

Квантова Информатика

лекция 5 / 7. 11. 2022

Николай М. Николов

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите



1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

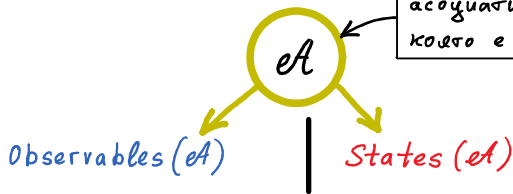
алгебра на наблюдаемите - това е комплексна ,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица ,
която е положителна



1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

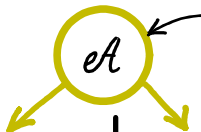
алгебра на наблюдаемите - това е комплексна ,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица ,
която е положителна



1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите - това е комплексна ,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица ,
която е положителна



Observables(eA)
 $\equiv$ Наблюдаеми на eA
 $\coloneqq \{ A \in eA \mid A = A^* \}$

States(eA)

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите - това е комплексна ,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица ,
която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
 $\coloneqq \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States ($\mathcal{A}$)

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$\coloneqq \{ \rho: \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{(положителен)} \quad \rho(A^*A) \geq 0 \\ \text{(нормиран)} \quad \rho(1) = 1 \end{array} \}$

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите - това е комплексна ,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица ,
която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
 $\coloneqq \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States ($\mathcal{A}$)

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$\coloneqq \{ \rho: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{лин.} \\ \text{(положителен)} \quad \rho(A^*A) \geq 0 \\ \text{(нормиран)} \quad \rho(1) = 1 \end{array} \}$

за $\forall A \in \mathcal{A}$



1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите - това е комплексна,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица,
която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
 $:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

$\Downarrow$
 A -набл.

States ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
 $:= \{ \rho: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{ли.н.} \}$

$\Downarrow$
 ρ - съст.

за $\forall A \in \mathcal{A}$

$\downarrow$

(положителен) $\rho(A^*A) \geq 0$
(нормиран) $\rho(1) = 1$

$\rho(A)$

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите - това е комплексна,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица,
която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
 $:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

ψ
 A -набл.

States ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
 $:= \{ \rho: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{(положителен) } \rho(A^*A) \geq 0$
 лин.

ψ
 ρ - съст.

за $\forall A \in \mathcal{A}$

$\downarrow$

(нормиран) $\rho(1) = 1$

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

1. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите - това е комплексна ,
асоциативна $\ast$ -алгебра, с единица ,
която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables ($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
 $:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

ψ
 A -набл.

States ($\mathcal{A}$)

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$:= \{ \rho: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{линейн.} \quad \text{(положителен)} \quad \rho(A^*A) \geq 0$
 $\quad \quad \quad \text{(нормиран)} \quad \rho(1) = 1 \}$

ψ
 ρ - съст.

за $\forall A \in \mathcal{A}$

$\downarrow$

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho :=$ средна стойност на
наблюдаемата A в състоянието ρ .

Припомняне аксиомите: една (квантова) система се определя от:

- Съществува комплексна, асоциативна, $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица, която е положителна, така, че $A \in \text{Observables} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$ и $A = A^*$.

$\mathcal{A}$ се нарича алгебра на наблюдаемите (макар, че не всички нейни елементи са наблюдаеми).

- Крайност: $\mathcal{A}$ е крайно-мерно линейно пространство.
- $\rho \in \text{States} \Leftrightarrow \rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линейен функционал, който изпълнява свойствата:
 (нормираност) $\rho(\hat{1}) = 1$;
 (положителност) $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.
- За наблюдаема A : $\rho(A) =: \langle A \rangle_\rho$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ .

Горните аксиоми са единствените, които въвеждат структурата на системите и ограниченията върху тази структура. Ще имаме и допълнителни аксиоми, но те единствено ще интерпретират допълнителни понятия от нашия опит, като събитие, експеримент, подсистема, надсистема, едновременна измеримост (съвместност) и др. Тези понятия няма да водят до допълнителни структурни ограничения.

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** A с единица

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** $\mathcal{A}$ с единица

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ **над** $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция **произведение** “.” (тесто ще пишем $AB \equiv A.B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $1 \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** $\mathcal{A}$ с **единица**

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция произведение "·" (тесто ще пишем $AB \equiv A \cdot B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $1 \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

$$\bullet (\alpha A + \beta B)(\mu C + \nu D) = \alpha\mu AC + \alpha\nu AD + \beta\mu BC + \beta\nu BD \quad (\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \forall A, B, C, D \in \mathcal{A})$$

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** $\mathcal{A}$ с **единица**

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция произведение "·" (тесто ще пишем $AB \equiv A \cdot B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $1 \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

- $(\alpha A + \beta B)(\mu C + \nu D) = \alpha\mu AC + \alpha\nu AD + \beta\mu BC + \beta\nu BD$ ($\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$)
- $(AB)C = A(BC)$ ($\forall A, B, C \in \mathcal{A}$)

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** $\mathcal{A}$ с **единица**

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция произведение "·" (тесто ще пишем $AB \equiv A \cdot B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $1 \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

- $(\alpha A + \beta B)(\mu C + \nu D) = \alpha\mu AC + \alpha\nu AD + \beta\mu BC + \beta\nu BD$ ($\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$)
- $(AB)C = A(BC)$ ($\forall A, B, C \in \mathcal{A}$)
- $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $A^{**} = A$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)
- $(AB)^* = B^* A^*$ ($\forall A, B \in \mathcal{A}$)

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** $\mathcal{A}$ с **единица**

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция произведение "·" (тесто ще пишем $AB \equiv A \cdot B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $\hat{1} \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

- $(\alpha A + \beta B)(\mu C + \nu D) = \alpha\mu AC + \alpha\nu AD + \beta\mu BC + \beta\nu BD$ ($\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$)
- $(AB)C = A(BC)$ ($\forall A, B, C \in \mathcal{A}$)
- $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $A^{**} = A$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)
- $(AB)^* = B^* A^*$ ($\forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $\hat{1}A = A = A\hat{1}$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)

2. Основни определения и примери

Определение **Комплексна**, **асоциативна**, *****-**алгебра** $\mathcal{A}$ с **единица**

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операция произведение "·" (тесто ще пишем $AB \equiv A \cdot B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $\hat{1} \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

- $(\alpha A + \beta B)(\mu C + \nu D) = \alpha\mu AC + \alpha\nu AD + \beta\mu BC + \beta\nu BD$ ($\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$)
- $(AB)C = A(BC)$ ($\forall A, B, C \in \mathcal{A}$)
- $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $A^{**} = A$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)
- $(AB)^* = B^* A^*$ ($\forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $\hat{1}A = A = A\hat{1}$ ($\forall A \in \mathcal{A}$) В частност: $\hat{1}^* = \hat{1}$, понеже $\hat{1}^* = \hat{1}^* \hat{1} = (\hat{1}^* \hat{1})^* = \hat{1}^{**} = \hat{1}$.

Основен пример Матричната алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) :=$ множеството на всички квадратни $n \times n$ -матрици с комплексни коефициенти

Основен пример Матричната алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) :=$ множеството на всички квадратни $n \times n$ -матрици с комплексни коефициенти

То е n^2 -мерно, комплексно линейно пространство и матричното произведение:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}^A \quad \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}^B = \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jk} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}^{C = AB}$$

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}b_{\ell k}$$

Основен пример Матричната алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) :=$ множеството на всички квадратни $n \times n$ -матрици с комплексни коефициенти

То е n^2 -мерно, комплексно линейно пространство и матричното произведение:

$$\begin{array}{c} A \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} B \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} C = AB \end{array} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jk} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}b_{\ell k}$$

Основен пример Матричната алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) :=$ множеството на всички квадратни $n \times n$ -матрици с комплексни коефициенти

То е n^2 -мерно, комплексно линейно пространство и матричното произведение:

$$\begin{array}{c} A \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} B \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} C = AB \end{array} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jk} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}b_{\ell k}$$

превръща $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ в комплексна асоциативна алгебра с единица $\hat{1} := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ е също и $*$ -алгебра спрямо $*$ -операцията на ермитово съпряжение *Hermitian adjoint*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A \quad \longmapsto \quad A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{k1} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \cdots & \bar{a}_{kj} & \cdots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = \overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$$

$\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ е също и $*$ -алгебра спрямо $*$ -операцията на ермитово съпряжение *Hermitian adjoint*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A \longmapsto A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{k1} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \cdots & \bar{a}_{kj} & \cdots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = \overline{(A^T)} = (\bar{A})^T$$

Проверка на: $(AB)^* \stackrel{?}{=} B^* A^*$

- имаме $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\bar{A} \bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^* A^*$

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \implies A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \Rightarrow A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Проверка:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \dots & \bar{a}_{jj} & \dots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{kn} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} & \dots & x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \Rightarrow A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Проверка:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \dots & \bar{a}_{jj} & \dots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{kn} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} & \dots & x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{jj} = \bar{a}_{1j} a_{1j} + \dots + \bar{a}_{nj} a_{nj}$$

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \Rightarrow A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Проверка:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \dots & \bar{a}_{jj} & \dots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{kn} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} & \dots & x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{jj} = \bar{a}_{1j} a_{1j} + \dots + \bar{a}_{nj} a_{nj} = |a_{1j}|^2 + \dots + |a_{nj}|^2 \geq 0$$

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \Rightarrow A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Проверка:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \dots & \bar{a}_{jj} & \dots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{kn} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} & \dots & x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{jj} = \bar{a}_{1j} a_{1j} + \dots + \bar{a}_{nj} a_{nj} = |a_{1j}|^2 + \dots + |a_{nj}|^2 \geq 0$$

$$\text{и } x_{jj} = 0 \Leftrightarrow a_{1j} = \dots = a_{nj} = 0 \quad (j\text{-тата колона е } = 0).$$

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \Rightarrow A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

$$\text{Проверка: } A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1j} & \dots & \bar{a}_{jj} & \dots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{kn} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} & \dots & x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{jj} = \bar{a}_{1j} a_{1j} + \dots + \bar{a}_{nj} a_{nj} = |a_{1j}|^2 + \dots + |a_{nj}|^2 \geq 0$$

$$\text{и } x_{jj} = 0 \Leftrightarrow a_{1j} = \dots = a_{nj} = 0 \quad (j\text{-тата колона е } = 0).$$

Но елемента jj на $A^*A + B^*B + \dots + C^*C$ е $x_{jj} + y_{jj} + \dots + z_{jj}$, където аналогично

$$\text{вземаме } Y := (y_{jk})_{n \times n} := B^*B, \dots, Z := (z_{jk})_{n \times n} := C^*C$$

3. Положителността и нейните разновидности в курса

3. Положителността и нейните разновидности в курса

В курса ще срещаме следните три разновидности на понятието за положителност:

- Положителни $*$ -алгебри

3. Положителността и нейните разновидности в курса

В курса ще срещаме следните три разновидности на понятието за положителност:

- **Положителни $*$ -алгебри**: това са такива $*$ -алгебри $\mathcal{A}$, за които

$$A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \cdots + A_n^* A_n = 0 \implies A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$$

за всеки краен брой $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

3. Положителността и нейните разновидности в курса

В курса ще срещаме следните три разновидности на понятието за положителност:

- **Положителни елементи** в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \cdots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

- Положителни елементи в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

- Положителни елементи в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

- **Положителни елементи** в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

$$(\text{понеже } (A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A)$$

- Положителни елементи в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

(понеже $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$) и те винаги съществуват.

- **Положителни елементи** в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

(понеже $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$) и те винаги съществуват.

Проблемът е, че може да се окаже, че всички елементи в една $\ast$ -алгебра са положителни!

- **Положителни елементи** в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

(понеже $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$) и те винаги съществуват.

Проблемът е, че може да се окаже, че всички елементи в една $\ast$ -алгебра са положителни!

От тази патологична ситуация ни предпазва условието за положителност на цялата алгебра.

- **Положителни елементи** в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + \dots + A_n^* A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати,

$$C^* = C$$

(понеже $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$) и те винаги съществуват.

Проблемът е, че може да се окаже, че всички елементи в една $\ast$ -алгебра са положителни!

От тази патологична ситуация ни предпазва условието за положителност на цялата алгебра.

В матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: положителните елементи се наричат още положително дефинитни матрици.

- Положителни линейни функционали над $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$:

$$\wp: \mathcal{A} \xrightarrow{\text{лин.}} \mathbb{C} \text{ е положителен } \Leftrightarrow \wp(A^*A) \geq 0 \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}$$

- Положителни линейни функционали над $*$ -алгебра $\mathcal{A}$:

$$\wp: \mathcal{A} \xrightarrow{\text{ли.}} \mathbb{C} \text{ е положителен} \Leftrightarrow \wp(A^*A) \geq 0 \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}$$

Забележка по терминологията : по-коректно би било в горните определения да се говори за неотрицателност, а не за положителност, понеже понятията се отнасят до нестроги неравенства " $\geq$ ", а не " $>$ ". По исторически причини ние обаче ще използваме "положителност", като в случаите, когато имаме строги неравенства " $>$ " ще говорим за "строга положителност".

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$ и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$ и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра** на $\mathcal{A}$, ако $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$ за $\forall A, B \in \mathcal{B}$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$ и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$ за $\forall A, B \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра с единица** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на горното $1 \in \mathcal{B}$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Определение Нека $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над K и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$ за $\forall A, B \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра с единица** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на горното $1 \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е $*$ -алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **$*$ -подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на първото условие по-горе, от $A \in \mathcal{B}$ то и $A^* \in \mathcal{B}$ за $\forall A \in \mathcal{B}$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Определение Нека $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над K и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$ за $\forall A, B \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра с единица** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на горното $1 \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е $*$ -алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **$*$ -подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на първото условие по-горе, от $A \in \mathcal{B}$ то и $A^* \in \mathcal{B}$ за $\forall A \in \mathcal{B}$
- За други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не са нужни повече условия: тези свойства преминават към подалгебрите, което се доказва непосредствено.

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$ и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако за $\forall A, B \in \mathcal{B}$ имаме $AB \in \mathcal{B}$.
- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра с единица** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на горното $1 \in \mathcal{B}$.
- Ако $\mathcal{A}$ е $*$ -алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **$*$ -подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на първото условие по-горе, от $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^* \in \mathcal{B}$ за $\forall A \in \mathcal{B}$.
- За други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не са нужни повече условия: тези свойства преминават към подалгебрите, което се доказва непосредствено.

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са линейни пространства над $\mathbb{K}$ и $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ е линейно изображение.

- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри, то f се нарича **морфизъм на алгебри**, ако за $\forall A, B \in \mathcal{B}$ имаме $f(AB) = f(A)f(B)$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри с единица, то f се нарича **морфизъм на алгебри с единица**, ако в допълнение на горното $f(\hat{1}_{\mathcal{B}}) = \hat{1}_{\mathcal{A}}$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са $*$ -алгебри, то f се нарича **морфизъм на $*$ -алгебри**, ако в допълнение на първото условие по-горе, $f(A^*) = f(A)^*$ за $\forall A \in \mathcal{B}$.
- Осново, за други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не се налагат повече условия.

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са линейни пространства над $\mathbb{K}$ и $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ е линейно изображение.

- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри, то f се нарича **морфизъм на алгебри**, ако за $\forall A, B \in \mathcal{B}$ имаме $f(AB) = f(A)f(B)$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри с единица, то f се нарича **морфизъм на алгебри с единица**, ако в допълнение на горното $f(\hat{1}_{\mathcal{B}}) = \hat{1}_{\mathcal{A}}$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са $*$ -алгебри, то f се нарича **морфизъм на $*$ -алгебри**, ако в допълнение на първото условие по-горе, $f(A^*) = f(A)^*$ за $\forall A \in \mathcal{B}$.
- Основа, за други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не се налагат повече условия.
- В горните случаи, ако f е биекция, то казваме, че f е **изоморфизъм от съответния тип**.

Определение Нека $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са линейни пространства над K и $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ е линейно изображение.

- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри, то f се нарича **морфизъм на алгебри**, ако за $\forall A, B \in \mathcal{B}$ имаме $f(AB) = f(A)f(B)$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри с единица, то f се нарича **морфизъм на алгебри с единица**, ако в допълнение на горното $f(\hat{1}_{\mathcal{B}}) = \hat{1}_{\mathcal{A}}$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са $*$ -алгебри, то f се нарича **морфизъм на $*$ -алгебри**, ако в допълнение на първото условие по-горе, $f(A^*) = f(A)^*$ за $\forall A \in \mathcal{B}$.
- Осново, за други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не се налагат повече условия.
- В горните случаи, ако f е биекция, то казваме, че f е **изоморфизъм от съответния тип**.
- В случая когато $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, а $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ е изображението на влизане, то ползваме съответните понятия за подалгебри от първото определение.

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

k_1		0	...	0
k_2	0		...	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k_m	0	0	...	
	k_1	k_2	k_m	

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

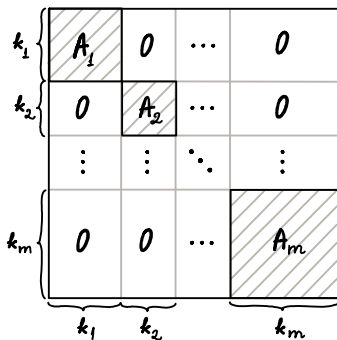
k_1	A_1	0	...	0
k_2	0	A_2	...	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k_m	0	0	...	A_m
	k_1	k_2		k_m

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

k_1	$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A_2 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\dots$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \right.$
k_2	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A_2 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A_2 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\dots$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \right.$
k_m	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\dots$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \right.$
	k_1	k_2	$\dots$	k_m

$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.



нарисат се блокно-диагонални матрици

$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

k_1	$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A_2 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \ddots \\ \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \right.$
k_2				
k_m				
	k_1	k_2	$\dots$	k_m

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$$

k_1	A_1	0	...	0
k_2	0	A_2	...	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k_m	0	0	...	A_m
	k_1	k_2		k_m

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) :=$$

$$:= \left\{ \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_m \end{array} \right\} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{за } A_j \in \text{Mat}_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) :=$$

$$:= \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{shaded } A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \text{shaded } A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \text{shaded } A_m \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{array}$$

нарисат се блок-диагонални матрици

$$\left. \begin{array}{l} \text{за } A_j \in \text{Mat}_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

$$:= \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Това е $\ast$ -подалгебра с $\hat{1} = \text{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Това е $*$ -подалгебра с $\hat{1} = \text{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$, понеже:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & C_m \\ \hline \end{array}$$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Това е $*$ -подалгебра с $\hat{1} = \text{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$, понеже:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & C_m \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow C_j = A_j B_j \text{ за } j = 1, \dots, m$$

4. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Това е $*$ -подалгебра с $\hat{1} = \text{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$, понеже:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & C_m \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow C_j = A_j B_j \text{ за } j = 1, \dots, m, \text{ т.е.,}$$

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_m) \cdot \text{diag}(B_1, \dots, B_m) = \text{diag}(A_1 B_1, \dots, A_m B_m)$$

Това е $*$ -подалгебра с $\hat{1} = \text{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$, понеже:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & C_m \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow C_j = A_j B_j \text{ за } j=1, \dots, m, \text{ т.е.,}$$

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_m) \cdot \text{diag}(B_1, \dots, B_m) = \text{diag}(A_1 B_1, \dots, A_m B_m)$$

$$\text{и още, } (\text{diag}(A_1, \dots, A_m))^* = \text{diag}(A_1^*, \dots, A_m^*)$$

Забележка: Изображенията : $\text{pr}_j : \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_{k_j}(\mathbb{C})$ за $j = 1, \dots, m$ са морфизми на $\ast$ -алгебри с единица. По такъв начин $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$ се оказва модел на $\ast$ -нар. прико произведение на асоциативни $\ast$ -алгебри с единица, т.е. имаме :

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) \cong \text{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \text{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}).$$

Допълнителни примери и контрапримери

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $*$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $*$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $*$ -алгебра с единица е $\cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $*$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $*$ -алгебра с единица е $\cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.
- Подпространството $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$, където $0 \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$ е $*$ -подалгебра на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра с единица е $\cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.
- Подпространството $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$, където $0 \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$ е $\ast$ -подалгебра на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, но не подалгебра с единица

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра с единица е $\cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.
- Подпространството $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$, където $0 \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$ е $\ast$ -подалгебра на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, но не подалгебра с единица. Същевременно, като самостоятелна $\ast$ -алгебра $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ има единица и това е $\text{diag}(0, \hat{1})$.

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра с единица е $\cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.
- Подпространството $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$, където $0 \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$ е $\ast$ -подалгебра на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, но не подалгебра с единица. Същевременно, като самостоятелна $\ast$ -алгебра $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ има единица и това е $\text{diag}(0, \hat{1})$.
Важно е, $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\} \cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството на горно триъгълните матрици

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\} \text{ е подалгебра с единица на } \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \text{ но}$$

не е $*$ -подалгебра

- Подпространството на строго горно триъгълни матрици

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ е подалгебра с на } \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \text{ но не е } *$$

подалгебра и не е подалгебра с единица, като въобще няма единица.

5. Основна структурна теорема

5. Основна структурна теорема

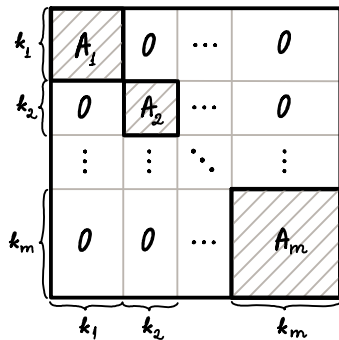
Всяка крайно-мерна, комплексна, асоциативна, положителна, $\ast$ -алгебра с единица е изоморфна на $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$ за единствени $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$.

5. Основна структурна теорема

Всяка крайно-мерна, комплексна, асоциативна, положителна, $\ast$ -алгебра с единица е изоморфна на $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$ за единствени $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$.

Забележка: не всяка $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ може да се преобразува (чрез смяна на базиса) в подалгебра от вида $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$.

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая



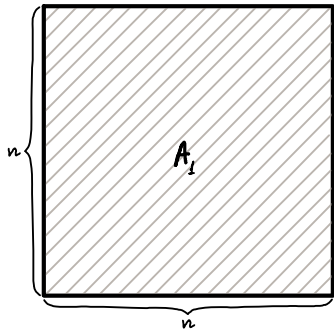
- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

1	a_1	0	0	...	0	0
1	0	a_2	0	...	0	0
1	0	0	a_3	...	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	...	a_{n-1}	0
1	0	0	0	...	0	a_n
	1	1	1		1	1

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

k_1	A_1	0	...	0
k_2	0	A_2	...	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k_m	0	0	...	A_m
	k_1	k_2		k_m

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая



- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

1	a_1	0	0	...	0	0
1	0	a_2	0	...	0	0
1	0	0	a_3	...	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	...	a_{n-1}	0
1	0	0	0	...	0	a_n
	1	1	1		1	1

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

1	a_1	0	0	...	0	0
1	0	a_2	0	...	0	0
1	0	0	a_3	...	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	...	a_{n-1}	0
1	0	0	0	...	0	a_n
	1	1	1		1	1

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

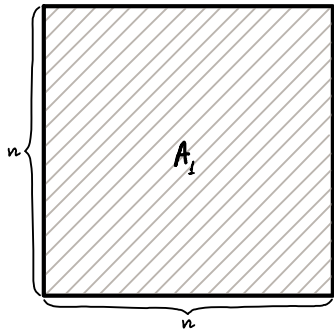
Това е единственият комутативен случай.

1	a_1	0	0	...	0	0
1	0	a_2	0	...	0	0
1	0	0	a_3	...	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	...	a_{n-1}	0
1	0	0	0	...	0	a_n
	1	1	1		1	1

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **чисто квантови системи**, $m=1$, $k_1=n \Rightarrow$ алгебрата на всички $n \times n$ матрици (1 блок)

Това е "напълно" некомутативен случай.



• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

1	a_1	0	0	...	0	0
1	0	a_2	0	...	0	0
1	0	0	a_3	...	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	...	a_{n-1}	0
1	0	0	0	...	0	a_n
	1	1	1		1	1

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

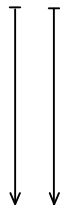
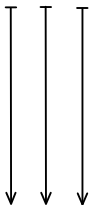
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\}$



$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \{a_1, a_2, a_3, & \dots & , a_{n-1}, a_n\} & \subseteq & \mathbb{C} & &
 \end{array}$$

A

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай алгебрата $A =$
 $\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C})$

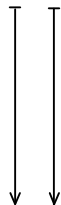
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



A

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong \text{комутативната}$$

$\ast$ -алгебра от функции

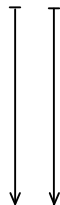
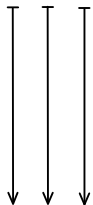
$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$$

В този случай алгебрата $A =$

$$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong \text{комутативната}$$

$\ast$ -алгебра от функции

$$A : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ върху } n\text{-елементно } \Omega$$

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

В този случай алгебрата $A =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$*$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

Наистина, законите за **сбиране** и **умножаване на диагонални матрици** съответстват на законите за **сбиране и умножаване на функции** (поелементно):

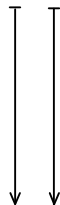
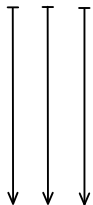
$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) + \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \iff (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$\ast$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за **събиране и умножаване на функции (поелементно)**:

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) + \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \iff (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

В този случай алгебрата $A =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$*$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

Наистина, законите за събиране и **умножаване на диагонални матрици** съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

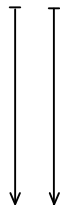
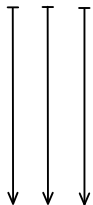
$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \times \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n) \iff (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)B(\omega_j)$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$\ast$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и **умножаване на функции (поелементно)**:

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \times \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n) \iff (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)B(\omega_j)$$

• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай също:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & A & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \{a_1, a_2, a_3, & \dots & , a_{n-1}, a_n\} & \subseteq & \mathbb{C} & &
 \end{array}$$

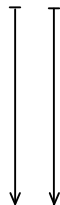
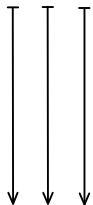
• В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай също:

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



$$A = A^*$$



наблюдаема

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Следствие. Съгласно т.4 имаме пълна класификация на квантовите системи в алгебричния подход с точност до изоморфизъм, посредством класификацията на алгебрите на наблюдаемите им. Така, можем да сгисаме, че алгебрата на наблюдаемите е :

$$\mathcal{A} = \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$$

за единствени цели положителни числа $k_1 \leq \dots \leq k_m$ - тази редица напълно определя вида на системата.

В частност, отделят се следните два гранични случая :

а) $k_1 = \dots = k_m = 1$ - това ще бъдат класическите системи по-долу

б) $m = 1$ - това ще наречем чисто квантови или още, неприводими квантови системи.

6. Комутативния случай. Класически системи

Следствие Една крайно-мерна, положителна, комплексна, асоциативна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица е комутативна

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \equiv \{ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

Тогава тя е изоморфна на алгебрата

$$\text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) := \{ A \mid A: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \} \text{ от функции}$$

върху n -елементно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$,

$$\begin{array}{ccc} \Omega & = & \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \\ A \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} & \in & a_1, \dots, a_n \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

понеже имат еднакви закони за събиране, умножение и свързване

Определение **Класическа система** е такава, която се определя от комутативна алгебра на наблюдаемите. Съгласно т.5 това означава, че алгебрата на наблюдаемите е алгебрата от функциите върху крайно множество. Наблюдаемите са реалните

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} & & & & \\
 \text{функции } A = A^* & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 \mathbb{R} & \in & a_1, \dots, a_n & &
 \end{array}$$

и в този, и само в този случай, те също образуват алгебра, която е реална и комутативна.

7. Подсистеми, надсистеми, експерименти
съвместна / едновременно измеримост

7. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна / едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.

4. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна / едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания
върху подсистемата

4. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна /едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания
върху подсистемата Това е аналогично и на квантово-логическия подход и както
там, така и тук искаме основните операции, които в случая са алгебричните, да се
наследават и от подсистемата

4. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна / едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания
върху подсистемата Това е аналогично и на квантово-логическия подход и както
там, така и тук искаме основните операции, които в случая са алгебричните, да се
наследават и от подсистемата
- При размяна на местата подсистема $\subseteq$ система ползваме: система $\subseteq$ надсистема.

4. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна /едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания
върху подсистемата. Това е аналогично и на квантово-логическия подход и както
там, така и тук искаме основните операции, които в случая са алгебричните, да се
наследават и от подсистемата.
- При размена на местата подсистема $\subseteq$ система $\subseteq$ надсистема.
Както и при квантово-логическия подход, надсистемите образуват процеса на уточняване
(изфиняване) на измерванията.

4. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна /едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания
върху подсистемата. Това е аналогично и на квантово-логическия подход и както
там, така и тук искаме основните операции, които в случая са алгебричните, да се
наследават и от подсистемата.
- При размяна на местата подсистема $\subseteq$ система $\subseteq$ надсистема.
Както и при квантово-логическия подход, надсистемите образуват процеса на уточняване
(изфиняване) на измерванията. В контекста на квантовата информатика, прехода
към надсистема се използва при надграждане на изчисленията, например.

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа.

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството $\mathbb{C}[A] :=$ всички полиноми от A

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството
$$\mathbb{C}[A] := \text{всички полиноми от } A$$
$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството

$\mathbb{C}[A] :=$ всички полиноми от A

$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \dots \}$$

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то множеството

$\mathbb{C}[A] :=$ всички полиноми от A

$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \dots \}$$

е най-малката, комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A .

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството

$$\mathbb{C}[A] := \text{всички полиноми от } A$$

$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \dots \}$$

е най-малката, комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A .
Следователно, това е минималния експеримент, при който се измерва наблюдаемата A .

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството

$$\mathbb{C}[A] := \text{всички полиноми от } A$$

$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \dots \}$$

е най-малката, комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A . Следователно, това е минималния експеримент, при който се измерва наблюдаемата A .

- Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ се наричат съвместни (още, едновременно / съвместно измерими), ако могат да се измерят в общ експеримент.

- Експеримент - това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството

$$\mathbb{C}[A] := \text{всички полиноми от } A$$

$$\equiv \{ a_0 \hat{1} + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \dots \}$$

е най-малката, комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A . Следователно, това е минималния експеримент, при който се измерва наблюдаемата A .

- Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ се наричат съвместни (още, едновременно / съвместно измерими), ако могат да се измерят в общ експеримент.

Следователно, A и B са съвместни $\Leftrightarrow$

A и B се съдържат в обща комутативна, $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$.

Теорема Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ са съвместни $\Leftrightarrow A$ и B комутират, т.е.,
 $AB = BA$

Теорема Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ са съвместни $\Leftrightarrow A$ и B комутират, т.е.,
 $AB = BA$

Схема на доказателството. $\Rightarrow$) това следва непосредствено от определението.

$\Leftarrow$) Ако A и B комутират, то

$\mathbb{C}[A, B] :=$ всички полиноми от A и B

е най-малката комутативна $*$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A и B .

8. Защо наблюдаемите са реални, а
алгебрите на наблюдаемите – комплексни

8. Защо наблюдаемите са реални, а алгебрите на наблюдаемите – комплексни

Полето на реалните числа $\mathbb{R}$ е максималното наредено поле, т.е., това е максималната наредена числова система, което ни прави универсални при моделирането на системите в природата.

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$
- наистина: $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$
- наистина: $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$

Ако получените A и B комутират, т.е., те са едновременно измерими наблюдаеми, то елемента C се нарича нормален елемент на $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$.

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$
- наистина: $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$

Ако получените A и B комутират, т.е., те са едновременно измерими наблюдаеми, то елемента C се нарича нормален елемент на $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$. Тоеест, тогава C е комплексна наблюдаема, което се свежда до двойка съвместни реални наблюдаеми.

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$
- наистина: $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$

Ако получените A и B комутират, т.е., те са едновременно измерими наблюдаеми, то елемента C се нарича нормален елемент на $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$. Тоеест, тогава C е комплексна наблюдаема, което се свежда до двойка съвместни реални наблюдаеми.

Но въобще, защо е нужно да се отива към алгебри над комплексните числа?

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрегнати $A, B \in \mathcal{A}$
- наистина: $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$

Ако получените A и B комутират, т.е., те са едновременно измерими наблюдаеми, то елемента C се нарича нормален елемент на $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$. Тоеест, тогава C е комплексна наблюдаема, което се свежда до двойка съвместни реални наблюдаеми.

Но въобще, защо е нужно да се отива към алгебри над комплексните числа?

Отговор: заради основната теорема на алгебрата, че всеки полином има корен в полето на комплексните числа. Това позволява да се докаже основната класификационна теорема в т. 5.



9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1.

9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното съотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$.

9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното съотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$. Добавяйки и условието за наблюдаема $Q = Q^*$ достигахме до следните определения.

9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното съотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$. Добавяйки и условието за наблюдаема $Q = Q^*$ достигахме до следните определения.

Определение а) Самоспрегнат идемпотент Q в $*$ -алгебра $\mathcal{A}$, това е елемент $Q \in \mathcal{A}$ такъв, че: $Q^* = Q = Q^2$

9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното соотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$. Добавяйки и условието за наблюдаема $Q = Q^*$ достигахме до следните определения.

Определение а) **Самоспрегнат идемпотент** Q в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, това е елемент $Q \in \mathcal{A}$ такъв, че: $Q^* = Q = Q^2$

9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното съотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$. Добавяйки и условието за наблюдаема $Q = Q^*$ достигахме до следните определения.

Определение а) **Самоспрегнат идемпотент** Q в $*$ -алгебра $\mathcal{A}$, това е елемент $Q \in \mathcal{A}$ такъв, че: $Q^* = Q = Q^2$

б) Събитие в квантова система е самоспрегнат идемпотент на алгебрата на наблюдаемите.

Пример : събитие в класическа система

Пример: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$

Пример: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

Пример: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

$$Q^* = Q = Q^2 \iff \overline{Q(\omega)} = Q(\omega) = Q(\omega)^2 \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

Пример: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

$$Q^* = Q = Q^2 \iff \overline{Q(\omega)} = Q(\omega) = Q(\omega)^2 \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\iff Q(\omega) \in \{0, 1\}$$

Пример: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

$$Q^* = Q = Q^2 \iff \overline{Q(\omega)} = Q(\omega) = Q(\omega)^2 \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\iff Q(\omega) \in \{0, 1\}$$

$$\iff Q = \chi_S, \text{ т.е., } Q \text{ е характеристична функция на подмножество } S \subseteq \Omega$$

Пример: събитие в класическа система – ако тя се определя от крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

$$Q^* = Q = Q^2 \iff \overline{Q(\omega)} = Q(\omega) = Q(\omega)^2 \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\iff Q(\omega) \in \{0, 1\}$$

$$\iff Q = \chi_S, \text{ т.е., } Q \text{ е характеристична функция на подмножество } S \subseteq \Omega$$

$$\text{където } S = \{\omega \in \Omega \mid Q(\omega) = 1\} \text{ и } \chi_S(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ако } \omega \in S \\ 0 & \text{ако } \omega \notin S \end{cases}$$

10. Логика и аритметика

10. Логика и аритметика

В класическите системи логическите операции имат алгебричен израз.

10. Логика и аритметика

В класическите системи логическите операции имат алгебричен израз.

За $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ имаме : $\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \cdot \chi_{S_2}$

10. Логика и аритметика

В класическите системи логическите операции имат алгебричен израз.

За $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ имаме :

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \cdot \chi_{S_2}$$
$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

10. Логика и аритметика

В класическите системи логическите операции имат алгебричен израз.

$$\text{За } S_1, S_2 \subseteq \Omega \text{ имаме: } \chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \cdot \chi_{S_2}$$

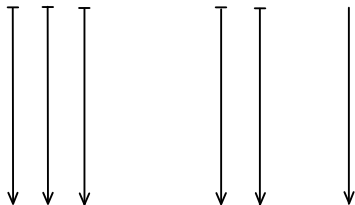
$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

В частност: $\Omega = S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_m$ - дизюнктивно разбиване

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{1} \equiv \chi_{\Omega} = \chi_{S_1} + \dots + \chi_{S_m} \\ 0 \equiv \chi_{\emptyset} = \chi_{S_j} \chi_{S_k} \text{ за } \forall j \neq k \end{cases}$$

- **КЛАСИЧЕСКИ СИСТЕМИ**

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$A = A^* \iff \text{наблюдаема}$$

- **КЛАСИЧЕСКИ СИСТЕМИ**

$$\{\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_k, \dots, \omega_n\} = \Omega$$


 χ_S


сблъгване

$$\{0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0\} \subseteq \mathbb{R}$$

- **КЛАСИЧЕСКИ СИСТЕМИ**

$$\{\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_k, \dots, \omega_n\} = \Omega$$


 χ_S


свѣдѣние = характеристична функция
на подмножество $S \subseteq \Omega$

$$\{0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0\} \subseteq \mathbb{R}$$

- **КЛАСИЧЕСКИ СИСТЕМИ**

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_k, \dots, \omega_n\} & = & \Omega \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0\} & \subseteq & \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad \chi_S$$



свѣдѣние = характеристична функция
на подмножество $S \subseteq \Omega$

логически и алгебрични операции:

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. $(1) \Rightarrow (3)$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е **самоспрегнат** идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. $(1) \Rightarrow (3)) \quad PQ = (PQ)^*$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. $(1) \Rightarrow (3)) \quad PQ = (PQ)^* = Q^* P^*$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. $(1) \Rightarrow (3)$) $PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2))

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е **самоспрегнат** идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2)) $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2)) $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$

$$(P + Q - PQ)^2 = (P + Q - PQ)(P + Q - PQ)$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2)) $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$

$$(P + Q - PQ)^2 = (P + Q - PQ)(P + Q - PQ)$$

$$= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2)) $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$

$$(P + Q - PQ)^2 = (P + Q - PQ)(P + Q - PQ)$$

$$= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ$$

$$= P + PQ - PQ + PQ + Q - PQ - PQ - PQ + PQ$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2)) $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$

$$(P + Q - PQ)^2 = (P + Q - PQ)(P + Q - PQ)$$

$$= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ$$

$$= P + PQ - PQ + PQ + Q - PQ - PQ - PQ + PQ$$

$$= P + Q - PQ$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство.

$$(2) \Rightarrow (1)$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра A , ако $P, Q \in A$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство.

$(2) \Rightarrow (1))$ $PQ = P + Q - (P + Q - PQ)$ - самоспрегнат е.

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство.

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow (1) \quad & PQ = P + Q - (P + Q - PQ) - \text{самоспрегнат е.} \\ \Rightarrow & PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP - \text{комутират} \end{aligned}$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство.

$$\begin{aligned}(2) \Rightarrow (1) \quad & PQ = P + Q - (P + Q - PQ) - \text{самоспрегнат е.} \\ \Rightarrow & PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP - \text{комутират} \\ \Rightarrow & (PQ)^2 = PQPQ = P^2 Q^2 = PQ - \text{идемпотент.} \\ & \square\end{aligned}$$

Доказателство. $(1) \Rightarrow (3)) \quad PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$

$$(3) \Rightarrow (2)) \quad (P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP$$

$$(P + Q - PQ)^2 = (P + Q - PQ)(P + Q - PQ)$$

$$= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ$$

$$= P + PQ - PQ + PQ + Q - PQ - PQ - PQ + PQ$$

$$= P + Q - PQ$$

$$(2) \Rightarrow (1)) \quad PQ = P + Q - (P + Q - PQ) - \text{самоспрегнат е.}$$

$$\Rightarrow PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP - \text{комутира}$$

$$\Rightarrow (PQ)^2 = PQPQ = P^2Q^2 = PQ - \text{идемпотент.}$$

□

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $\ast$ -алгебра с единица

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$).

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r)$$

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_i, Q_i), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $\ast$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$.

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме спектрално разлагане на елемента A

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме спектрално разлагане на елемента A
- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_r$.

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $*$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме спектрално разлагане на елемента A
- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_r$.
- $Q_j Q_k = 0$ ако $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, r$

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $\ast$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме спектрално разлагане на елемента A
- $I = Q_1 + \dots + Q_r$. } в този случай казваме, че $Q_1, \dots, Q_r$
- $Q_j Q_k = 0$ ако $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, r$. } задават разбиване на единицата

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е комплексна, положителна $\ast$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме спектрално разлагане на елемента A
- $I = Q_1 + \dots + Q_r$. } в този случай казваме, че $Q_1, \dots, Q_r$
- $Q_j Q_k = 0$ ако $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, r$. } задават разбиване на единицата

Множеството $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ се нарича спектър на A , а $Q_1, \dots, Q_r$ - спектрални идемпотенти на A .

Пример : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Пример : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Ако $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е., $A = A^*$)

Пример : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Ако $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е., $A = A^*$)

тогава $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = A(\Omega)$ - множеството от стойности на A

Пример : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Ако $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е., $A = A^*$)

тогава $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = A(\Omega)$ - множеството от стойности на A

$$S_j = A^{-1}(\alpha_j) \text{ за } j = 1, \dots, r, \quad Q_j = \chi_{S_j}$$

Пример : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Ако $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е., $A = A^*$)

тогава $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = A(\Omega)$ - множеството от стойности на A

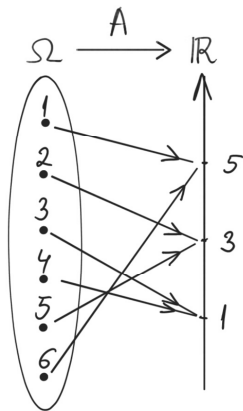
$S_j = A^{-1}(\alpha_j)$ за $j = 1, \dots, r$, $Q_j = \chi_{S_j}$. Така :

$$A(\omega) = \alpha_1 \chi_{S_1}(\omega) + \dots + \alpha_r \chi_{S_r}(\omega) \quad \text{за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \chi_{S_1}(\omega) + \dots + \chi_{S_r}(\omega) \\ 0 &= \chi_{S_j}(\omega) \chi_{S_k}(\omega) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \Omega = S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_r$$

Пример:

$$\begin{aligned}
 A &= \\
 &= 1 \cdot \chi_{\{3,4\}} \\
 &+ 3 \cdot \chi_{\{2,5\}} \\
 &+ 5 \cdot \chi_{\{1,6\}}
 \end{aligned}$$



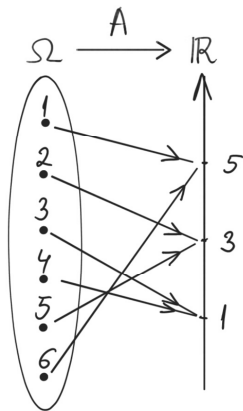
$$\{3, 4\} = A^{-1}(1),$$

$$\{2, 5\} = A^{-1}(3),$$

$$\{1, 6\} = A^{-1}(5).$$

Пример:

$$\begin{aligned}
 A &= \\
 &= 1 \cdot \chi_{\{3,4\}} \\
 &+ 3 \cdot \chi_{\{2,5\}} \\
 &+ 5 \cdot \chi_{\{1,6\}}
 \end{aligned}$$



$$\{3, 4\} = A^{-1}(1),$$

$$\{2, 5\} = A^{-1}(3),$$

$$\{1, 6\} = A^{-1}(5).$$

Сравнение на
означенията:

$$A = \underbrace{1}_{\alpha_1} \underbrace{\chi_{\{3,4\}}}_{Q_1} + \underbrace{3}_{\alpha_2} \underbrace{\chi_{\{2,5\}}}_{Q_2} + \underbrace{5}_{\alpha_3} \underbrace{\chi_{\{1,6\}}}_{Q_3}$$

Значение (интерпретация): спектърът на една наблюдаема е множеството на възможните стойности, които наблюдаемата може да приема при измерване.

Значение (интерпретация): спектърът на една наблюдаема е множеството на възможните стойности, които наблюдаемата може да приема при измерване. Ако (α_j, Q_j) е двойка от спектралното разложение на наблюдаема A , то спектралният идемпотент се нарича още спектрално събитие и се интерпретира, като събитието " $A = \alpha_j$ ", т.е., "при измерване на A е получена стойност α_j ".

Значение (интерпретация): спектърът на една наблюдаема е множеството на възможните стойности, които наблюдаемата може да приема при измерване. Ако (α_j, Q_j) е двойка от спектралното разложение на наблюдаема A , то спектралния идемпотент се нарича още спектрално събитие и се интерпретира, като събитието " $A = \alpha_j$ ", т.е., "при измерване на A е получена стойност α_j ".

Забележка За самоспразкати матрици, по-нататък ще имаме, се спектърът е множеството от собствените им стойности, а спектралните идемпотенти са ортогоналните проектори върху съответните подпространства от собствени вектори.

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_m$ е разбиване на $\hat{I}$ в $\ast$ -алгебра

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_m$ е разбиване на $\hat{I}$ в $\ast$ -алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_m$ е разбиване на $\hat{I}$ в $\ast$ -алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

В частност, ако

$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е спектралното разлагане на A

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_r$ е разбиване на $\hat{I}$ в $\ast$ -алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

В частност, ако

$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е спектралното разлагане на A , то

$A^\ell = \alpha_1^\ell Q_1 + \dots + \alpha_r^\ell Q_r$ е спектралното разлагане на A^ℓ (за $\ell = 1, 2, \dots$)

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_r$ е разбиване на $\hat{I}$ в $\ast$ -алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

В частност, ако

$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е спектралното разлагане на A , то

$A^\ell = \alpha_1^\ell Q_1 + \dots + \alpha_r^\ell Q_r$ е спектралното разлагане на A^ℓ (за $\ell = 1, 2, \dots$)

в т.ч. и $1 = A^0 = \alpha_1^0 Q_1 + \dots + \alpha_r^0 Q_r$.

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_r$ е разбиране на $\hat{I}$ в $\mathcal{A}$ -алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

В частност, ако

$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е спектралното разлагане на A , то

$A^\ell = \alpha_1^\ell Q_1 + \dots + \alpha_r^\ell Q_r$ е спектралното разлагане на A^ℓ (за $\ell = 1, 2, \dots$)

в т.ч. и $I = A^0 = \alpha_1^0 Q_1 + \dots + \alpha_r^0 Q_r$.

Определение За $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ полагаме:

$$f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$$

Определение Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (или по-общо, самоспрегнат елемент в $\ast$ -алгебра), която има спектрално разложение $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е то полагаме: $f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$

Определение Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (или по-общо, самоспрегнат елемент в $\ast$ -алгебра), която има спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е то полагаме: $f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$, което е отново наблюдаема (т.е., $f(A) = f(A)^*$ - самоспрегнат).

Определение Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (или по-общо, самоспрегнат елемент в $\ast$ -алгебра), която има спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е то полагаме: $f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$, което е отново наблюдаема (т.е., $f(A) = f(A)^*$ - самоспрегнат).

$\Rightarrow f(x) := x^n$ имаме съгласуваност, както и по-общо, за $f(x)$ = полином на x .

Определение Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (или по-общо, самоспрегнат елемент в $\ast$ -алгебра), която има спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е то полагаме: $f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$, което е отново наблюдаема (т.е., $f(A) = f(A)^*$ - самоспрегнат).

$\Rightarrow f(x) := x^n$ имаме съгласуваност, както и по-общо, за $f(x)$ = полином на x .

На това се основава т.нар. "функционално смятане" в $\ast$ -алгебри.

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

(i) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

(1) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).

(2) $A = B^2$, за наблюдаема B .

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

(1) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).

(2) $A = B^2$, за наблюдаема B .

(3) Спектърът на A се състои от **неотрицателни** числа.

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

(1) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).

(2) $A = B^2$, за наблюдаема B .

(3) Спектърът на A се състои от **неотрицателни** числа.

В кой да е от горните случаи ще пишем $A \geq 0$.

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

(1) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).

(2) $A = B^2$, за наблюдаема B .

(3) Спектърът на A се състои от **неотрицателни** числа.

В кой да е от горните случаи ще пишем $A \geq 0$.

Доказателство Импликациите $(1) \Leftarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ се ползват непосредствено от досегашните резултати. Импликацията $(1) \Rightarrow (3)$ се доказва с използване на техниката на оператори в хилбертови пространства, с която ще се запознаем по-късно. $\square$

Определение За две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ ще пишем $A \leq B$ ако $B - A \geq 0$, което в частност се пренася и върху събитията (като наблюдаеми).

Определение За две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ ще пишем $A \leq B$ ако $B - A \geq 0$, което в частност се пренася и върху събитията (като наблюдаеми).

По-нататък, с помощта на техниката на оператори в хилбертови пространства ще установим:

Определение За две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ ще пишем $A \leq B$ ако $B - A \geq 0$, което в частност се пренася и върху събитията (като наблюдаеми).

По-нататък, с помощта на техниката на оператори в хилбертови пространства ще установим:

Теорема За две събития $P, Q \in \mathcal{A}$ (т.е., $P^* = P = P^2$ и $Q^* = Q = Q^2$) имаме:

$$P \leq Q \iff PQ = P \iff QP = P$$

Определение За две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ ще пишем $A \leq B$ ако $B - A \geq 0$, което в частност се пренася и върху събитията (като наблюдаеми).

По-нататък, с помощта на техниката на оператори в хилбертови пространства ще установим:

Теорема За две събития $P, Q \in \mathcal{A}$ (т.е., $P^* = P = P^2$ и $Q^* = Q = Q^2$) имаме:

$$P \leq Q \iff PQ = P \iff QP = P$$

Това именно съответства на релацията мажориране в квантово логическия подход.

14. Статистика на наблюдаемите величини и
съответствието ѝ с обикайната теория
на вероятностите за случайни величини

14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обикайната теория на вероятностите за случайни величини

Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е нейното спектрално разлагане
и нека ρ е състояние (т.е., $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линеен, нормиран, положителен функционал)

14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обикайната теория на вероятностите за случайни величини

Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е нейното спектрално разлагане
и нека ρ е състояние (т.е., $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линеен, нормиран, положителен функционал)
Съгласно аксиоматичната ни интерпретация

$\rho(Q_j) = \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_j\} :=$ вероятността A след измерване в състояние ρ да приеме стойност α_j .

14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обикайната теория на вероятностите за случайни величини

Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е нейното спектрално разлагане и нека ρ е състояние (т.е., $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линеен, нормиран, положителен функционал)

Съгласно аксиоматичната ни интерпретация

$\rho(Q_j) = \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_j\} :=$ вероятността A след измерване в състояние ρ да приеме стойност α_j .

и тогава $\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$ (= средната стойност на A в ρ)

$$= \alpha_1 \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_1\} + \dots + \alpha_r \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_r\}$$

14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обикайната теория на вероятностите за случайни величини

Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е нейното спектрално разлагане и нека ρ е състояние (т.е., $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линеен, нормиран, положителен функционал)

Съгласно аксиоматичната ни интерпретация

$\rho(Q_j) = \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_j\} :=$ вероятността A след измерване в състояние ρ да приеме стойност α_j .

и тогава $\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$ (= средната стойност на A в ρ)

$$= \alpha_1 \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_1\} + \dots + \alpha_r \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_r\}$$

- това е стандартна формула от теорията на вероятностите за средната стойност на случайна величина - това е сумата от произведенията стойности $\times$ вероятности за тях.

Горната формула се съгласува и с емпиричната формула за средна стойност :

Горната формула се съгласува и с емпиричната формула за средна стойност :

$$\langle A \rangle_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$$

Горната формула се съгласува и с емпиричната формула за средна стойност:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_p &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \cdot (\# \{k \mid a_k = \alpha_1\}) + \dots + \alpha_r \cdot (\# \{k \mid a_k = \alpha_r\})}{N}\end{aligned}$$

Горната формула се съгласува и с емпиричната формула за средна стойност:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_p &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} \\&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \cdot (\# \{k \mid a_k = \alpha_1\}) + \dots + \alpha_r \cdot (\# \{k \mid a_k = \alpha_r\})}{N} \\&= \alpha_1 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \mid a_k = \alpha_1\}}{N} + \dots + \alpha_r \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \mid a_k = \alpha_r\}}{N}\end{aligned}$$

Горната формула се съгласува и с емпиричната формула за средна стойност:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_p &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} \\&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \cdot (\# \{k \mid a_k = \alpha_1\}) + \dots + \alpha_r \cdot (\# \{k \mid a_k = \alpha_r\})}{N} \\&= \underbrace{\alpha_1 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \mid a_k = \alpha_1\}}{N}}_{\text{Prob}_p \{A = \alpha_1\}} + \dots + \underbrace{\alpha_r \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \mid a_k = \alpha_r\}}{N}}_{\text{Prob}_p \{A = \alpha_r\}}\end{aligned}$$

Определение Съответствието : спектрална стойност $\alpha_j \mapsto$ вероятност за $A = \alpha_j$ в ρ се нарича вероятностно разпределение на наблюдаемата A в състояние ρ

Определение Съответствието : спектрална стойност $\alpha_j \mapsto$ вероятност за $A = \alpha_j$ в ρ се нарича вероятностно разпределение на наблюдаемата A в състояние ρ

- Това е цялата статистическа информация за A в ρ . Може ли тя да се извлече само от средните стойности ?

Определение Съответствието : спектрална стойност $\alpha_j \mapsto$ вероятност за $A = \alpha_j$ в ρ се нарича вероятностно разпределение на наблюдаемата A в състояние ρ

- Това е цялата статистическа информация за A в ρ . Може ли се да се извлече само от средните стойности ?

Отговор - да , но от няколко средни стойности .

Определение Съответствието : спектрална стойност $\alpha_j \mapsto$ вероятност за $A = \alpha_j$ в ρ се нарича вероятностно разпределение на наблюдаемата A в състояние ρ

- Това е цялата статистическа информация за A в ρ . Може ли се да се извлече само от средните стойности ?

Отговор - да , но от няколко средни стойности .

нека $p_1 := \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_1\} = ?$, $\dots$, $p_r := \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_r\} = ?$

- върсените вероятности

Тогава:

$$\langle A \rangle_p = \alpha_1 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r \cdot p_r$$

$$\langle A^2 \rangle_p = \alpha_1^2 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^2 \cdot p_r$$

$$\vdots$$

$$\langle A^r \rangle_p = \alpha_1^r \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^r \cdot p_r$$

Тогава:

$$\langle A \rangle_p = \alpha_1 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r \cdot p_r \quad - \text{линейната система на Вандермонд}$$

$$\langle A^2 \rangle_p = \alpha_1^2 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^2 \cdot p_r \quad \Rightarrow \text{определя } p_1, \dots, p_r$$

$$\vdots$$

$$\langle A^r \rangle_p = \alpha_1^r \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^r \cdot p_r$$

Товава:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_p &= \alpha_1 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r \cdot p_r && - \text{линейната система на Вандермонд} \\ \langle A^2 \rangle_p &= \alpha_1^2 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^2 \cdot p_r && \Rightarrow \text{определя } p_1, \dots, p_r \\ &\vdots \\ \langle A^r \rangle_p &= \alpha_1^r \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^r \cdot p_r \end{aligned}$$

Това е "крайния" частен случай на ч.кар. проблем на моментите на Хамбургер.

Товава:

моменти

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_p &= \alpha_1 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r \cdot p_r \\ \langle A^2 \rangle_p &= \alpha_1^2 \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^2 \cdot p_r \\ &\vdots \\ \langle A^r \rangle_p &= \alpha_1^r \cdot p_1 + \cdots + \alpha_r^r \cdot p_r \end{aligned}$$

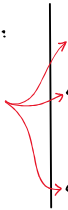
- линейната система на Вандермонд

$\Rightarrow$ определя $p_1, \dots, p_r$

Това е "крайния" частен случай на ч.кар. проблем на **моментите** на Хамбургер.

Товава:

моменти



$$\begin{aligned} \langle A \rangle_p &= \alpha_1 \cdot p_1 + \dots + \alpha_r \cdot p_r \\ \langle A^2 \rangle_p &= \alpha_1^2 \cdot p_1 + \dots + \alpha_r^2 \cdot p_r \\ &\vdots \\ \langle A^r \rangle_p &= \alpha_1^r \cdot p_1 + \dots + \alpha_r^r \cdot p_r \end{aligned}$$

- линейната система на Вандермонд

$\Rightarrow$ определя $p_1, \dots, p_r$

Това е "крайния" частен случай на ч.кар. проблем на моментите на Хамбургер.

Следователно, задаването на състоянието само като средни стойности, но за всички наблюдаеми (включително и степените) дава пълна статистическа информация

Следващ проблем: но ако разполагаме с момените $\langle A \rangle_p, \langle A^2 \rangle_p, \dots$, кога ще можем по горната линейна система на Вандермонд числа $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ - т.е., иначе смисъл на вероятности.

Следващ проблем: но ако разполагаме с момените $\langle A \rangle_p, \langle A^2 \rangle_p, \dots$, кога те ще дават по горната линейна система на Вандермонд числа $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ - т.е., инак си смисъл на вероятности.

Отговор дава т.нар. теорема на Бохнер: НДУ за това е момените $\langle A^n \rangle_p$ да идват от положителен нормиран линейен функционал $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Следващ проблем: но ако разполагаме с момените $\langle A \rangle_p, \langle A^2 \rangle_p, \dots$, кога ще сме дадем по горната линейна система на Вандермонд числа $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ - т.е., инак си смисъл на вероятности.

Отговор дава т.нар. теорема на Бохнер: НДУ за това е момените $\langle A^n \rangle_p$ да идват от положителен нормиран линейен функционал $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Това мотивира аксиомата за състоянията.

Следващ проблем: но ако разполагаме с момените $\langle A \rangle_p, \langle A^2 \rangle_p, \dots$, кога те ще дават по горната линейна система на Вандермонд числа $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ - т.е., иначе смисъл на вероятности.

Отговор дава т.нар. теорема на Бохнер: НДУ за това е момените $\langle A^n \rangle_p$ да идват от положителен нормиран линейен функционал $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Това мотивира аксиомата за състоянието.

15. Обобщения на алгебричния подход

• • •