_G.,_von%20Neumann_J.,_The_Logic_of_Quantum_Mechanics,_Ann_Math_2nd_Ser_v37_No4_(1936)_pp823-843_cropped.pdf)

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936



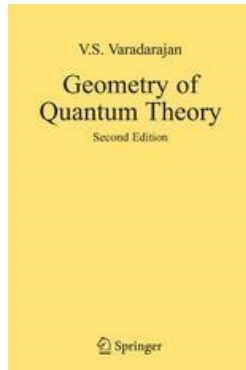
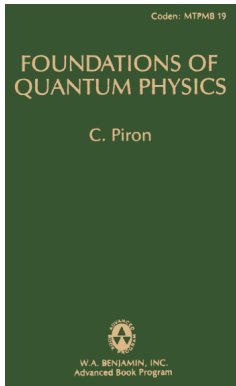
Garrett Birkhoff
(1911 – 1996)



John von Neumann
(1903 – 1957)

7. Допълнителна литература

- http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/literature/Piron_C.,_Foundations_Of_Quantum_Physics_cropped.pdf

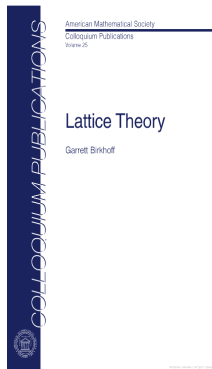


http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/literature/Varadarajan_V.S.,_Geometry_of_Quantum_Theory_cropped.pdf

7. Допълнителна литература

• Теория на решетките

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/literature/Birkhoff_G.,_Lattice_Theory_cropped.pdf



1st ed – 1940

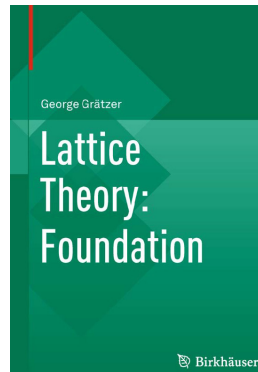
2nd ed - 1948

3d ed – 1973

1st ed – 1978

.....

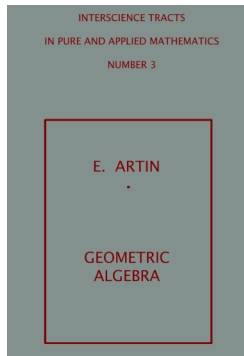
2010



http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/literature/Gratzer_G.,_Lattice_theory_Foundation_cropped.pdf

7. Допълнителна литература

- Проективна геометрия



<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk on Quantum Logic/Artin E., Geometric Algebra cropped.pdf>

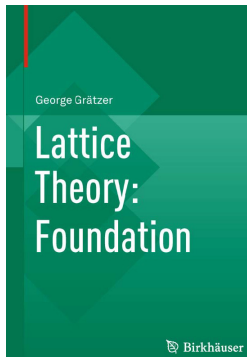
CHAPTER II

Affine and Projective Geometry

1. Introduction and the first three axioms	51
2. Dilatations and translations	54
● 3. Construction of the field	58
● 4. Introduction of coordinates	63
5. Affine geometry based on a given field	66
● 6. Desargues' theorem	70
● 7. Pappus' theorem and the commutative law	73
8. Ordered geometry	75
9. Harmonic points	79
10. The fundamental theorem of projective geometry	85
11. The projective plane	98

7. Допълнителна литература

• Проективна геометрия



http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk_on_Quantum_Logic/Gratzer_G.,_Lattice_theory_Foundation_cropped.pdf

	Complemented Modular Lattices	373
5.1	Congruences	373
5.2	Modular geometric lattices	373
5.3	Projective spaces	375
5.4	The lattice $PG(D, \mathfrak{m})$	378
5.5	Desargues' Theorem	379
5.6	Arguesian lattices	383
● 5.7	The Coordinatization Theorem	384
5.8	Frink's Embedding Theorem	387
5.9	A weaker version of the arguesian identity	390
5.10	Projective planes	392

8. Най-важното от квантово-логическия подход

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Состоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(1) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(1) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(\hat{1}) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: 0 е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(\hat{1}) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: 0 е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(\hat{1}) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: 0 е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.
- Съвместни (комутиращи) събития = такива, които $\subseteq$ в общ експеримент

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(\hat{1}) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: 0 е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.
- Съвместни (комутиращи) събития = такива, които $\subseteq$ в общ експеримент
- Няколко събития са съвместни $\Leftrightarrow$ те са две по две съвместни

8. Най-важното от квантово-логическия подход

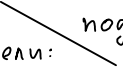
- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $\rho(\hat{1}) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: 0 е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.
- Съвместни (комутиращи) събития = такива, които $\subseteq$ в общ експеримент
- Няколко събития са съвместни $\Leftrightarrow$ те са две по две съвместни
- Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания $P = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$.

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $p \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $p(\hat{1}) = 1$, $p(Q) = p(P) + p(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: 0 е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.
- Съвместни (комутиращи) събития = такива, които $\subseteq$ в общ експеримент
- Няколко събития са съвместни $\Leftrightarrow$ те са две по две съвместни
- Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания $P = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$.
- Експеримент (= булева подалгебра) $\Leftrightarrow$ разбиване на $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$ където $Q_1, \dots, Q_n$ се явяват елементарните събития на експеримента

8. Най-важното от квантово-логическия подход

- $\mathcal{E}vents$ е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $p \in States$ са вероятностни функции върху събитията $P \in \mathcal{E}vents$
 $p(\hat{1}) = 1$, $p(Q) = p(P) + p(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ ($Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: $\hat{0}$ е от ниво 0, елементарните събития са от ниво 1, ниво на $\hat{1} =$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.
- Съвместни (комутиращи) събития = такива, които $\subseteq$ в общ експеримент
- Няколко събития са съвместни $\Leftrightarrow$ те са две по две съвместни
- Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания $P = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$.
- Експеримент (= булева подалгебра) $\Leftrightarrow$ разбиване на $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_n$ където $Q_1, \dots, Q_n$ се явяват елементарните събития на експеримента
- Максимален експеримент $\Leftrightarrow$ такъв за който елементарните му събития са елементарни за цялата система

раздели:  подходи:

- обща статистика
- статистика на съставни системи
- трансформации

● логически подход

лекции 1-4

● алгебричен подход

лекция 4-6

лекции 7

лекция 8

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

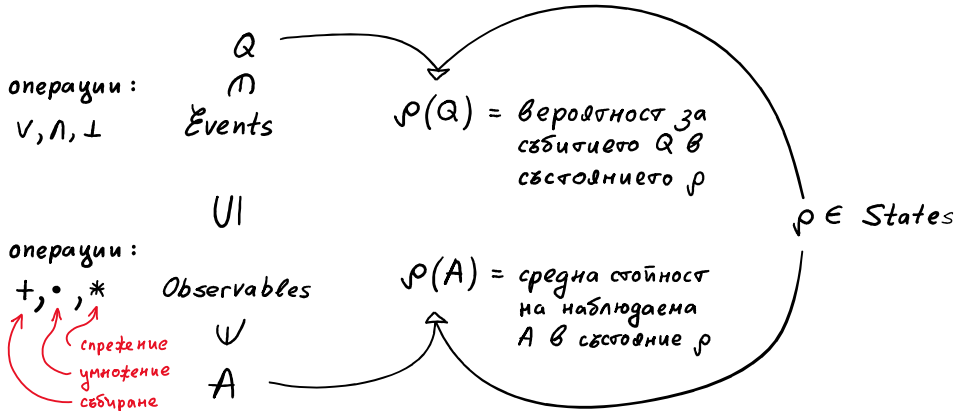
Наблюдатели

Обекти

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти



1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти

Events

States

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти

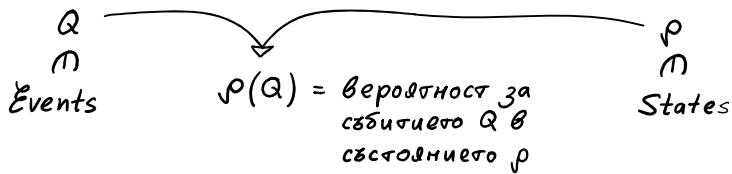
Q
 $\cap$
Events

ρ
 $\cap$
States

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти



1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти

операции :

$\wedge, \vee, \perp$

Q

$\cap$

Events

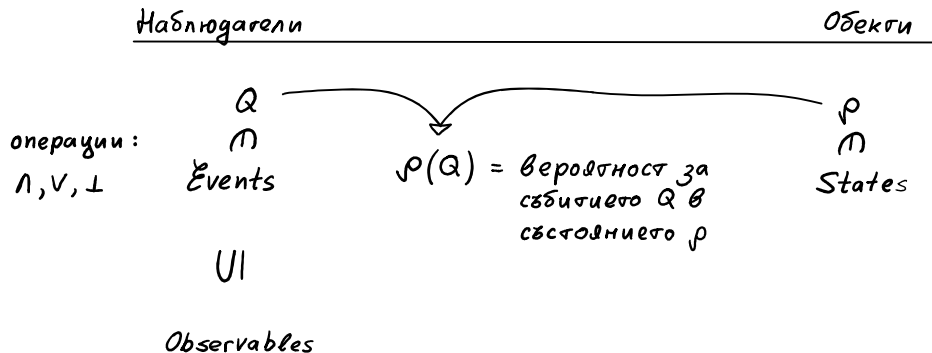
ρ

$\cap$

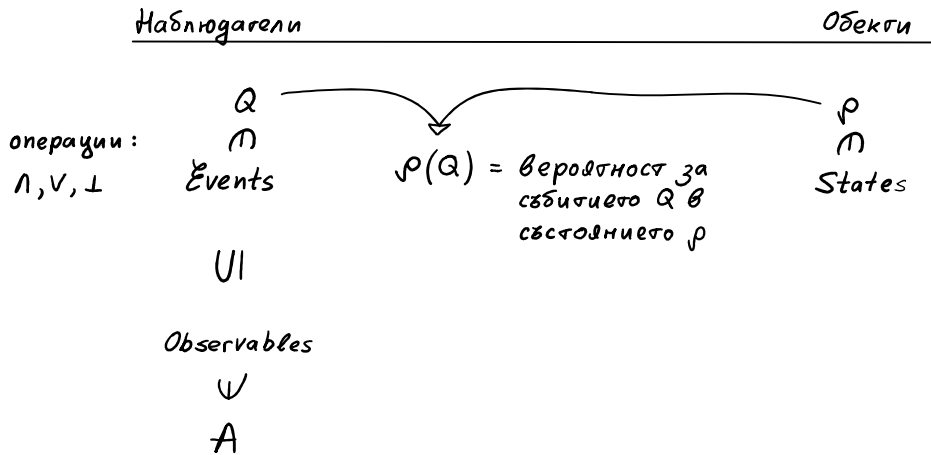
States

$\rho(Q) = \text{вероятност за}$
 $\text{събитието } Q \text{ в}$
 $\text{състоянието } \rho$

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход



1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход



1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти

операции :

$\wedge, \vee, \perp$

Q
 $\cap$
Events

U

Observables

ψ

A

$\rho(Q)$ = вероятност за
събитието Q в
състоянието ρ

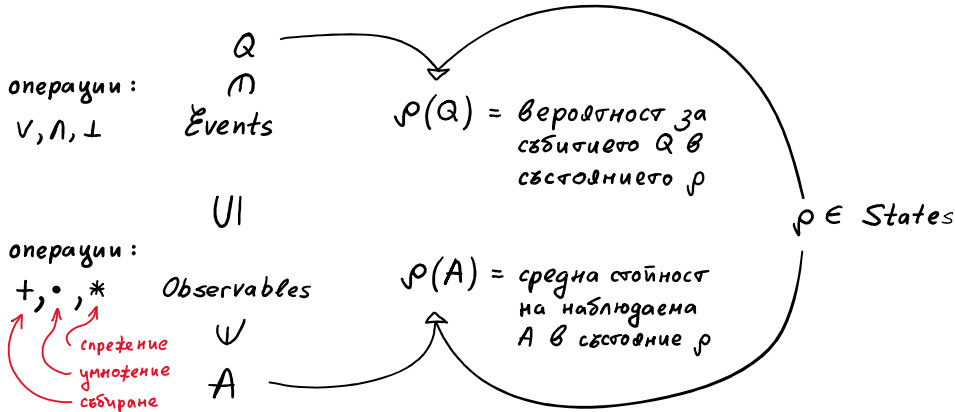
$\rho(A)$ = средна стойност
на наблюдаема
 A в състояние ρ

$\rho \in \text{States}$

1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

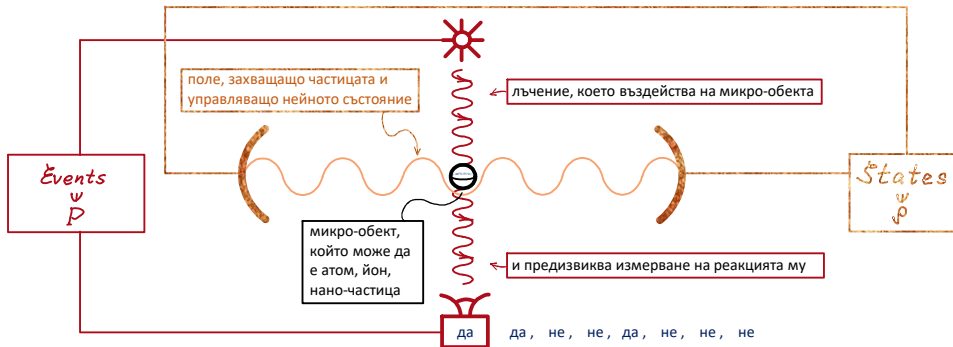
Наблюдатели

Обекти



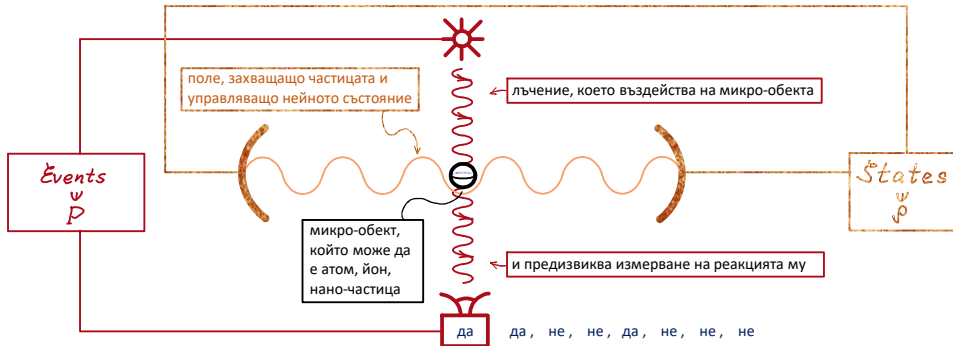
2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми



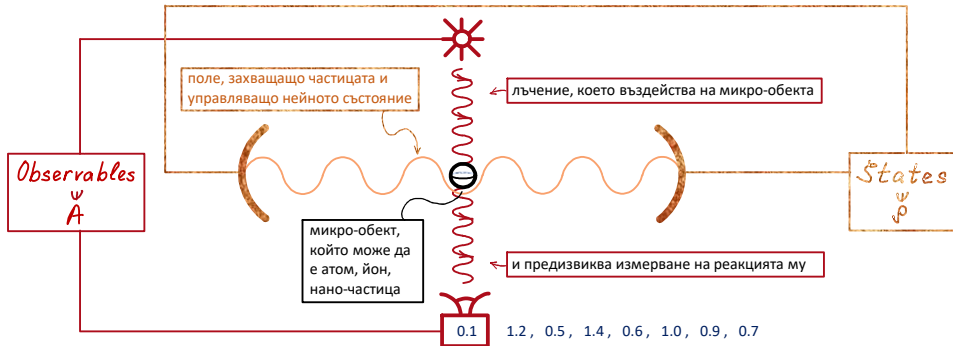
2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.

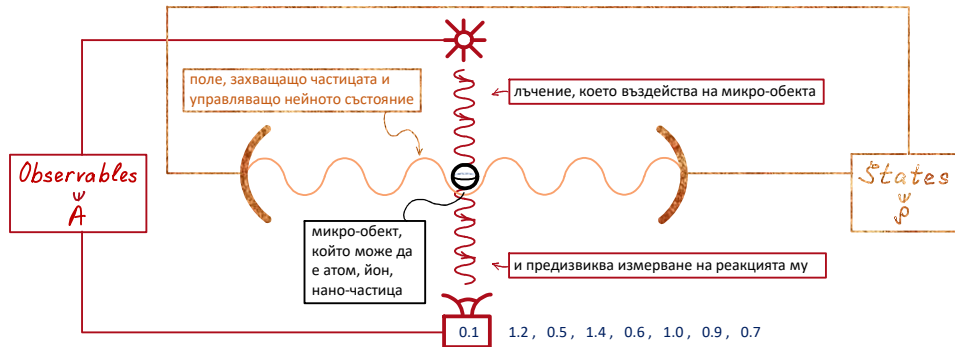


2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.

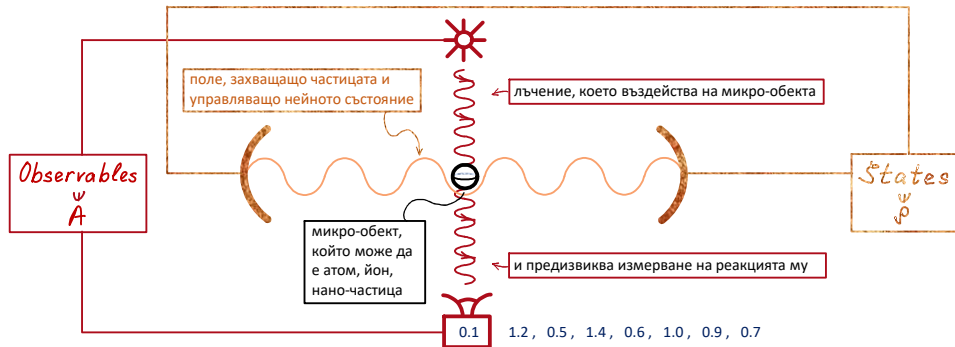


2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема
 Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \langle A \rangle_\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

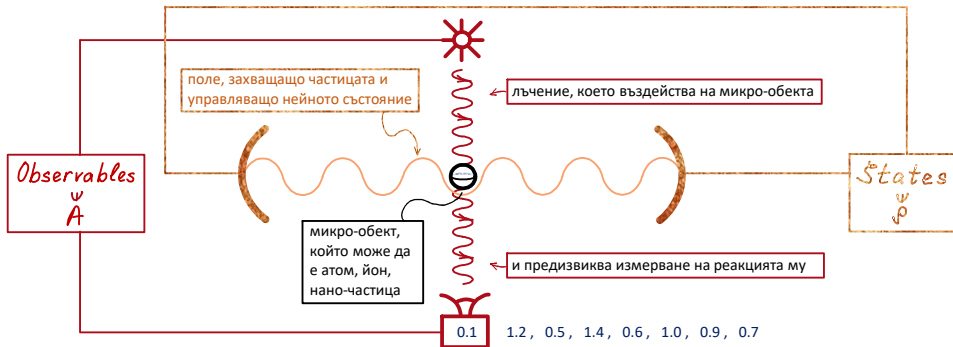
2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема
 Наблюдаемата е експеримент, чиито резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \langle A \rangle_\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

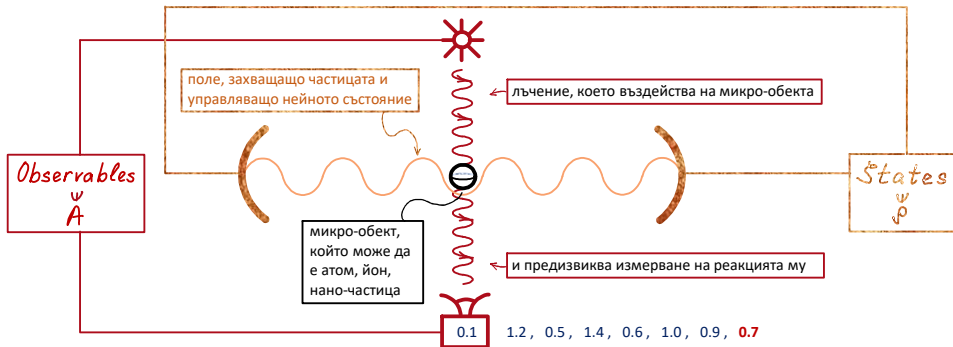
Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{0.7}{1}, \frac{0.7+0.9}{2}, \dots, \frac{0.7+0.9+1.0+0.6+1.4+0.5+1.2+0.1}{8}, \dots \right)$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

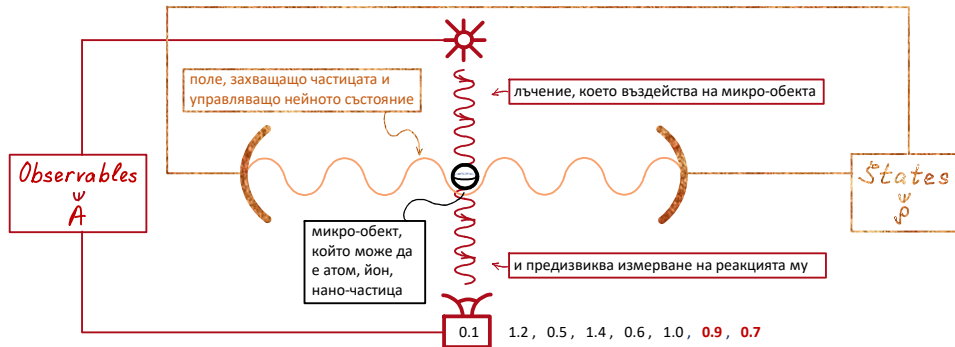
Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{0.7}{1}, \frac{0.7+0.9}{2}, \dots, \frac{0.7+0.9+1.0+0.6+1.4+0.5+1.2+0.1}{8}, \dots \right)$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

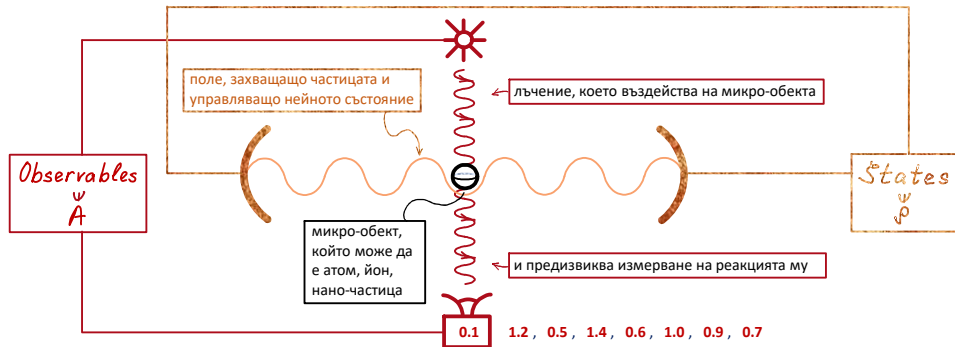
Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{0.7}{1}, \frac{0.7 + 0.9}{2}, \dots, \frac{0.7 + 0.9 + 1.0 + 0.6 + 1.4 + 0.5 + 1.2 + 0.1}{8}, \dots \right)$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

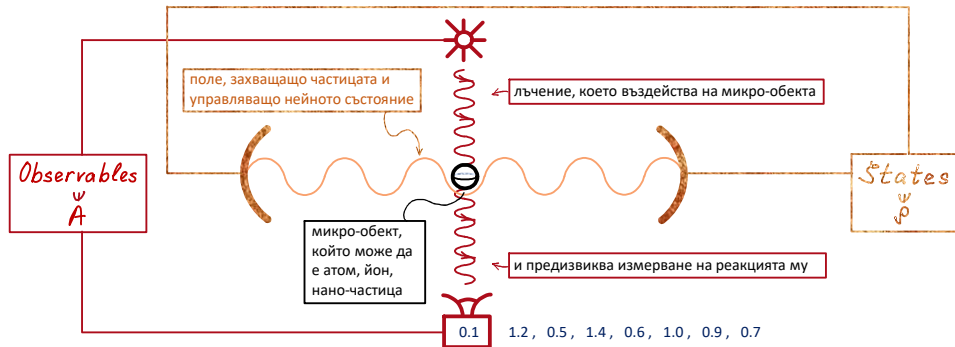
Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{0.7}{1}, \frac{0.7 + 0.9}{2}, \dots, \frac{0.7 + 0.9 + 1.0 + 0.6 + 1.4 + 0.5 + 1.2 + 0.1}{8}, \dots \right)$

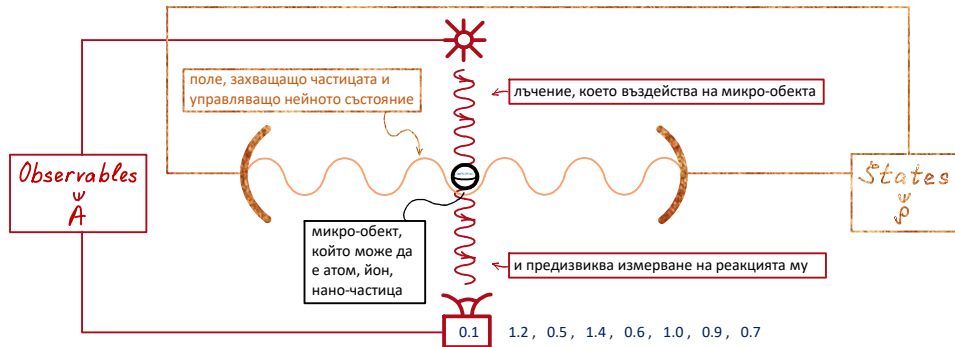
2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема

Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



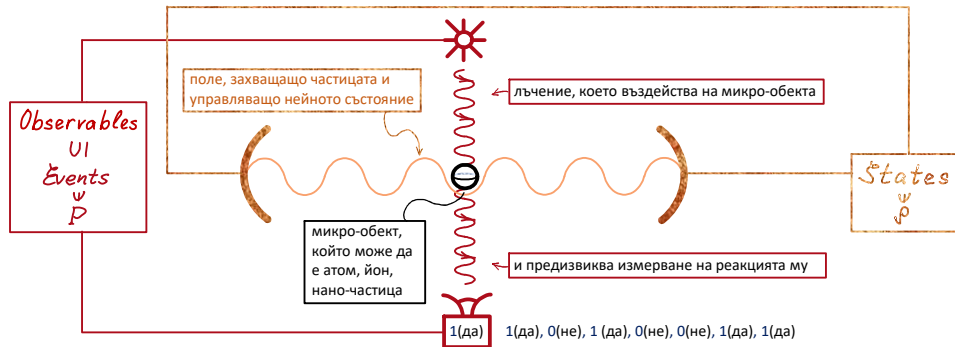
Средна стойност на A в $\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{0.7}{1}, \frac{0.7+0.9}{2}, \dots, \frac{0.7+0.9+1.0+0.6+1.4+0.5+1.2+0.1}{8}, \dots \right)$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаема
 Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



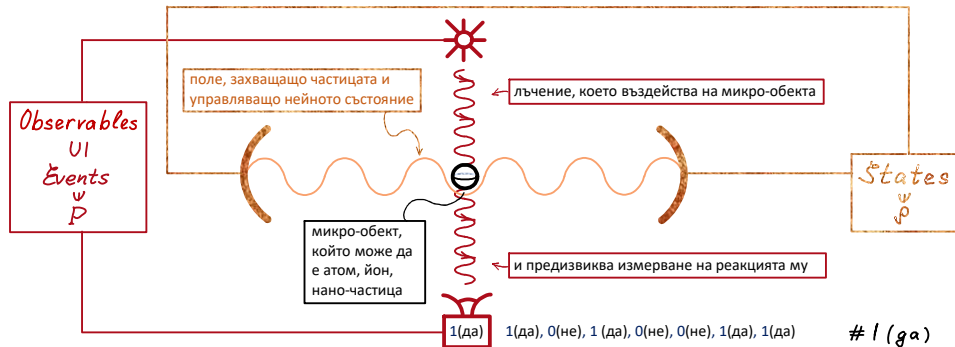
Средна стойност на A в $\rho =: \langle A \rangle_\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).



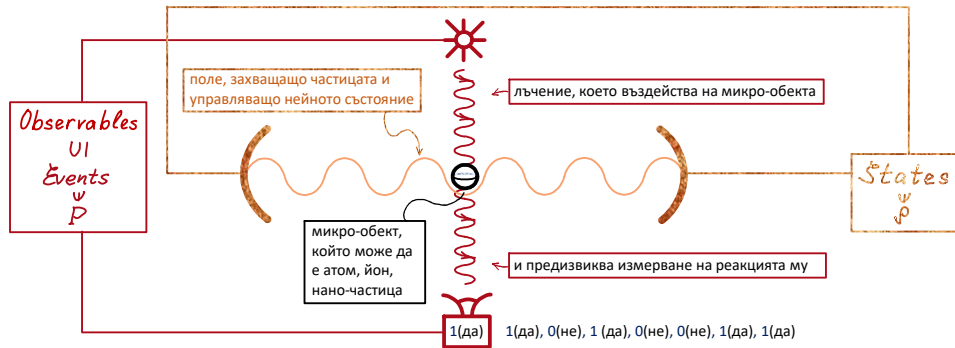
Средна стойност на P в $\rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1(да) и 0(не).



Средна стойност на $P \in \rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).



$$\text{Средна стойност на } P \text{ в } \rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) \equiv \text{Prob}_\rho P$$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаеми

- Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).
- Средната стойност на едно събитие, разглеждано, като наблюдаема е равна на неговата вероятност:

$$\text{Средна стойност на } P \text{ в } \rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_N}^{\#1(\rho a)}}{N} \equiv \text{Prob}_\rho P$$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми

- Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).
- Средната стойност на едно събитие, разглеждано, като наблюдаема е равна на неговата вероятност:

$$\text{Средна стойност на } P \text{ в } \rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_N}^{\#1(\rho a)}}{N} \equiv \text{Prob}_\rho P$$

т.е.е., $\rho: \text{Events} \longrightarrow [0, 1]$ се продължава, като функция

$$\begin{array}{ccc} \text{Events} & \longrightarrow & [0, 1] \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ \text{Observables} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

("диаграмата се затваря до комутативна")

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитието като наблюдаеми

Моля обърнете внимание на поправката в диаграмата, която е оградена по-долу: в алгебричния подход състоянията ρ се разширяват, като функции не само в изходната (дефиниционната) им област:

$$\text{Events} \subseteq \text{Observables},$$

разширява се и областта на стойностите им: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Това е така, понеже средните стойности, за разлика от вероятностите, могат да бъдат произволни реални числа.

$\begin{array}{ccc} \rho: \text{Events} & \longrightarrow & [0, 1] \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ \text{Observables} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$	се продължава, като функция ("диаграмата се затваря до комутативна")
---	--

3. Исторически бележки

3. Исторически бележки

- Не описваме света и неговите закономерности във физиката посредством физическите величини

3. Исторически бележки

- Ние описваме света и неговите закономерности във физиката посредством физическите величини – това са именно наблюдаемите

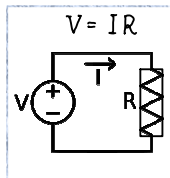
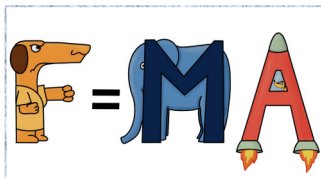
3. Исторически бележки

- Ние описваме света и неговите закономерности във физиката посредством физическите величини – това са именно наблюдаемите
- Физическите закони се формулират, като алгебрични соотношения между наблюдаемите

3. Исторически бележки

- Ние описваме света и неговите закономерности във физиката посредством физическите величини – това са именно наблюденията
- Физическите закони се формулират, като алгебрични соотношения между наблюденията

Например:



1900



Max Planck
1858 – 1947

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

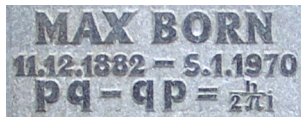
1925



Werner Heisenberg
1901 – 1976

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar$$

1925



1930

THE
PRINCIPLES
OF
QUANTUM MECHANICS

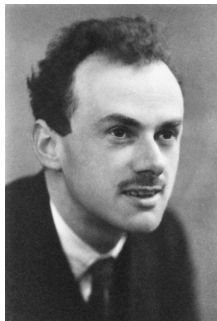
BY

P. A. M. DIRAC

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS
IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

ST. JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE

29 *May* 1930



Paul Dirac

1902 - 1984

1932

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

VON

JOHANN V. NEUMANN

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1932



John von Neumann
1903 – 1957

1934

Pascual Jordan
1902 – 1980



John von Neumann
1903 – 1957



Eugene Wigner
1902 – 1995

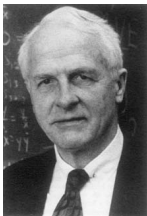
**ON AN ALGEBRAIC GENERALIZATION OF THE QUANTUM
MECHANICAL FORMALISM**

BY P. JORDAN, J. V. NEUMANN, AND E. WIGNER

(Received November 10, 1933)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 35, No. 1, January, 1934

1936



Garrett Birkhoff
1911 – 1996



John von Neumann
1903 – 1957

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

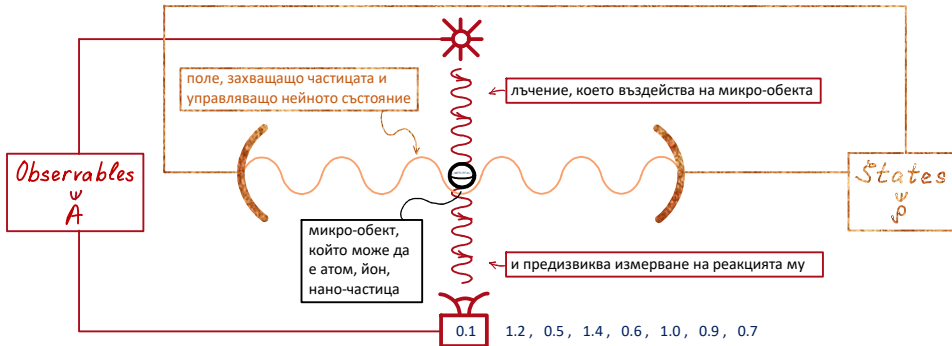
(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

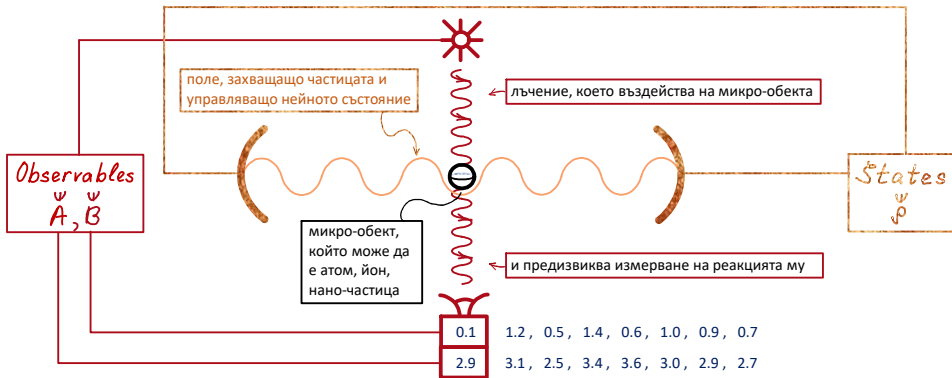
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

Наблюдаемата е експеримент, чиито резултати са числа.



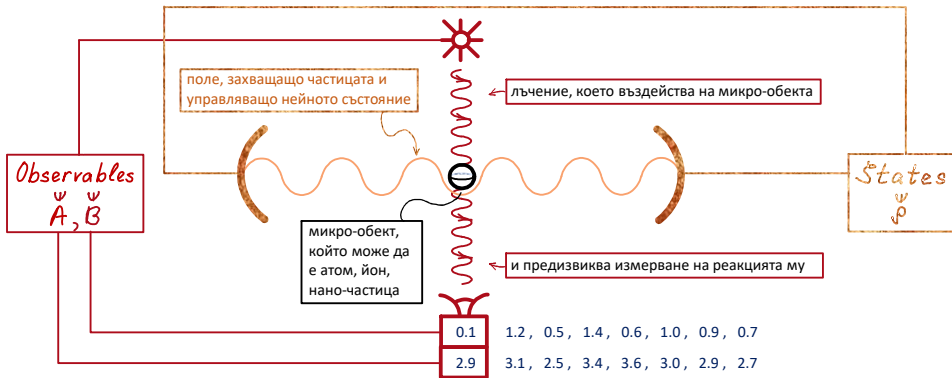
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

Наблюдаемата е експеримент, чиито резултати са числа.



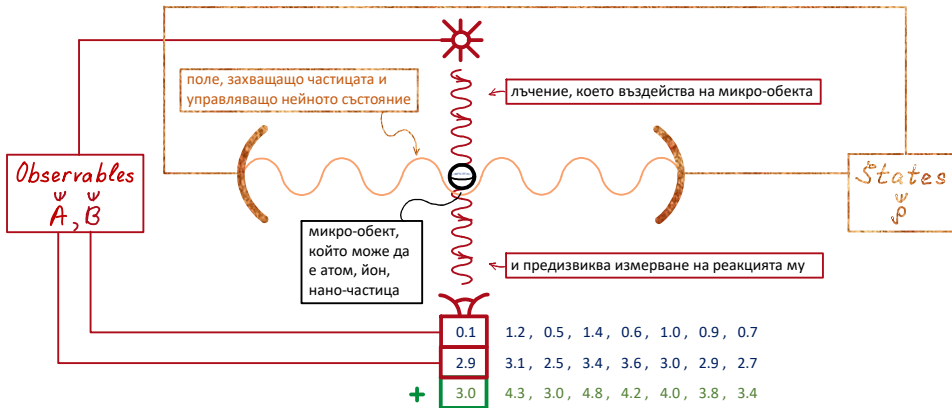
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



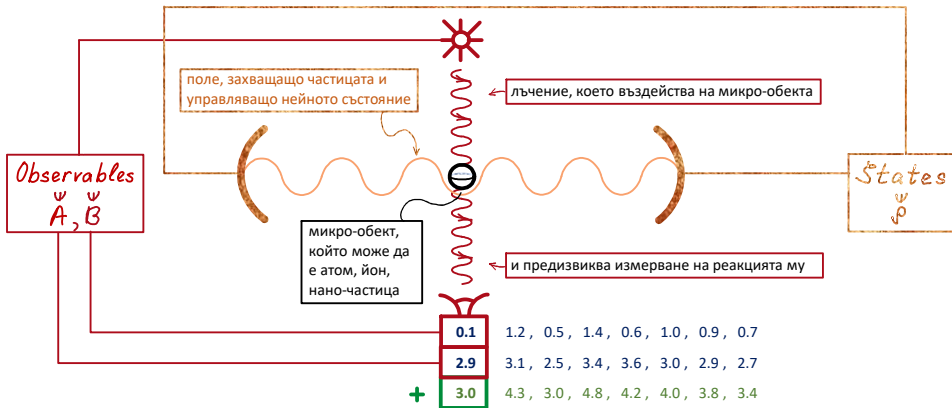
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



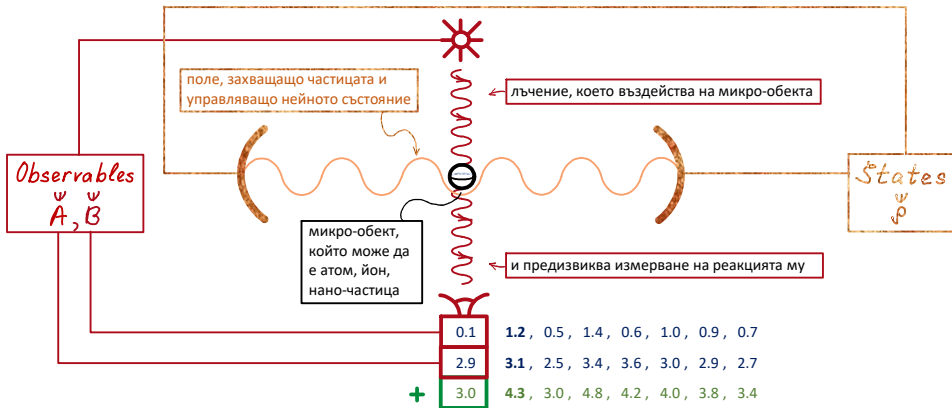
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



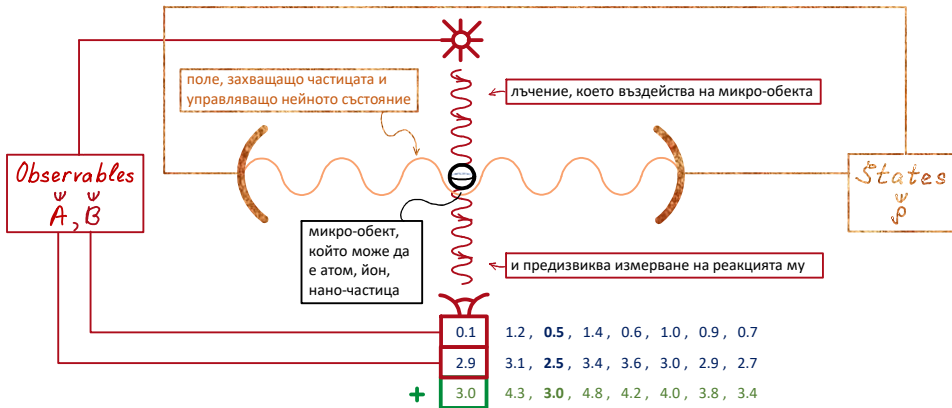
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



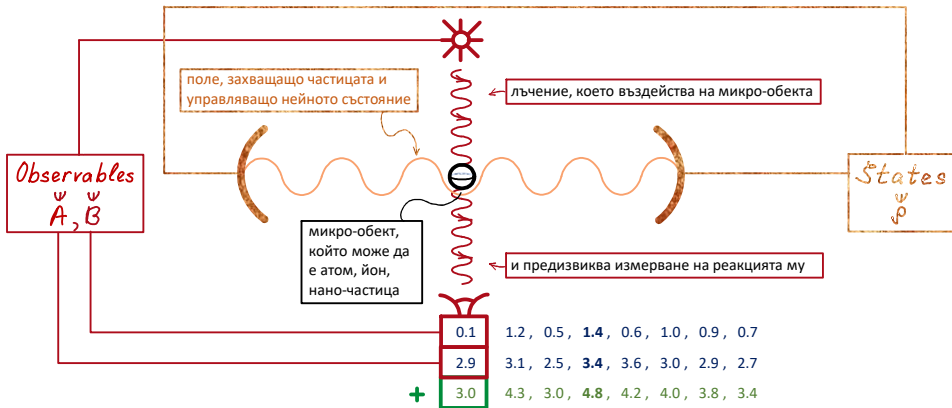
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



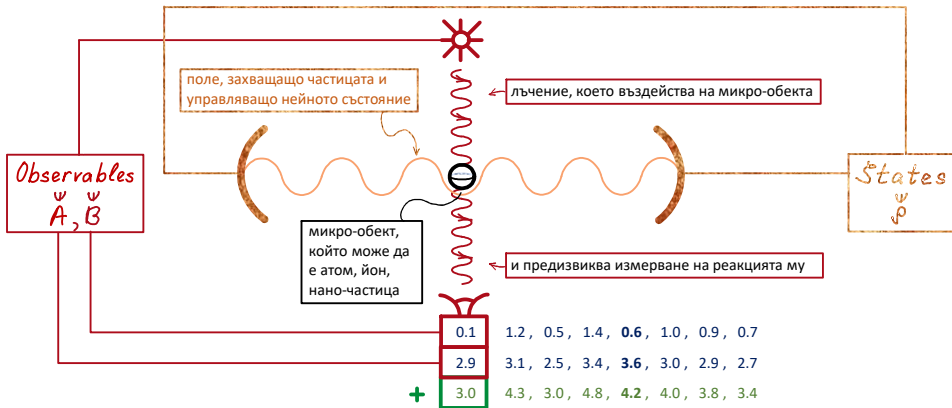
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



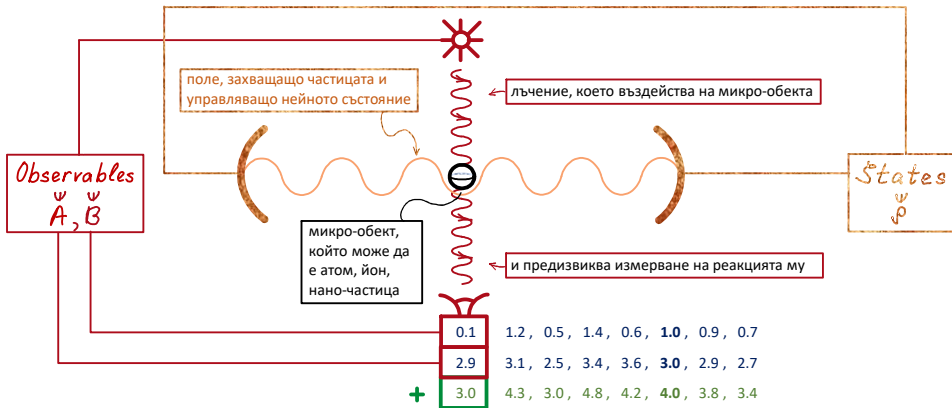
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



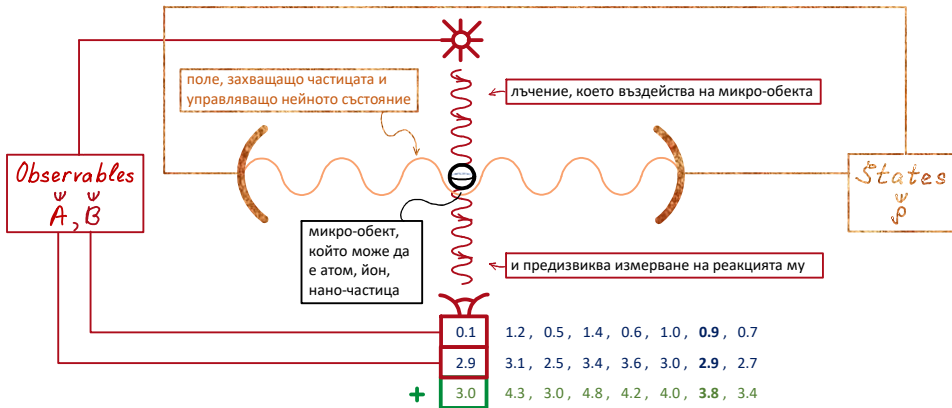
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



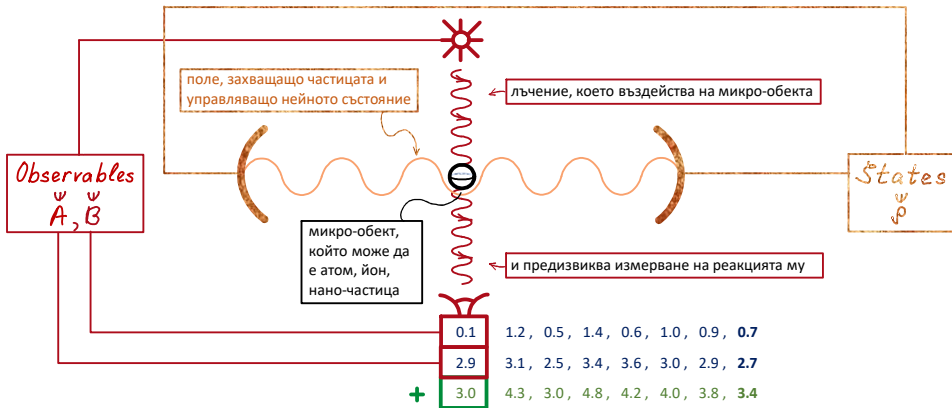
4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чиито резултати са няколко числа



4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$	
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^2 \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \cdot B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$

съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^2 \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \cdot B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$

съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- Всяка наблюдаема сама по себе си е съвместна и можем да определим функции от нея.

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
-----	-------	-------	-------	-------	---------------------	---

съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- Всяка наблюдаема сама по себе си е съвместна и можем да определим функции от нея. В частност, можем да постулираме (т.е., да въведем аксиома), че в *Observables* има операции $A \mapsto A^n$ - вдигане на произволна степен $n = 1, 2, \dots$.

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\vartheta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
A^n	a_1^n	a_2^n	a_3^n	a_4^n	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^n \rangle_{\vartheta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_N^n}{N}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$ $= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдения

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\mathcal{P}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\varrho} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\varrho} + \langle B \rangle_{\varrho} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$

A+B	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\varrho} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\varrho} + \langle B \rangle_{\varrho} \end{aligned}$
-----	-----------	-----------	-----------	-----------	---------------------	--

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
λA						
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\varrho} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\varrho} + \langle B \rangle_{\varrho} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\varrho} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\varrho} + \langle B \rangle_{\varrho} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдения

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle \lambda A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\lambda a_1) + \dots + (\lambda a_N)}{N} = \lambda \langle A \rangle_{\mathcal{P}}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\mathcal{P}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\mathcal{P}} + \langle B \rangle_{\mathcal{P}} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{F}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{F}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle \lambda A \rangle_{\mathcal{F}} = \lambda \langle A \rangle_{\mathcal{F}}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\mathcal{F}} = \langle A \rangle_{\mathcal{F}} + \langle B \rangle_{\mathcal{F}}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\wp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \wp(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\wp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \wp(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle \lambda A \rangle_{\wp} = \lambda \langle A \rangle_{\wp}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\wp} = \langle A \rangle_{\wp} + \langle B \rangle_{\wp}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома: *Observables* е линейно пространство над числовата система , в която наблюдаемите приемат стойности

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома:** $Observables$ е линейно пространство над числовата система^{полето}, в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ става линеен функционал върху $Observables$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома:** $Observables$ е линейно пространство над числовата система ^{поле}, в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ става линейен функционал върху $Observables$ (т.е., линейна функция, чийто стойности са числа)

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома: $Observables$ е линейно пространство над числовата система^{полето}, в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ става линейен функционал върху $Observables$ (т.е., линейна функция, чийто стойности са числа):

$$\rho(\lambda A + \mu B) = \lambda \rho(A) + \mu \rho(B)$$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома: $Observables$ е линейно пространство над числовата система^{полето}, в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ става линейен функционал върху $Observables$ (т.е., линейна функция, чийто стойности са числа):

$$\rho(\lambda A + \mu B) = \lambda \rho(A) + \mu \rho(B)$$

числа 

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома: $Observables$ е линейно пространство над числовата система^{полето}, в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ става линейен функционал върху $Observables$ (т.е., линейна функция, чийто стойности са числа):

$$\rho(\lambda A + \mu B) = \lambda \rho(A) + \mu \rho(B)$$

числа $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$ наблюдаеми

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$ $= \rho(A) + \rho(B)$

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни.

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни.
Но квадратите са частни случаи на произведение

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни.
Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A \cdot B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

– нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

– нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2$

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2$

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

– нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B)$

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

– нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2$

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите

6. Проблемът с произведението

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

– нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от допуск постулираните операции над наблюдаеми – степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от дотук постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от дотук постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение “.”

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от дотук постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение "." (т.е., за което могат да се разкриват скоби),

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досущ постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =$$

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2}((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B)$$

$$=$$

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от дотук постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$\begin{aligned}
 A \bullet B &= \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2}((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B) \\
 &= \frac{1}{2}(\cancel{A \cdot A} + A \cdot B + B \cdot A + \cancel{B \cdot B} - \cancel{A \cdot A} - \cancel{B \cdot B}) =
 \end{aligned}$$

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$\begin{aligned} A \bullet B &= \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2}((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B) \\ &= \frac{1}{2}(\cancel{A \cdot A} + A \cdot B + B \cdot A + \cancel{B \cdot B} - \cancel{A \cdot A} - \cancel{B \cdot B}) = \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A) \end{aligned}$$

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от дотук постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$\begin{aligned} A \bullet B &= \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2}((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B) \\ &= \frac{1}{2}(\cancel{A \cdot A} + A \cdot B + B \cdot A + \cancel{B \cdot B} - \cancel{A \cdot A} - \cancel{B \cdot B}) = \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A) \end{aligned}$$

В частност: $A \cdot B = B \cdot A \iff A \bullet B = A \cdot B$

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$\begin{aligned} A \bullet B &= \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2} ((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B) \\ &= \frac{1}{2} (\cancel{A \cdot A} + A \cdot B + B \cdot A + \cancel{B \cdot B} - \cancel{A \cdot A} - \cancel{B \cdot B}) = \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A) \end{aligned}$$

$$\text{В частност: } A \cdot B = B \cdot A \iff A \bullet B = A \cdot B$$

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A)$$

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A)$$

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A)$$

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби)

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A)$$

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A (B \cdot C)$

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A)$$

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно)

6. Проблемът с произведението

- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$A \bullet B = \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A)$$

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) \neq 0$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]]$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е следното

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е следното

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := \overbrace{A \cdot B - B \cdot A}^{\text{комутатор}}$$

$$2 A \bullet B = \underbrace{A \cdot B + B \cdot A}_{\text{антикомутатор}}$$

Проверка :

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \quad , \quad \text{където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((A \cdot B + B \cdot A) \cdot C + C \cdot (A \cdot B + B \cdot A)) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (B \cdot C + C \cdot B) + (B \cdot C + C \cdot B) \cdot A) \end{aligned}$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \quad , \quad \text{където: } [A, B] := \overbrace{A \cdot B - B \cdot A}^{\text{комутатор}}$$

$$2 A \bullet B = \underbrace{A \cdot B + B \cdot A}_{\text{антикомутатор}}$$

Проверка:

||

||

антикомутатор

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left((A \cdot B + B \cdot A) \cdot C + C \cdot (A \cdot B + B \cdot A) \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(A \cdot (B \cdot C + C \cdot B) + (B \cdot C + C \cdot B) \cdot A \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (A \cdot C - C \cdot A) - (A \cdot C - C \cdot A) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \quad , \quad \text{където: } [A, B] := \overbrace{A \cdot B - B \cdot A}^{\text{комутатор}}$$

$$2 A \bullet B = \underbrace{A \cdot B + B \cdot A}_{\text{антикомутатор}}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left((\cancel{A \cdot B} + B \cdot A) \cdot C + C \cdot (A \cdot B + \cancel{B \cdot A}) \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(A \cdot (\cancel{B \cdot C} + C \cdot B) + (B \cdot C + C \cdot B) \cdot A \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (A \cdot C - C \cdot A) - (A \cdot C - C \cdot A) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((\cancel{A \cdot B} + B \cdot A) \cdot C + C \cdot (A \cdot B + \cancel{B \cdot A})) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (\cancel{B \cdot C} + C \cdot B) + (B \cdot C + \cancel{C \cdot B}) \cdot A) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (A \cdot C - C \cdot A) - (A \cdot C - C \cdot A) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \quad , \quad \text{където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A})) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (\underline{B \cdot C} + C \cdot B) + (B \cdot C + C \cdot B) \cdot A) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (\underline{A \cdot C} - C \cdot A) - (A \cdot C - C \cdot A) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A})) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (\underline{B \cdot C} + C \cdot B) + (\underline{B \cdot C} + \cancel{C \cdot B}) \cdot A) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (\underline{A \cdot C} - C \cdot A) - (A \cdot C - \underline{C \cdot A}) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A})) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) + (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) \cdot A) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) - (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A})) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) + (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) \cdot A) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) - (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

||

||

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A})) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (A \cdot (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) + (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) \cdot A) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (B \cdot (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) - (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \quad , \quad \text{където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A}) \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(A \cdot (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) + (\underline{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) \cdot A \right) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} \left(B \cdot (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) - (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) \cdot B \right)$$

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$A.B$, което поражда степените: $A^2 = A.A$, $A^3 = A.A^2$, $A^4 = A.A^3$, ...

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение.

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно, т.е. комутатора $A \cdot B - B \cdot A =: [A, B] \neq 0$

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно, т.е. комутатора $A \cdot B - B \cdot A =: [A, B] \neq 0$ и Дирак е първия, който го свързва с формулата $[A, B] = i\hbar \{A, B\}$

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно, т.е. комутатора $A \cdot B - B \cdot A =: [A, B] \neq 0$ и Дирак е първия, който го свързва с формулата $[A, B] = i\hbar \{A, B\}$, където $\{A, B\}$ според Дирак $\{A, B\}$ е наблюдаема отразяваща инфинитезималния ефект от измерването на наблюдаемата A върху B .

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение

$\underbrace{A \cdot B}$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно, т.е. комутатора $A \cdot B - B \cdot A =: [A, B] \neq 0$ и Дирак е първия, който го свързва с формулата $[A, B] = i\hbar \{A, B\}$, където $\{A, B\}$ според Дирак $\{A, B\}$ е наблюдаема отразяваща инфинитезималния ефект от измерването на наблюдаемата A върху B . Тя пренася т.нар. "скобка на Пуасон" (Poisson's bracket) от класическата механика в квантовата теория и носи името "скобка на Дирак".

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

Йордановото
произведение

имагинерна динамична
квантова добавка

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

Йордановото
произведение

имагинерна динамична
квантова добавка

- Дирак нарича наблюдаемите "q-числа" (q-quantum),

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

Йордановото
произведение

имагинерна динамична
квантова добавка

- Дирак нарича наблюдаемите "q-числа" (q-quantum), а класическите наблюдаеми "c-числа" (c-classical/commuting).

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

Йордановото
произведение

имагинерна динамична
квантова добавка

- Дирак нарича наблюдаемите "q-числа" (q-quantum), а класическите наблюдаеми "c-числа" (c-classical/commuting). Така, Дирак първи въвежда "q-терминологията"

6. Проблемът с произведението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = \underbrace{A \cdot B}_{\text{квантовото произведение}} = \underbrace{A \bullet B}_{\text{Йордановото произведение}} + \underbrace{i \hbar \frac{1}{2} \{A, B\}}_{\text{имагинерна динамична квантова добавка}}$

квантовото
произведение

Йордановото
произведение

имагинерна динамична
квантова добавка

- Дирак нарича наблюдаемите "q-числа" (q-quantum), а класическите наблюдаеми "c-числа" (c-classical/commuting). Така, Дирак първи въвежда "q-терминологията" от където по-късно идва и q-бита.

7. Математическото понятие за алгебра

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле.

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство A над K ,

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство A над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство A над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство A над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$. Произведението $\cdot$ е дисоридативно:

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$. Произведението $\cdot$ е дисорбуктивно:

за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$. Произведението $\cdot$ е дисорбуктивно:

за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$

- т.е., можем да разкриваме скоби и да изнасяме числата отпред;

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$. Произведението $\cdot$ е дисорбуктивно:

за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$

- т.е., можем да разкриваме скоби и да изнасяме числата отпред; нарича се също билинейност (т.е., разделна линейност по двата аргумента).

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$. Произведението $\cdot$ е дисорбуктивно:

за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$

- т.е., можем да разкриваме скоби и да изнасяме числата отпред; нарича се също билинейност (т.е., разделна линейност по двата аргумента).

- $\mathbb{R}$ -алгебрите се наричат още реални алгебри.

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": $\cdot$. Произведението $\cdot$ е дисоридативно:

за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$

- т.е., можем да разкриваме скоби и да изнасяме числата отпред; нарича се също билинейност (т.е., разделна линейност по двата аргумента).

- $\mathbb{R}$ -алгебрите се наричат още реални алгебри.
- $\mathbb{C}$ -алгебрите се наричат още комплексни алгебри.

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A.B = B.A$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е commutative алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A.B = B.A$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е ^{commutative} комутиативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A.B = B.A$.

- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A.B).C = A.(B.C)$

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.

- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е коммутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е коммутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е коммутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:
 - коммутативни и асоциативни алгебри;

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:
 - комутативни и асоциативни алгебри;
 - асоциативни алгебри с единица;

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:
 - комутативни и асоциативни алгебри;
 - асоциативни алгебри с единица;
 - комутативни и асоциативни алгебри с единица.

7. Математическото понятие за алгебра

• Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:
 - комутативни и асоциативни алгебри;
 - асоциативни алгебри с единица;
 - комутативни и асоциативни алгебри с единица.
- Отделно, изброените до тук алгебри могат да се реални или комплексни.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A.B = -B.A$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е anticommutative алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е ^{anticommutative} антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е anticommutative алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е power associative, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е anticommutative алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е power associative, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е anticommutative алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е power associative алгебра, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Jordan algebra алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.
 - $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.
 - $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.
 - $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли, ако е антикомутативна и изпълнява т.нар. тъждество на Якоби

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.
 - $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли, ако е антикомутативна и изпълнява т.нар. твърдение на Якоби

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.
 - $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли, ако е антикомутативна и изпълнява т.нар. твърдение на Якоби

$$\forall A, B, C \in \mathcal{A} : [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$$

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)
 - $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.
 - $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).
 - $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.
 - $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли, ако е антикомутативна и изпълнява т.нар. твърдение на Якоби
 $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$, където в този случай е
 прието дистрибутивната операция да се бележи с " $[\cdot, \cdot]$ " и да се нарича скобка на Ли.

7. Математическото понятие за алгебра

- Конвенция :

7. Математическото понятие за алгебра

- Конвенция:

Оттук нататък в курса, когато имаме асоциативна алгебра ще изпускаме точката "." за произведение:

$$A.B \equiv AB$$

7. Математическото понятие за алгебра

- Конвенция :

Оттук нататък в курса , когато имаме асоциативна алгебра ще изпускаме точката "." за произведение :

$$A.B \equiv AB$$

Елементите на алгебрата обикновено ще бележим с големи "печатни" латински букви

7. Математическото понятие за алгебра

- Конвенция:

Оттук нататък в курса, когато имаме асоциативна алгебра ще изпускаме точката "." за произведение:

$$A.B \equiv AB$$

Елементите на алгебрата обикновено ще бележим с големи "печатни" латински букви, а алгебрата: $\mathcal{A}$.

8. Спрежение

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно.

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че тогава ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема.

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че тогава ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема. Така, асоциативната алгебра $\mathcal{A}$, в която се умножават наблюдаемите е по-широка от Observables: $\mathcal{A} \not\subseteq \text{Observables}$

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че тогава ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема. Така, асоциативната алгебра $\mathcal{A}$, в която се умножават наблюдаемите е по-широка от $Observables$: $\mathcal{A} \not\subseteq Observables$
- Възниква проблем: как да се отделят наблюдаемите. За тази цел се постулира, че в $\mathcal{A}$ има допълнителна операция, спре~~ж~~ение:

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$$

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че тогава ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема. Така, асоциативната алгебра $\mathcal{A}$, в която се умножават наблюдаемите е по-широка от $Observables$: $\mathcal{A} \not\subseteq Observables$
- Възниква проблем: как да се отделят наблюдаемите. За тази цел се постулира, че в $\mathcal{A}$ има допълнителна операция, спре~~же~~ние:

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$$

$$\text{т.е.}: A^{**} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A}), \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че тогава ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема. Така, асоциативната алгебра $\mathcal{A}$, в която се умножават наблюдаемите е по-широка от Observables : $\mathcal{A} \not\subseteq \text{Observables}$
- Възниква проблем: как да се отделят наблюдаемите. За тази цел се постулира, че в $\mathcal{A}$ има допълнителна операция, спре~~же~~ние:

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$$

$$\text{т.е: } A^{**} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A}), \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}) \quad \text{и}$$

$$A \in \text{Observables} \iff A = A^* \quad (\text{самоспрежнатост})$$

selfadjoint

8. Спрежение

- Така, Observables се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \overline{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).

8. Спрежение

- Така, $Observables$ се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \overline{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).
- Също така, ако $A, B \in Observables$ (наблюдаеми), то $(AB)^* = B^* A^* = BA$.

8. Спрежение

- Така, $Observables$ се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \overline{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).
- Също така, ако $A, B \in Observables$ (наблюдаеми), то $(AB)^* = B^* A^* = BA$.
Следователно, ако A и B са наблюдаеми ($A, B \in Observables$), то:
– $(A \bullet B)^* = A \bullet B$ (Йордановото произведение на наблюдаеми е пак наблюдаемо)

8. Спрежение

- Така, $Observables$ се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \overline{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).

- Също така, ако $A, B \in Observables$ (наблюдаеми), то $(AB)^* = B^* A^* = BA$.

Следователно, ако A и B са наблюдаеми ($A, B \in Observables$), то:

- $(A \bullet B)^* = A \bullet B$ (Йордановото произведение на наблюдаеми е пак наблюдаемо)
- $(i[A, B])^* = i[A, B]$ (скобката на Дирак на наблюдаеми е пак наблюдаема)

8. Спрежение

- Така, $Observables$ се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \overline{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).

- Също така, ако $A, B \in Observables$ (наблюдаеми), то $(AB)^* = B^* A^* = BA$.

Следователно, ако A и B са наблюдаеми ($A, B \in Observables$), то:

- $(A \bullet B)^* = A \bullet B$ (Йордановото произведение на наблюдаеми е пак наблюдаемо)
- $(i[A, B])^* = i[A, B]$ (скобката на Дирак на наблюдаеми е пак наблюдаема)
- AB е наблюдаема $\iff AB = BA$ (A и B комутират)

9. * - Алгебри (Star algebras / involutive algebras).

9. $\ast$ -Алгебри (*Star algebras / involutive algebras*).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е:

9. $\ast$ -Алгебри (*Star algebras / involutive algebras*).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е:
(инволютивна/*involutive*) $A^{\ast\ast} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A})$;

9. $\ast$ -Алгебри (*Star algebras / involutive algebras*).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е:

(инволютивна / *involutive*) $A^{\ast\ast} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A});$

(антилинейна / *antilinear*) $(\alpha A + \beta B)^{\ast} = \bar{\alpha} A^{\ast} + \bar{\beta} B^{\ast} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{A});$

9. $\ast$ -Алгебри (*Star algebras / involutive algebras*).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е:

(инволютивна / *involutive*) $A^{\ast\ast} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A});$

(антилинейна / *antilinear*) $(\alpha A + \beta B)^{\ast} = \bar{\alpha} A^{\ast} + \bar{\beta} B^{\ast} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{A});$

(антиморфизъм / *antimorphism*) $(AB)^{\ast} = B^{\ast} A^{\ast} \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}).$

9. $\ast$ -Алгебри (Star algebras / involutive algebras).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е:

(инволютивна / involutive) $A^{\ast\ast} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A});$

(антилинейна / antilinear) $(\alpha A + \beta B)^{\ast} = \bar{\alpha} A^{\ast} + \bar{\beta} B^{\ast} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{A});$

(антиморфизъм / antimorphism) $(AB)^{\ast} = B^{\ast} A^{\ast} \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}).$

- $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$ се нарича положителна (още, формално положителна / formally real или също, евклидова / Euclidean), ако $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$:

$$A_1^{\ast} A_1 + \dots + A_n^{\ast} A_n = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \dots = A_n = 0.$$

10. Аксиоми на алгебричния подход

- Съществува комплексна, асоциативна, $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица, която е положителна, така, че $A \in \text{Observables} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$ и $A = A^\ast$.
 $\mathcal{A}$ се нарича алгебра на наблюдаемите (макар, че не всички нейни елементи са наблюдаеми).
 - Крайност: $\mathcal{A}$ е крайно-мерно линейно пространство.
 - $\rho \in \text{States} \Leftrightarrow \rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линеен функционал, който изпълнява свойствата:
 (нормираност) $\rho(\hat{1}) = 1$;
 (положителност) $\rho(A^\ast A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.
 - За наблюдаема A : $\rho(A) =: \langle A \rangle_\rho$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ .
-