Квантова Информатика

лекция 5 / 7. 11. 2022

Николай М. Николов

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

$\boxed{\text{алгебра на наблюдаемите}}$ - това е комплексна, асоциативна $*$-алгебра, с единица, която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables $(\mathcal{A})$

$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$

$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

$\Downarrow$

A - набл.

States $(\mathcal{A})$

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$\boxed{\text{за } \forall A \in \mathcal{A}}$

$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен) $\rho(A^* A) \geq 0$

(нормиран) $\rho(\mathbb{1}) = 1 \}$

$\Downarrow$

ρ - съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho :=$ средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Припомняне аксиомите: една (квантова) система се определя от:

- Съществува комплексна, асоциативна, $*$-алгебра $\mathcal{A}$ с единица, която е положителна, така, че $A \in$ Observables $\iff A \in \mathcal{A}$ и $A = A^*$.
  $\mathcal{A}$ се нарича алгебра на наблюдаемите (макар, че не всички нейни елементи са наблюдаеми).

- Крайност: $\mathcal{A}$ е крайно-мерно линейно пространство.

- $\rho \in$ States $\iff \rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ е линеен функционал, който изпълнява свойствата:
  (нормираност) $\rho(\hat{1}) = 1$;
  (положителност) $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.

- За наблюдаема A: $\rho(A) =: \langle A \rangle_\rho$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ.

Горните аксиоми са единствените, които въвеждат структурата на системите и ограниченията върху тази структура. Ще имаме и допълнителни аксиоми, но те единствено ще интерпретират допълнителни понятия от нашия опит, като събитие, експеримент, подсистема, надсистема, едновременна измеримост (съвместност) и др. Тези понятия няма да водят до допълнителни структурни ограничения.

2. Основни определения и примери

Определение Комплексна, асоциативна, $*$-алгебра $\mathcal{A}$ с единица

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция произведение «.» (често ще пишем $AB \equiv A.B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $\hat{1} \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

- $(\alpha A+\beta B)(\mu C+\nu D)=\alpha\mu AC+\alpha\nu AD+\beta\mu BC+\beta\nu BD \quad (\forall \alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathbb{C}, \forall A,B,C,D \in \mathcal{A})$
- $(AB)C = A(BC) \quad (\forall A,B,C \in \mathcal{A})$
- $(\alpha A+\beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^* \quad (\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \forall A,B \in \mathcal{A})$
- $A^{**} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A})$
- $(AB)^* = B^* A^* \quad (\forall A,B \in \mathcal{A})$
- $\hat{1} A = A = A \hat{1} \quad (\forall A \in \mathcal{A})$ В частност: $\hat{1}^* = \hat{1}$, понеже $\hat{1}^* = \hat{1}^* \hat{1} = (\hat{1}^* \hat{1})^* = \hat{1}^{**} = \hat{1}$.

<u>Основен пример</u> Матричната алгебра $Mat_n(\mathbb{C})$:= множеството на всички квадратни $n \times n$-матрици с комплексни коефициенти

Тя е n^2-мерно, комплексно линейно пространство и матричното произведение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jk} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}_{C = AB}$$

$$c_{jk} = a_{j1} b_{1k} + \cdots + a_{jn} b_{nk} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} b_{\ell k}$$

превръща $Mat_n(\mathbb{C})$ в комплексна асоциативна алгебра с единица $\hat{1} := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Hermitian adjoint

$Mat_n(\mathbb{C})$ е също и $*$-алгебра спрямо $*$-операцията на ермитово спрягане

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A \longmapsto A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{k1} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \cdots & \bar{a}_{kj} & \cdots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = \overline{(A^T)} = (\bar{A})^T$$

Проверка на: $(AB)^* \stackrel{?}{=} B^* A^*$

- имаме $(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = (\bar{A}\,\bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^* A^*$

<u>Свойството положителност</u> на матричната $*$-алгебра $Mat_n(\mathbb{C})$:

Защо: $A^*A + B^*B + \cdots + C^*C = 0 \implies A = B = \cdots = C = 0$

за всеки краен брой $A, B, \ldots, C \in Mat_n(\mathbb{C})$?

Проверка:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{k1} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \cdots & \bar{a}_{jj} & \cdots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & \cdots & x_{jj} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\implies x_{jj} = \bar{a}_{1j} a_{1j} + \cdots + \bar{a}_{nj} a_{nj} = |a_{1j}|^2 + \cdots + |a_{nj}|^2 \geq 0$$

и $x_{jj} = 0 \iff a_{1j} = \cdots = a_{nj} = 0$ (j-тата колона е $= 0$).

Но елемента jj на $A^*A + B^*B + \cdots + C^*C$ е $x_{jj} + y_{jj} + \cdots + z_{jj}$, където аналогично

въвеждаме $Y := (y_{jk})_{n \times n} := B^*B$, $\ldots$, $Z := (z_{jk})_{n \times n} := C^*C$

3. Положителността и нейните разновидности в курса

В курса ще срещаме следните три разновидности на понятието за положителност:

- Положителни $*$-алгебри: това са такива $*$-алгебри $\mathcal{A}$, за които
$$A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \cdots + A_n^* A_n = 0 \implies A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$$
за всеки краен брой $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

- Положителни елементи в $*$-алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \cdots + A_n^* A_n$, за някакви $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

$\left(\text{понеже } (A^*A)^* = A^* A^{**} = A^* A\right)$ и те винаги съществуват.

Проблемът е, че може да се окаже, че всички елементи в една $*$-алгебра са положителни!

От тази патологична ситуация ни предпазва условието за положителност на цялата алгебра.

В матричната $*$-алгебра $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$: положителните елементи се наричат още положително дефинитни матрици.

- Положителни линейни функционали над $*$-алгебра $\mathcal{A}$:

$\rho : \mathcal{A} \underset{\text{лин.}}{\to} \mathbb{C}$ е положителен $\Longleftrightarrow$ $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$

<u>Забележка по терминологията :</u> по-коректно би било в горните определения да се говори за неотрицателност , а не за положителност , понеже понятията се отнасят до нестроги неравенства "$\geq$" , а не "$>$". По исторически причини ние обаче ще използваме "положителност", като в случаите , когато имаме строги неравенства "$>$" ще говорим за "строга положителност".

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

<u>Определение</u> Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$ и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича подалгебра на $\mathcal{A}$, ако $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$ за $\forall A, B \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, то $\mathcal{B}$ се нарича подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, ако в допълнение на горното $\hat{1} \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича $*$-подалгебра на $\mathcal{A}$, ако в допълнение на първото условие по-горе, от $A \in \mathcal{B}$ то и $A^* \in \mathcal{B}$ за $\forall A \in \mathcal{B}$
- За други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не са нужни повече условия: тези свойства преминават към подалгебрите, което се доказва непосредствено.

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са линейни пространства над $\mathbb{K}$ и $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ е линейно изображение.

- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри, то f се нарича морфизъм на алгебри, ако за $\forall A, B \in \mathcal{B}$ имаме $f(AB) = f(A)f(B)$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри с единица, то f се нарича морфизъм на алгебри с единица, ако в допълнение на горното $f(\hat{1}_{\mathcal{B}}) = \hat{1}_{\mathcal{A}}$
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са $*$ - алгебри, то f се нарича морфизъм на $*$ - алгебри, ако в допълнение на първото условие по-горе, $f(A^*) = f(A)^*$ за $\forall A \in \mathcal{B}$
- Отново, за други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не се налагат повече условия
- В горните случаи, ако f е биекция, то казваме, че f е изоморфизъм от съответния тип. $\cong$
- В случая когато $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, а $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ е изображението на влагане, то получаваме съответните понятия за подалгебри от първото определение.

<u>Основен пример</u> е следната $*$-подалгебра с единица на $Mat_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \cdots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

$$Mat_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{array}{c|cccc} k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & 0 & 0 & \cdots & A_m \\ \hline & k_1 & k_2 & & k_m \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{за } A_j \in Mat_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1,\dots,m \end{array} \right\}$$

наричат се блочно-диагонални матрици

$$=: \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Това е $*$-подалгебра с $\hat{1} = \mathrm{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$, понеже:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C_j = A_j B_j$ за $j = 1, \dots, m$, т.е.,

$$\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_m) \cdot \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_m) = \mathrm{diag}(A_1 B_1, \dots, A_m B_m)$$

и още, $(\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_m))^* = \mathrm{diag}(A_1^*, \dots, A_m^*)$

<u>Забележка:</u> Изображенията : $\mathrm{pr}_j : Mat_{k_1,\ldots,k_m}(\mathbb{C}) \to Mat_{k_j}(\mathbb{C})$ за $j = 1,\ldots,m$ са морфизми на $*$-алгебри с единица. По такъв начин $Mat_{k_1,\ldots,k_m}(\mathbb{C})$ се оказва модел на т.нар. пряко произведение на асоциативни $*$-алгебри с единица, т.е. имаме:

$$Mat_{k_1,\ldots,k_m}(\mathbb{C}) \cong Mat_{k_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times Mat_{k_m}(\mathbb{C}).$$

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{ \mathrm{diag}(A, A) \mid A \in Mat_k(\mathbb{C}) \}$ е $*$-подалгебра с единица на $Mat_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $*$-алгебра с единица е $\cong Mat_k(\mathbb{C})$.

- Подпространството $\{ \mathrm{diag}(0, A) \mid A \in Mat_k(\mathbb{C}) \}$, където $0 \in Mat_k(\mathbb{C})$ е $*$-подалгебра на $Mat_{2k}(\mathbb{C})$, но не подалгебра с единица
  Същевременно, като самостоятелна $*$-алгебра $\{ \mathrm{diag}(0, A) \mid A \in Mat_k(\mathbb{C}) \}$ има единица и това е $\mathrm{diag}(0, \hat{1})$.
  Всъщност, $\{ \mathrm{diag}(0, A) \mid A \in Mat_k(\mathbb{C}) \} \cong Mat_k(\mathbb{C})$.

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството на горно триъгълните матрици

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$ е подалгебра с единица на $Mat_n(\mathbb{C})$, но не е $*$-подалгебра

- Подпространството на строго горно триъгълни матрици

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$ е подалгебра с на $Mat_n(\mathbb{C})$, но не е $*$-подалгебра и не е подалгебра с единица, като въобще няма единица.

5. Основна структурна теорема

Всяка крайно-мерна, комплексна, асоциативна, положителна, $*$-алгебра с единица е изоморфна на $Mat_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C})$ за единствени $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dots \leqslant k_m$.

Забележка: не всяка $*$-подалгебра с единица на $Mat_n(\mathbb{C})$ може да се преобразува (чрез смяна на базиса) в подалгебра от вида $Mat_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C})$.

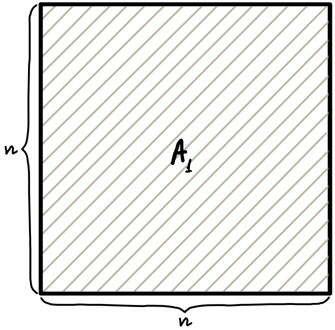
- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

$$\begin{array}{c|cccc}
 & k_1 & k_2 & & k_m \\
\hline
k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\
k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
k_m & 0 & 0 & \cdots & A_m
\end{array}$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- чисто квантови системи , $m = 1$, $k_1 = n$ $\Rightarrow$ алгебрата на всички $n \times n$ матрици (1 блок)

Това е "напълно" некомутативен случай.



- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & \boxed{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & \boxed{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \boxed{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{a_{n-1}} & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_n} \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1
\end{array}$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{1,\ldots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & , \omega_{n-1}, & \omega_n\} & = & \Omega \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \Big\downarrow A \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & , a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq & \mathbb{C}
\end{array}$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{tikzcd}
\{\omega_1, \arrow[d, mapsto] & \omega_2, \arrow[d, mapsto] & \omega_3, \arrow[d, mapsto] & \cdots & ,\omega_{n-1}, \arrow[d, mapsto] & \omega_n\} \arrow[d, mapsto] & = & \Omega \arrow[d, "A"] \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) + \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n) = \mathrm{diag}(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) \iff (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) + \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \Leftrightarrow (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \times \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n) \iff (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)\, B(\omega_j)$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$
\begin{tikzcd}
\{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega \arrow[d, "A"] \\
\{a_1, \arrow[from=u, mapsto] & a_2, \arrow[from=u, mapsto] & a_3, \arrow[from=u, mapsto] & \cdots & ,a_{n-1}, \arrow[from=u, mapsto] & a_n\} \arrow[from=u, mapsto] & \subseteq \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) \times \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n) = \mathrm{diag}(a_1\cdot b_1,\dots,a_n\cdot b_n) \iff (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)B(\omega_j)$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай също:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{\omega_1, \arrow[d, mapsto] & \omega_2, \arrow[d, mapsto] & \omega_3, \arrow[d, mapsto] & \cdots & ,\omega_{n-1}, \arrow[d, mapsto] & \omega_n\} \arrow[d, mapsto] & = \Omega \arrow[d, "A = A^*"] \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$A = A^* \Longleftarrow$ наблюдаема

<u>Следствие.</u> Съгласно т. 4 имаме пълна класификация на квантовите системи в алгебричния подход с точност до изоморфизъм, посредством класификацията на алгебрите на наблюдаемите им. Така, можем да считаме, че алгебрата на наблюдаемите е:

$$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{k_1,\ldots,k_m}(\mathbb{C})$$

за единствени цели положителни числа $k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_m$ – тази редица напълно определя вида на системата.

В частност, отделят се следните два гранични случая:

а) $k_1 = \cdots = k_m = 1$ – това ще бъдат класическите системи по-долу

б) $m = 1$ – това ще наречем чисто квантови или още, неприводими квантови системи.

6. Комутативния случай. Класически системи

<u>Следствие</u> Една крайно-мерна, положителна, комплексна, асоциативна $*$-алгебра $\mathcal{A}$ с единица е комутативна

$$\iff \mathcal{A} \cong Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \equiv \{ \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) \mid a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C} \}$$

Тогава тя е изоморфна на алгебрата

$$Func_{\mathbb{C}}(\Omega) := \{ A \mid A : \Omega \to \mathbb{C} \}$$ от функции

върху n-елементно множество $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}$,

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & = & \{\omega_1, & \dots, & \omega_n\} \\ A \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \ni & a_1, & \dots, & a_n \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

понеже имат еднакви закони за събиране, умножение и спрягане

<u>Определение</u> Класическа система е такава, която се определя от комутативна алгебра на наблюдаемите. Съгласно т.5 това означава, че алгебрата на наблюдаемите е алгебрата от функциите върху крайно множество. Наблюдаемите са реалните

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \Omega & = & \{\omega_1, & \ldots, & \omega_n\} \\
\text{функции } A = A^* & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \mathbb{R} & \in & a_1, & \ldots, & a_n
\end{array}
$$

и в този, и само в този случай, те също образуват алгебра, която е реална и комутативна.

7. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна/едновременна измеримост

- Подсистема се определя от *-подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите. Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания върху подсистемата. Това е аналошично и на квантово-логическия подход и както там, така и тук искаме основните операции, които в случая са алгебричните, да се наследяват и от подсистемата
- При размяна на местата подсистема ⊆ система получаваме: система ⊆ надсистема. Както и при квантово-логическия подход, надсистемите отразяват процеса на уточняване (изфиняване) на измерванияният. В контекста на квантовата информатика, прехода към надсистема се използва при надграждане на изчисленията, например.

- Експеримент – това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $*$-подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.

- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството

$$\mathbb{C}[A] := \text{всички полиноми от } A$$
$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \cdots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \}$$
$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \ldots \}$$

е най-малката, комутативна $*$-подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A. Следователно, това е минималния експеримент, при който се измерва наблюдаемата A.

- Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ се наричат съвместни (още, едновременно / съвместно измерими), ако могат да се измерят в общ експеримент.

Следователно, A и B са съвместни $\Longleftrightarrow$

A и B се съдържат в обща комутативна, $*$-подалгебра с единица на $\mathcal{A}$.

<u>Теорема</u> Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ са съвместни $\Longleftrightarrow$ A и B комутират, т.е.,

$$AB = BA$$

<u>Схема на доказателството.</u> $\Rightarrow$) това следва непосредствено от определението.

$\Leftarrow$) Ако A и B комутират, то

$\mathbb{C}[A, B] :=$ всички полиноми от A и B

е най-малката комутативна $*$-подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A и B.

8. Защо наблюдаемите са реални, а алгебрите на наблюдаемите - комплексни

Полето на реалните числа $\mathbb{R}$ е максималното наредено поле, т.е., това е максималната наредена числова система, което ги прави универсални при моделирането на системите в природата.

От друга страна, в една комплексна $*$-алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$ – наистина: $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$

Ако получените A и B комутират, т.е., те са едновременно измерими наблюдаеми, то елемента C се нарича нормален елемент на $*$-алгебрата $\mathcal{A}$. Тоест, тогава C е комплексна наблюдаема, която се свежда до двойка съвместни реални наблюдаеми.

Но въобще, защо е нужно да се отива към алгебри над комплексните числа?
Отговор: заради основната теорема на алгебрата, че всеки полином има корен в полето на комплексните числа. Това позволява да се докаже основната класификационна теорема в т. 5.

• • •

9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q, която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното съотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$. Добавяйки и условието за наблюдаема $Q = Q^*$ достигаме до следните определения.

<u>Определение</u> а) Самоспрегнат идемпотент Q в $*$-алгебра $\mathcal{A}$, това е елемент $Q \in \mathcal{A}$ такъв, че: $Q^* = Q = Q^2$

б) Събитие в квантова система е самоспрегнат идемпотент на алгебрата на наблюдаемите.

<u>Пример</u>: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \mathrm{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q : \Omega \to \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \mathrm{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

$$Q^* = Q = Q^2 \iff \overline{Q(\omega)} = Q(\omega) = Q(\omega)^2 \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\iff Q(\omega) \in \{0, 1\}$$

$$\iff Q = \chi_S \text{, т.е., } Q \text{ е характеристична функция на подмножество } S \subseteq \Omega$$

където $S = \{\omega \in \Omega \mid Q(\omega) = 1\}$ и $\chi_S(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ако } \omega \in S \\ 0 & \text{ако } \omega \notin S \end{cases}$

10. Логика и аритметика

В класическите системи логическите операции имат алгебричен израз.

За $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ имаме:

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \cdot \chi_{S_2}$$

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

В частност: $\Omega = S_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} S_m$ – дизюнктивно разбиване

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{1} \equiv \chi_\Omega = \chi_{S_1} + \cdots + \chi_{S_m} \\ 0 \equiv \chi_\phi = \chi_{S_j} \chi_{S_k} \text{ за } \forall\, j \neq k \end{cases}$$

- класически системи

$$\begin{tikzcd}
\{\cancel{\omega_1} \arrow[d, mapsto] & ,\dots, & \omega_j \arrow[d, mapsto] & ,\dots, & \omega_k \arrow[d, mapsto] & ,\dots, & \cancel{\omega_n}\} \arrow[d, mapsto] & = \Omega \arrow[d, "\chi_S"] \\
\{0 & ,\dots, & 1 & ,\dots, & 1 & ,\dots, & 0\} & \subseteq \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\Longleftarrow$ събитие = характеристична функция на подмножество $S \subseteq \Omega$

логически и алгебрични операции:

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

<u>Твърдение.</u> В обща $*$-алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

(1) PQ е самоспрегнат идемпотент;

(2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;

(3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. $(1) \Rightarrow (3))$ $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

$(3) \Rightarrow (2))$ $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$

$$(P + Q - PQ)^2 = (P + Q - PQ)(P + Q - PQ)$$
$$= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ$$
$$= P + PQ - PQ + PQ + Q - PQ - PQ - PQ + PQ$$
$$= P + Q - PQ$$

$(2) \Rightarrow (1))$ $PQ = P + Q - (P + Q - PQ)$ - самоспрегнат е.

$\Rightarrow PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$ - комутират

$\Rightarrow (PQ)^2 = PQPQ = P^2Q^2 = PQ$ - идемпотент.

$\square$

11. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

<u>Спектрална теорема</u> Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$-алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме спектрално разлагане на елемента A
- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_r$.
- $Q_j Q_k = 0$ ако $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, r$.

} в този случай казваме, че $Q_1, \dots, Q_r$ задават разбиване на единицата

Множеството $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ се нарича спектър на A, а $Q_1, \dots, Q_r$ – спектрални идемпотенти на A.

<u>Пример</u> : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Ако $\mathcal{A} := \mathrm{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $A : \Omega \to \mathbb{R}$ (т.е., $A = A^*$)

тогава $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = A(\Omega)$ - множеството от стойностти на A

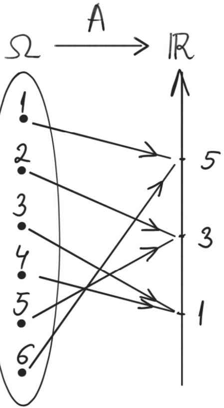
$S_j = A^{-1}(\alpha_j)$ за $j = 1, \dots, r$, $Q_j = \chi_{S_j}$. Така :

$$A(\omega) = \alpha_1 \chi_{S_1}(\omega) + \dots + \alpha_r \chi_{S_r}(\omega) \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \chi_{S_1}(\omega) + \dots + \chi_{S_r}(\omega) \\ 0 &= \chi_{S_j}(\omega)\, \chi_{S_k}(\omega) \end{aligned}\right\} \iff \Omega = S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_r$$

Пример:

$$A = 1.\chi_{\{3,4\}} + 3.\chi_{\{2,5\}} + 5.\chi_{\{1,6\}}$$



$$\{3,4\} = A^{-1}(1),$$
$$\{2,5\} = A^{-1}(3),$$
$$\{1,6\} = A^{-1}(5).$$

Сравнение на означенията:

$$A = \underbrace{1}_{\alpha_1}.\underbrace{\chi_{\{3,4\}}}_{Q_1} + \underbrace{3}_{\alpha_2}.\underbrace{\chi_{\{2,5\}}}_{Q_2} + \underbrace{5}_{\alpha_3}.\underbrace{\chi_{\{1,6\}}}_{Q_3}$$

<u>Значение (интерпретация):</u> спектърът на една наблюдаема е множеството на възможните стойности, които наблюдаемата може да приема при измерване. Ако (α_j, Q_j) е двойка от спектралното разложение на наблюдаема A, то спектралния идемпотент се нарича още спектрално събитие и се интерпретира, като събитието "$A = \alpha_j$", т.е., "при измерване на A е получена стойност α_j".

<u>Забележка</u> За самоспрегнати матрици, по-нататък ще имаме, че спектърът е множеството от собствените им стойности, а спектралните идемпотенти са ортогоналните проектори върху съответните подпространства от собствени вектори.

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_m$ е разбиване на $\hat{1}$ в $*$-алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

В частност, ако

$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е спектралното разлагане на A, то

$A^l = \alpha_1^l Q_1 + \dots + \alpha_r^l Q_r$ е спектралното разлагане на A^l (за $l = 1, 2, \dots$)

в т.ч. и $1 = A^0 = \alpha_1^0 Q_1 + \dots + \alpha_r^0 Q_r$.

<u>Определение</u> Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (или по-общо, самоспрегнат елемент в $*$-алгебра), която има спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_r Q_r$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е то полагаме: $f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \cdots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$, което е отново наблюдаема (т.е., $f(A) = f(A)^*$ – самоспрегнат).

$\Rightarrow$ $f(x) := x^n$ имаме съгласуваност, както и по-общо, за $f(x) =$ полином на x.

На това се основава т.нар. "функционално смятане" в $*$-алгебри.

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

<u>Теорема</u> Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

(1) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \cdots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).

(2) $A = B^2$, за наблюдаема B.

(3) Спектърът на A се състои от неотрицателни числа.

В кой да е от горните случаи ще пишем $A \geq 0$.

<u>Доказателство</u> Импликациите $(1) \Leftarrow (2) \Longleftrightarrow (3)$ се получават непосредствено от досегашните резултати. Импликацията $(1) \Rightarrow (3)$ се доказва с използване на техниката на оператори в хилбертови пространства, с която ще се запознаем по-нататък. $\square$

<u>Определение</u> За две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ ще пишем $A \leq B$ ако $B - A \geq 0$, което в частност се пренася и върху събитията (като наблюдаеми).

По-нататък, с помощта на техниката на оператори в хилбертови пространства ще установим:

<u>Теорема</u> За две събития $P, Q \in \mathcal{A}$ (т.е., $P^* = P = P^2$ и $Q^* = Q = Q^2$) имаме:

$$P \leq Q \iff PQ = P \iff QP = P$$

Това именно съответства на релацията мажориране в квантово логическия подход.

14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обичайната теория на вероятностите за случайни величини

Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_r Q_r$ е нейното спектрално разлагане и нека ρ е състояние (т.е., $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ е линеен, нормиран, положителен функционал)
Съгласно аксиоматичната ни интерпретация
$\rho(Q_j) = \mathrm{Prob}_\rho\{A = \alpha_j\} :=$ вероятността A след измерване в състояние ρ да приеме стойност α_j.

и тогава $\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$ (= средната стойност на A в ρ)

$$= \alpha_1 \cdot \mathrm{Prob}_\rho\{A = \alpha_1\} + \cdots + \alpha_r \cdot \mathrm{Prob}_\rho\{A = \alpha_r\}$$

– това е стандартна формула от теорията на вероятностите за средната стойност на случайна величина – това е сумата от произведенията стойности × вероятности за тях.

Горната формула се съгласува и с емпиричната формула за средна стойност :

$$\langle A\rangle_\rho = \lim_{N\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_1 \cdot \left(\#\{k \mid a_k = \alpha_1\}\right) + \cdots + \alpha_r \cdot \left(\#\{k \mid a_k = \alpha_r\}\right)}{N}$$

$$= \alpha_1 \cdot \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{k \mid a_k = \alpha_1\}}{N}}_{\mathrm{Prob}_\rho\{A = \alpha_1\}} + \cdots + \alpha_r \cdot \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{k \mid a_k = \alpha_r\}}{N}}_{\mathrm{Prob}_\rho\{A = \alpha_r\}}$$

<u>Определение</u> Съответствието : спектрална стойност $\alpha_j \mapsto$ вероятност за $A=\alpha_j$ в ρ се нарича вероятностно разпределение на наблюдаемата A в състояние ρ

- Това е пълната статистическа информация за A в ρ. Може ли тя да се извлече само от средните стойности ?

Отговор - да, но от няколко средни стойности.

нека $p_1 := \mathrm{Prob}_\rho\{A=\alpha_1\} = ?\,, \ldots, \,p_r := \mathrm{Prob}_\rho\{A=\alpha_r\} = ?$

– търсените вероятности

Тогава:

моменти

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle_\rho &= \alpha_1\cdot p_1 + \cdots + \alpha_r\cdot p_r \\
\langle A^2\rangle_\rho &= \alpha_1^2\cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^2 p_r \\
&\vdots \\
\langle A^r\rangle_\rho &= \alpha_1^r\cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^r p_r
\end{aligned}$$

– линейната система на Вандермонд $\Rightarrow$ определя $p_1, \ldots, p_r$

Това е "крайния" частен случай на т. нар. проблем на моментите на Хамбургер.
Следователно, задаването на състоянията само като средни стойности, но за всички наблюдаеми (включително и степените) дава пълна статистическа информация

Следващ проблем: но ако разполагаме с моментите $\langle A\rangle_\rho, \langle A^2\rangle_\rho, \ldots$, кога те ще дадат по горната линейна система на Вандермонд числа $p_1, \ldots, p_r \in [0,1]$ – т.е., имащи смисъл на вероятности.

Отговор дава т. нар. теорема на Бохнер: НДУ за това е моментите $\langle A^n\rangle_\rho$ да идват от положителен нормиран линеен функционал $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

Това мотивира аксиомата за състоянията.

15. Обобщения на алгебричния подход

...