

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 6 / 14.11.2022

Тасаките в текста, които са в зелен цвят представляват допълнителен материал

План:

1. Кубит : наблюдаеми, събития, сфера на Блох
2. Хилбертови пространства и лин. оператори в тях
 - а) Хилбертово пространство – определение (припомняне)
 - б) Ортонормирани бази си / О.н.б. (припомняне)
 - в) Оператори и матрици (ново)
 - г) Бра-кет означения (ново)
 - д) Ортогонални проектори = събития
 - е) О.н.б. в подпространства и разбиване на събития
 - ж) Спектрална теорема за ермитови матрици
3. Състояния : матрици на плътността и вектори на състояния
 - а) Общ вид на състоянието чрез следата
 - б) Следата на матрица – определение и свойства
 - в) Характеризация на матриците на плътността
 - г) Поведението на матриците на плътността при смесване
 - д) Чисти състояния и вектори на състоянията
 - е) 1 – 1 съответствие елементарни събития – чисти състояния и вероятност за преход
 - ж) Състоянията на квантовия бит
4. Суперпозиция на вектори на състояния $\neq$ смес на състояния
5. Квантово “гасане” (интерференция) на вероятностите
6. Обобщения на алгебричния подход

1. Кубит : наблюдаеми, събития, сфера на Блох

Напомниме : чисто квантова система е такава система, която се определя от алгебра на наблюдаемите $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C}) := \mathcal{H}$ -алгебрата на комплексните, квадратни $n \times n$ -матрици. Чистото n се оказва нивото на системата, така както го въведохме в квантово-логическия подход: това е максималния брой алтернативи, които могат да се получат в експеримент. За система бит : $n = 2$ и за кубит имаме : $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Забележете : нивото е $n = 2$, но алгебрата на наблюдаемите е $n^2 = 4$ -мерна комплексна.

Наблюдаема в кубит : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$, за $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow a = \bar{a}, b = \bar{c}, d = \bar{d} \Rightarrow a, d \in \mathbb{R}, \bar{b} = c = x + iy, \text{ за } x, y \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ наблюдаемите са отново $n^2 = 4$ -мерно линейно пространство, но над $\mathbb{R}$.

Нека преозначим : $a := r + z, d := r - z \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(a + d), z = \frac{1}{2}(r - d)$.

Така $A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$, за $x, y, z, r \in \mathbb{R}$ - общ вид на наблюдаема.

Кога A е събитие? Нужно е освен $A = A^*$ (вече е удовлетворено), още и $A = A^2$.

$$\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} (r+z)^2 + (x-iy)(x+iy) & (r+z)(x-iy) + (x-iy)(r-z) \\ (x+iy)(r+z) + (r-z)(x+iy) & (x+iy)(x-iy) + (r-z)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r+z = x^2 + y^2 + z^2 + r^2 + 2rz & , & x-iy = (x-iy) \cdot 2r \\ x+iy = (x+iy) \cdot 2r & , & r-z = x^2 + y^2 + z^2 + r^2 - 2rz \end{cases}$$

$$1 \text{ случай) } x = y = 0 \Rightarrow \begin{cases} r+z = (r+z)^2 \\ r-z = (r-z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1, z=0 : A = \uparrow \\ r=0, z=0 : A = 0 \end{cases}$$

2 случай) $x+iy \neq 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$. Отново преозначаване :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x, y \mapsto \frac{1}{2}y, z \mapsto \frac{1}{2}z, r \mapsto \frac{1}{2}r :$$

уравнение на единичната сфера в $\mathbb{R}^3 \leftarrow$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$$

за $x^2 + y^2 + z^2 = 1 = r$

Общ вид на елементарните събития

$$P_{\vec{u}} \equiv P_{(x,y,z)} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \sigma_{\vec{u}})$$

където $\hat{\sigma}_{\vec{u}} \equiv \hat{\sigma}_{(x,y,z)} := x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P_{\vec{u}}^{\perp} := \hat{1} - P_{\vec{u}} = P_{-\vec{u}}$$

матрици на Паули / Pauli

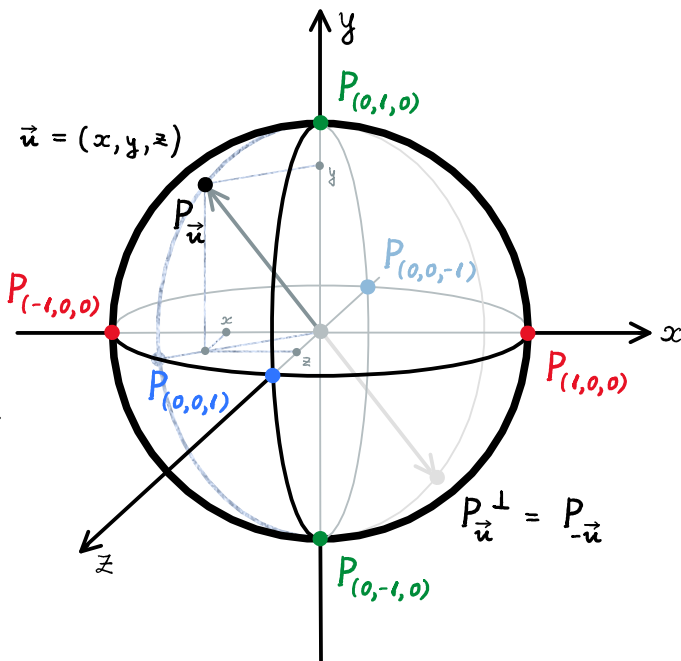
Квантов бит - "диаграма на Хае" на събитията:

ниво 2:



ниво 1:

елементарни
събития
- сфера на Блох
Bloch sphere



ниво 0:



Забележка (пропуск в миналата лекция към темата "Логика и аритметика")

За дизюнктивно разбиение: $P \vee P^\perp = \hat{I}$ в алгебриския подход е $\Leftrightarrow \begin{cases} P + P^\perp = \hat{I} \\ P P^\perp = 0 \end{cases}$

И наистина, ако $P^\perp = \hat{I} - P$, то $P P^\perp = P(\hat{I} - P) = P - P^2 = 0$

Освен това и за характеристични функции $\chi_S: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ на подмножества $S \subseteq \Omega$

$$\chi_{\Omega \setminus S} = \hat{I} - \chi_S$$

Забележка Квантовите трансформации на квантовия бит ще видим, че отговарят точно на ортогоналните преобразувания на $\mathbb{R}^3$, при които единичната сфера се запазва. Това са ротациите около центъра и отраженията.

2. Хилбертови пространства и лин. оператори в тях

Един от главните резултати в тази лекция е:

Теорема Нека е дадена неприводима квантова система с алгебра на наблюдаемите $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

Товава всеки единичен вектор $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ (т.е., $\|\Psi\|^2 = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2 = 1$)

определя точно състояние

$$\rho_\Psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}: A \mapsto \rho_\Psi(A) := \langle \Psi | A \Psi \rangle := (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Обратно, за всяко точно състояние ρ съществува единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$, т.е.

$$\rho = \rho_\Psi. \text{ При това } \rho_\Psi = \rho_{\Psi'}, \Leftrightarrow \Psi' = e^{i\varphi} \Psi.$$

Векторът Ψ се нарича вектор на състоянието.

Така, една наблюдаема A при измерване в състояние с вектор Ψ има средна

стойност $\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$ - нарича се формула на Дирак (за средната стойност)

Векторът на състоянието е фиксиран от състоянието с точност до пропорционалност с комплексен множител по модул = 1.

а) Хилбертово пространство – определение (припомняне)

Това е комплексно линейно пространство $\mathcal{H}$, което е снабдено с функция $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \mapsto \langle \Phi | \Psi \rangle$, наречена скалярно произведение със свойствата

- $\langle \alpha \Phi + \beta \Psi | \alpha' \Phi' + \beta' \Psi' \rangle = \bar{\alpha} \alpha' \langle \Phi | \Phi' \rangle + \bar{\alpha} \beta' \langle \Phi | \Psi' \rangle + \bar{\beta} \alpha' \langle \Psi | \Phi' \rangle + \bar{\beta} \beta' \langle \Psi | \Psi' \rangle$
 - $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$
 - $\langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0$ и $\langle \Phi | \Phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0$.
- (за $\forall \Phi, \Psi, \Phi', \Psi' \in \mathcal{H}$ и $\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{C}$)

Означаваме: $\|\Phi\| := \sqrt{\langle \Phi | \Phi \rangle}$ – норма и ако $\|\Phi\| = 1$, то казваме че Φ е нормиран или още, единичен вектор

б) Ортонормирани бази си (припомняне)

Едно множество от вектори $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{H}$ се нарича ортонормирано, ако $\langle e_j | e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$. Доказва се, че всяко такова е линейно независимо.

Когато $\{e_1, \dots, e_n\}$ е и базис – наричаме го ортонормиран базис (о.н.б.)

Развитие на вектор $\Psi \in \mathcal{H}$ в ортонормиран базис: $\Psi = \psi_1 e_1 + \dots + \psi_n e_n$

– тогава $\psi_j = \langle e_j | \Psi \rangle$ ($j = 1, \dots, n$). $\Rightarrow \Psi = \langle e_1 | \Psi \rangle e_1 + \dots + \langle e_n | \Psi \rangle e_n$

Скалярно произведение в ортонормиран базис:

ако $\Phi = \phi_1 e_1 + \dots + \phi_n e_n$ и $\Psi = \psi_1 e_1 + \dots + \psi_n e_n$, тогава:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \bar{\phi}_1 \psi_1 + \dots + \bar{\phi}_n \psi_n = (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Това възпроизвежда стандартния модел на n -мерно хилбертово пространство: $\mathbb{C}^n$.

в) Оператори и матрици (ново)

Ако $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ - линейен оператор, $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{H}$ - о.н.б., то

$\hat{A}e_j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_j$ ($j=1, \dots, n$) дава $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицата на $\hat{A}$.

Ако $\Psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ в о.н.б., то $\hat{A}\Psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$

Ермитово спрягнат оператор $\hat{A}^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ - определя се от равенството

$$\langle \hat{A}^* \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \hat{A} \Psi \rangle$$

Тогава в о.н.б., ако оператора $\hat{A}$ има матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

то ермитово спрягнатия оператор $\hat{A}^*$ има матрица $A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$

2) Бра-кет означения (ново)

<bra|ket>

Отсутстват: • $\mathcal{H} := \mathbb{C}^n$ - стандартното n -мерно хилбертово пространство

на вектор-стълбове $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \Psi$

• Матриците $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ще действат върху вектор-стълбовете $\Psi \in \mathbb{C}^n$, като линейни оператори посредством матричното умножение $A\Psi$

• Скаларното произведение в $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \Phi^* \Psi \equiv (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \underbrace{\Phi} | \underbrace{| \Psi \rangle} \rangle$$

бра, кет - вектор

• За вектор-стълб $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ще пишем $\Phi \equiv | \Phi \rangle$ и ще го нарисуваме кет-вектор.

Тогава $\langle \Phi | := \Phi^* := (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n)$ - ермитово спрягнатия вектор-ред: бра-вектор.

Така, поставяйки на скобите " $| \rangle$ " и " $\langle |$ " на един вектор-стълб $\Phi \in \mathbb{C}^n$ ние разглеждаме, като едноместни операции върху Φ , първата от които, $\Phi \mapsto |\Phi\rangle$ е просто идентитета, $|\Phi\rangle \equiv \Phi$, докато втората, $\Phi \mapsto \langle\Phi|$ е ермитовото спрягане, $\langle\Phi| := \Phi^*$, което прави вектор-стълбовете в редове и е анти-линейно.

Примери: • $\langle\Phi||\Psi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle$ - ред $\times$ стълб = число (1×1 -матрица)

$\downarrow$ ← правило: винаги, когато се допрат две вертикални черти те се сливат в една

$$\bullet \quad |\Psi\rangle\langle\Phi| \equiv \Psi\Phi^* = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\bar{\phi}_1 & \dots & \psi_1\bar{\phi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\bar{\phi}_1 & \dots & \psi_n\bar{\phi}_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{стълб} \times \text{ред} \\ = n \times n \text{-матрица} \end{array}$$

• Нека $\Phi, \Psi, \Phi', \Psi' \in \mathbb{C}^n$ - вектор-стълбове. $(|\Psi\rangle\langle\Phi|) \cdot (|\Psi'\rangle\langle\Phi'|) = ?$

$$\begin{aligned} (|\Psi\rangle\langle\Phi|) \cdot (|\Psi'\rangle\langle\Phi'|) &= |\Psi\rangle(\underbrace{\langle\Phi||\Psi'\rangle}_{\text{число}})\langle\Phi'| = |\Psi\rangle(\underbrace{\langle\Phi|\Psi'\rangle}_{\text{число}})\langle\Phi'| \\ &= (\langle\Phi|\Psi'\rangle) |\Psi\rangle\langle\Phi'| \end{aligned}$$

В частност: ако $\|\Phi\| := \sqrt{\langle\Phi|\Phi\rangle} = 1$ - единичен вектор, то

$$(|\Phi\rangle\langle\Phi|)^2 = |\Phi\rangle\langle\Phi| \quad \text{това е идемпотент в } \text{Mat}_n(\mathbb{C}).$$

Освен това, $(|\Phi\rangle\langle\Phi|)^* = (\Phi\Phi^*)^* = \Phi^{**}\Phi^* = \Phi\Phi^* \equiv |\Phi\rangle\langle\Phi|$ - самоспрегнатост.

И така, $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ е самоспрегнат идемпотент в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, т.е., това е събитие в една неприродима (число) квантова система от ниво n .

• Да запишем формулата за развитие на вектор в о.к.б.

$$\Psi = \langle e_1|\Psi\rangle e_1 + \dots + \langle e_n|\Psi\rangle e_n$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} |\Psi\rangle = (\langle e_1|\Psi\rangle)|e_1\rangle + \dots + (\langle e_n|\Psi\rangle)|e_n\rangle \\ \hat{?} \cdot |\Psi\rangle = (|e_1\rangle\langle e_1|)|\Psi\rangle + \dots + (|e_n\rangle\langle e_n|)|\Psi\rangle \\ = (|e_1\rangle\langle e_1| + \dots + |e_n\rangle\langle e_n|)|\Psi\rangle \end{array} \right) & \quad \text{за } \forall \Psi \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Извод: $\hat{I} = |e_1\rangle\langle e_1| + \dots + |e_n\rangle\langle e_n|$

Това се проверява непосредствено за стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^n$: $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← j-та позиция

наистина: $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (10\dots 0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (01\dots 0)} + \dots$

Изходната формула обаче е в сила за $\forall$ о.н.б. $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$. За това:

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_n\rangle\langle f_n|$$

Освен това: то е разбиване на $\hat{I}$,

понеже: знаем вече, че $|f_j\rangle\langle f_j|$ са събития (понеже $\|f_j\| = 1$)

и също: $(|f_j\rangle\langle f_j|)(|f_k\rangle\langle f_k|) = \underbrace{\langle f_j|f_k\rangle}_{0} (|f_j\rangle\langle f_k|) = 0$ за $j \neq k$.

Ние ще видим, че това е максимално разбиване на $\hat{I}$ и още, че всяко максимално разбиване на $\hat{I}$ може да се представи така за някакъв о.н.б.

С това ще установим вече обявения резултат, че $\forall$ максимален експеримент в една чисто квантова система от ниво n е свързан с о.н.б. в $\mathbb{C}^n$.

- Забележете: За действието на матрица $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ върху вектор-столб $\Psi \in \mathbb{C}^n$ имаме следните алтернативи в бра-кет означенията: $A\Psi = |A\Psi\rangle = A|\Psi\rangle$

Така още: $\langle \Phi | A \Psi \rangle \equiv \langle \Phi | A | \Psi \rangle$ за вектор-столбове $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$

- нарича се общ матричен елемент на A , понеже за стандартния базис

$$a_{jk} = \langle e_j | A | e_k \rangle \equiv (0 \dots 1 \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

← j-та позиция

g) **Ортогонални проектори** = **самоспрегнати** **идемпотенти**
= **сбитиля**

Теорема за ортогонално разбиване (припомняне)

Нека $V \subset \mathbb{C}^n (= \mathcal{H})$ е линейно подпространство на n -мерно хилбертово пространство.

Нека $V^\perp := \{ \Phi \in \mathbb{C}^n \mid \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle = 0}_{\text{за } \forall \Psi \in V} \}$ - ортогоналното допълнение на V .

$$\Phi \perp \Psi$$

Тогава $V \cap V^\perp = \{0\}$ и

$\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$, което е $\Leftrightarrow$ за $\forall \Theta \in \mathbb{C}^n \exists! \Psi \in V$ и $\exists! \Phi \in V^\perp$ т.е. $\Theta = \Psi + \Phi$.

Определение $P_V \Theta := \Psi$ - това определя линейен оператор $P_V : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ и
 $\Rightarrow$ и матрица $P_V \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Понеже за $\Psi \in V : \Psi = \Psi + 0$,

то от единствеността $\Rightarrow P_V(P_V \Theta) = P_V \Psi = \Psi = P_V \Theta$, т.е. $P_V^2 = P_V$

- това е **идемпотент** в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Като линейен оператор в геометрията, P_V се

нарича още **проектор**. Освен това, P_V е ортогонален проектор, понеже

$P_V \Phi = 0$ за $\forall \Phi \in V^\perp$ (и това следва от единствеността).

Твърдение P_V е още и самоспрегнат и следователно е **сбитие**. Всяко сбитие $Q \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ е от вида P_V за единствено линейно подпространство $V \subseteq \mathbb{C}^n$. Всъщност, $V = Q(\mathbb{C}^n)$

Доказателство Нека $\Theta, \Theta' \in \mathbb{C}^n$. Защо $\langle P_V \Theta | \Theta' \rangle = \langle \Theta | P_V \Theta' \rangle$?

Нека $\Theta = \Psi + \Phi$ и $\Theta' = \Psi' + \Phi'$ за $\Psi, \Psi' \in V$ и $\Phi, \Phi' \in V^\perp$. Тогава

$$\langle P_V \Theta | \Theta' \rangle = \langle \Psi | \Psi' + \Phi' \rangle = \langle \Psi | \Psi' \rangle = \langle \Psi + \Phi | \Psi' \rangle = \langle \Theta | P_V \Theta' \rangle.$$

Защо $Q = P_V$ за $V = Q(\mathbb{C}^n)$? Нека $\Theta \in \mathbb{C}^n$ и $\Theta = \Psi + \Phi$ за $\Psi \in V$ и $\Phi \in V^\perp$.

Тогава $\Theta = Q\Theta + (\hat{I} - Q)\Theta$, но $Q\Theta \in V$ и $(\hat{I} - Q)\Theta \in V^\perp$ понеже

$$\langle Q\Theta | (\hat{I} - Q)\Theta \rangle = \langle \Theta | Q(\hat{I} - Q)\Theta \rangle = 0. \Rightarrow Q\Theta = \Psi = P_V \Theta (\forall \Theta). \square$$

Следствия. (i) $P_{V^\perp} = \hat{I} - P_V$.

$$(ii) V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow P_{V_1} P_{V_2} = P_{V_1} \Leftrightarrow P_{V_2} P_{V_1} = P_{V_1}$$

е) О.н.б. в подпространства и разбиване на събития

Нека $V \subseteq \mathbb{C}^n$ е линейно подпространство. Нека $f_1, \dots, f_m \in V$ е о.н.б. .
 Нека го продължим, като о.н.б. на $\mathbb{C}^n$: $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ (например, чрез процедурата на Грам и Шмидт). Твърдим, че:

$$P_V = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_m\rangle\langle f_m|$$

-наистина, това е достатъчно да се провери върху базисните вектори f_j за $j=1, \dots, n$, което става непосредствено.

ж) Спектрална теорема за ермитови матрици

Напомняме: ермитова матрица = самоспрезната матрица
 = самоспрезнат елемент на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$

-за тях важи спектралната теорема от миналата лекция, но сега ще я свържем с "по-традиционната" ѝ форма.

Теорема Нека $A = A^* \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ (ермитова матрица), тогава $\exists$ о.н.б. на $\mathbb{C}^n$, състоящ се от собствени вектори за A с реални собствени стойности. Тест, $\exists$ о.н.б. $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ т.е. $A f_j = \lambda_j f_j$.

Връзка с алгебрината спектрална теорема: В сила е равенството:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_n |f_n\rangle\langle f_n|$$

(проверява се отново с непосредствена проверка върху базисните вектори $f_1, \dots, f_n$).

Тогава, ако подредим: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ и въведем:

$$\alpha_1 := \lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} < \alpha_2 := \lambda_{k_1+1} = \dots = \lambda_{k_1+k_2}, \dots, \text{ то ще имаме:}$$

$$A = \underbrace{\alpha_1 (|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_{k_1}\rangle\langle f_{k_1}|)}_{:= Q_1} + \underbrace{\alpha_2 (|f_{k_1+1}\rangle\langle f_{k_1+1}| + \dots + |f_{k_1+k_2}\rangle\langle f_{k_1+k_2}|)}_{:= Q_2} + \dots$$

-това давава спектралното разложение на A от алгебрината спектрална теорема (без доказателство, но следва непосредствено от горните резултати).

Теорема (уточнение към миналата лекция) Нека $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, тогава следните условия са еквивалентни:

- (1) A е положителен елемент на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в A).
- (2) $A = B^2$, за ермитова матрица B .
- (3) A е ермитова матрица, тийто собствени числа са неотрицателни.
- (4) $\forall \Psi \in \mathbb{C}^n: \langle \Psi | A \Psi \rangle \geq 0$.

В кой да е от горните случаи ще казваме, че A е положително дефинитна матрица и ще пишем $A \geq 0$.

Обобщена спектрална теорема

Нека $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ са ермитови матрици, които комутират две по две:

$$AB = BA, \dots, AC = CA, \dots, BC = CB, \dots$$

Тогава $\exists$ о.н.б. $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$, който се състои от общи собствени вектори.

$$\text{Тоест, } Af_j = \lambda_j f_j$$

$$Bf_j = \mu_j f_j$$

$$\vdots$$

$$Cf_j = \nu_j f_j$$

Интерпретация: в квантовата теория числата $(\lambda_j, \mu_j, \dots, \nu_j)$ се наричат квантови числа на системата. Ако за различни j наборите $(\lambda_j, \mu_j, \dots, \nu_j)$ са различни тогава казваме, че имаме "пълен набор от квантови числа" – това съответства на информация от максимален експеримент.

Например: електрона в един атом има пълнен набор от 4 квантови числа (к.ч.):

(n = главно к.ч., l = орбитално к.ч., m = магнитно к.ч., s = спинно к.ч.)

Бра-кет означения с квантови числа:

$$|f_j\rangle =: |\lambda_j, \mu_j, \dots, \nu_j\rangle$$

$$\text{Така, } A|\lambda, \mu, \dots, \nu\rangle = \lambda|\lambda, \mu, \dots, \nu\rangle$$

$$B|\lambda, \mu, \dots, \nu\rangle = \mu|\lambda, \mu, \dots, \nu\rangle$$

$$\vdots$$

$$C|\lambda, \mu, \dots, \nu\rangle = \nu|\lambda, \mu, \dots, \nu\rangle$$

↑ *Вотче вече не стои вектор, а информация за базисен вектор от конкретен о.н.б.*

Например, за един n -битов квантов процесор, ще имаме един избран о.н.б., наречен "изчислителен базис" и този базис ще означаваме с:

$$|a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\rangle, \text{ където } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$$

3) Неравенствата на Коши-Шварц и приложението им

Неравенството на Cauchy-Schwartz за скалярното произведение $\langle \Phi | \Psi \rangle$ в едно хилбертово пространство $\mathcal{H} (\cdot = \mathbb{C}^n) \ni \Phi, \Psi$ гласи че

$$|\langle \Phi | \Psi \rangle| \leq \|\Phi\| \|\Psi\|, \text{ като равенство се достига } \Leftrightarrow \Phi \text{ и } \Psi \text{ са колинеарни}$$

или още: $|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 \leq \langle \Phi | \Phi \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle$

Всъщност, неравенството на Коши-Шварц може да се формулира за всяка т.нар. ермитово-билинейна, форма в комплексно линейно пространство. В частност, такава ситуация възниква и за алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$ в най-общия случай на квантови системи и произволно състояние ρ . В сила е: за $\forall A, B \in \mathcal{A}$:

$$|\rho(A^* B)| \leq \rho(A^* A) \rho(B^* B)$$

Едно от най-първите приложения е, ако вземем $A = Q$ - събитие ($Q^* = Q = Q^2$)

$$\text{и } B = \hat{1}: \quad \underbrace{|\rho(Q^* \hat{1})|^2}_Q \leq \underbrace{\rho(Q^* Q)}_{Q^2 = Q} \underbrace{\rho(\hat{1}^* \hat{1})}_{\hat{1}}$$

$$\Rightarrow |\rho(Q)|^2 \leq \rho(Q), \text{ в частност: } \rho(Q) \geq 0. \Rightarrow |\rho(Q)| = \rho(Q).$$

$$\Rightarrow 0 \leq \rho(Q)^2 \leq \rho(Q). \text{ И така:}$$

Следствие За всяко събитие Q и състояние ρ в най-обща квантова система на алгебричния подход е в сила: $\rho(Q) \in [0, 1]$.

Следователно, $\rho(Q)$ може да се интерпретира, като вероятност.

Следствие За всеки единичен вектор $\Psi \in \mathcal{H} (\cdot = \mathbb{C}^n)$ линейния функционал $\rho_\Psi: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}: A \mapsto \rho_\Psi(A) := \langle \Psi | A | \Psi \rangle (\equiv \langle \Psi | A \Psi \rangle)$ е състояние над $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, т.е., $\rho_\Psi(\hat{1}) = 1$ и $\rho_\Psi(A^* A) \geq 0$ за $\forall A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Доказателство $\rho_\Psi(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \cdot | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle = \|\Psi\|^2 = 1$

$$\rho_\Psi(A^* A) = \langle \Psi | A^* A \Psi \rangle = \langle A \Psi | A \Psi \rangle (= \|A \Psi\|^2) \geq 0. \square$$

Забележка: За събитие Q : $\rho_\Psi(Q) = \|Q \Psi\|^2$.

Забележка: В следващата точка ще покажем, че чистите състояния на една чиста квантова система от ниво n са точно тези, които са от вида ρ_Ψ

и) Окончателно установяване на логическата наредба на събитията
валгебрисния подход, както и нейното съвпадане с тази от квантово-
 логическия подход

Ако дук установихме следните съвпадения или еквивалентности на обектите:

$$\text{събитие } Q \text{ в } \text{Mat}_n(\mathbb{C}) = \text{самоспрегнат идемпотент } Q \text{ в } \text{Mat}_n(\mathbb{C})$$

$$= \text{ортогонален проектор в хилбертовото пространство } \mathbb{C}^n$$

$$\Leftrightarrow \text{линейно подпространство } V \subseteq \mathbb{C}^n, \text{ като } Q = P_V.$$

Теорема Нека $Q_1 = P_{V_1}$ и $Q_2 = P_{V_2}$ са събития, тогава следните условия са еквивалентни

$$(1) \text{ За всяко състояние } \rho : \text{Prob}_\rho(Q_1) = 1 \Rightarrow \text{Prob}_\rho(Q_2) = 1.$$

$$(2) \text{ За всяко състояние } \rho : \text{Prob}_\rho(Q_1) \leq \text{Prob}_\rho(Q_2).$$

$$(3_1) Q_1 Q_2 = Q_1. \quad (3_2) Q_2 Q_1 = Q_1.$$

$$(4) Q_2 - Q_1 \geq 0 \quad (\text{т.е., } Q_2 - Q_1 \text{ е положително дефинитна матрица}).$$

$$(5) V_1 \subseteq V_2$$

Да припомним, че за състояние ρ и събитие $Q : \text{Prob}_\rho(Q) = \rho(Q)$.

Доказателство $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3_1) \Leftrightarrow (3_2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (1)$ - очевидно. $(1) \Rightarrow (5)$ За $\rho = \rho_\Psi$ и $j = 1, 2$ имаме:

$$1 = \text{Prob}_{\rho_\Psi}(P_{V_j}) = \rho_\Psi(P_{V_j}) = \|P_{V_j} \Psi\|^2 \Leftrightarrow \Psi \in V_j$$

$(5) \Rightarrow (3_1) \Leftrightarrow (3_2)$ - непосредствено: ако $V_1 \subseteq V_2$, то $P_{V_1} P_{V_2} = P_{V_1} = P_{V_2} P_{V_1}$.

$(3) \Rightarrow (4)$ - защото тогава $Q_2 - Q_1 = (Q_2 - Q_1)^2$ - квадрат на наблюдаема.

$(4) \Rightarrow (2)$ - защото, ако $\begin{cases} \text{наистина: } Q_2^2 + Q_1^2 - Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1 = Q_2 - Q_1. \end{cases}$

$Q_2 - Q_1 \geq 0$ и ρ е положителен линейен функционал, то $\rho(Q_2 - Q_1) \geq 0$. $\square$

Следствие Елементарните събития на една чисто квантова система с алгебра на наблюдаемите $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ са в 1-1 съответствие с едномерните подпространства на хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$. Това са точно ортогоналните проектори от вида $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ и те проектират върху $\mathbb{C} \cdot \Psi \subseteq \mathbb{C}^n$. В частност, всеки максимален експеримент отговаря на о.н.б. $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ и разбиването на $\hat{I}$:

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_n\rangle\langle f_n|$$

Доказателството следва непосредствено от досегашните резултати.

3. Състояния: наблюдаеми (матрици) на плътността и вектори на състояния

а) Общ вид на състоянието чрез следата

За простота, ще започнем със случая на квантов бит с алгебра на наблюдаемите $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Общ вид на линейен функционал: $\rho: \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \rho(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = \text{линейна функция на 4 комплексни променливи}$$

$$= \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{21} a_{12} + \rho_{12} a_{21} + \rho_{22} a_{22}}_{\text{trace}} =: \text{Tr} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

общия вид на ρ се определя от 4 комплексни числа,

които за удобство записваме

като 2×2 квадратна матрица:

$$\hat{\rho} := \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

← *trace*
следа на матрица

← *нарису се матрица на плътността на състоянието ρ .*

б) Следа на матрица - определение и свойства

Ввежда се само за квадратни и зависи от размера: $\text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := a_{11} + \dots + a_{nn}$

← *без доказателства*

Свойства: (циклическост) $\text{Tr}(AB \dots C) = \text{Tr}(B \dots CA)$

-това е вярно и за правоъгълни матрици $A, B, \dots, C$ стига произведението $AB \dots C$ да е квадратна матрица и следите от двете страни да се отчитат за квадратни матрици от различни размери.

(нормировка_i) $\text{Tr}(\hat{1}) = n$ - ето как се проявява ролята на размера!

(нормировка_e) $\text{Tr}(\text{елементарно събитие}) = 1$.

Пример: $\text{Tr} \underbrace{(A}_{n \times n} \underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{n \times 1}) = \text{Tr} \underbrace{(A\Psi\Psi^*)}_{n \times n} = \text{Tr} \underbrace{(\Psi^* A \Psi)}_{1 \times n} \underbrace{\equiv \text{Tr}(\langle\Psi| A |\Psi\rangle)}_{1 \times 1 \text{ (число)}}$

но следа на число = самото число. $\Rightarrow \text{Tr}(A |\Psi\rangle\langle\Psi|) = \langle\Psi| A |\Psi\rangle$.

Теорема Ако A е матрица със собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\text{Tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Доказателство. Понякога $\exists C$ -обратима: $CAC^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{\text{Tr}} \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. $\square$

Теорема Нека $\mathcal{A}$ е алгебрата на наблюдаеми на произволна (крайна) квантова система. Тогава

$\exists!$ линейен функционал $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, който има свойствата

(циклическост) $\tau(AB) = \tau(BA)$ за $\forall A, B \in \mathcal{A}$.

(нормировка) $\tau(\text{елементарно събитие}) = 1$.

Интерпретация на следата: това е квантова сума на стойностите на наблюдаема,
а за събитие - квантова мощност (ниво на събитията).

в) Характеризация на матриците на плътността

Теорема. Всеки линеен функционал $\rho: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ може да се представи във вида $\rho(A) = \text{Tr} \hat{\rho} A$ за единствена матрица $\hat{\rho} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. При това:

(1) ρ е нормиран (т.е., $\rho(1) = 1$) $\Leftrightarrow \text{Tr} \hat{\rho} = 1$.

($\hat{\rho}$ е положително дефинитна)

(2) ρ е положителен (т.е., $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$) $\Leftrightarrow \hat{\rho} \geq 0$

Доказателство: Съществуването и единствеността на $\hat{\rho}$ се показва, както в а) за $n=2$.

(1) - непосредствено. (2) $0 \leq \rho(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \text{Tr}(\hat{\rho} |\Psi\rangle\langle\Psi|) = \langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \Leftrightarrow \hat{\rho} \geq 0$. $\square$

В частност, матрицата на плътността $\hat{\rho}$ е ермитова (наблюдаема на плътността)

Формулата за средна стойност на наблюдаема A в състояние с матрица на плътността $\hat{\rho}$ придобива вида: $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{\rho} A) =$ "квантова сума от квантовото вероятностно разпределение по наблюдаемата"

В класическия случай: $\langle A \rangle_\rho = \rho_1 a_1 + \dots + \rho_n a_n$, където

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

$$A \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$\left(\mathbb{R} \ni a_1, \dots, a_n \right)$$

наблюдаемите
е функция върху Ω

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

$$\rho \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$\left([0,1] \ni \rho_1, \dots, \rho_n \right)$$

вероятностното разпределение
е функция върху Ω

2) Поведението на матриците на плътността при смесване

Нека $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ е смес на състояния с тегла $q_1, q_2 \in [0,1]$ ($q_1 + q_2 = 1$).

Ако $\hat{\rho}$, $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ са съответните матрици на плътността, то еквивалентното условие е:

$$\hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2.$$

Наистина: за $\forall A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$: $\rho(A) = q_1 \rho_1(A) + q_2 \rho_2(A) \Leftrightarrow \text{Tr}(\hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2) A = 0$.

а последното $\Leftrightarrow \hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$.

г) Чисти състояния и вектори на състоянията

Теорема. Едно състояние ρ над $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ е чисто

$\Leftrightarrow \rho$ е от вида ρ_Ψ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$.

В този случай матрицата на плътността е $\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ (което е елементарно събитие).

Схема на доказателството. 1) Запишете спектралното разлагане $\hat{\rho}$ на плътността $\hat{\rho}$, като $\hat{\rho} = \lambda_1 \hat{\rho}_{f_1} + \dots + \lambda_n \hat{\rho}_{f_n}$, където $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ е о.н.б., $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$. Следователно, $\forall$ състояние ρ може да се представи като смес на състояния от вида ρ_{f_i} . Също следва, че ако ρ не е чисто, то $\exists$ не тривиална смес $\rho = q \rho_{\Phi} + (1-q) \rho'$ за единичен вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n$. Тогава, ако такова състояние $\rho = \rho_{\Psi}$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$, то

$$\begin{aligned} 1 &= \rho_{\Psi}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = q \rho_{\Phi}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) + (1-q) \rho'(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \dots = \\ &= q \underbrace{|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2}_{\leq 1} + (1-q) \underbrace{\rho'(|\Psi\rangle\langle\Psi|)}_{\leq 1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\langle\Phi|\Psi\rangle| = 1$, но Φ и Ψ са единични и $\Rightarrow$ трябва да са колинеарни, но тогава или $\rho_{\Phi} = \rho_{\Psi}$ - противоречие с не тривиалността на смесотата. $\Rightarrow \rho_{\Psi}$ е чисто и такива са всички чисти състояния. $\square$

И така, ρ е чисто състояние $\Leftrightarrow$ матрицата на плътността му е $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ - нарича се вектор на състоянието. Тогава $\langle A \rangle_{\rho} = \text{Tr } \hat{\rho} A = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$.

Също така $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Phi = e^{i\varphi} \Psi$ (упражнение)

Тобого, векторът на състоянието е определен от състоянието с точност до пропорционалност.

е) 1-1 съответствие елементарни събития - чисти състояния и вероятност за преход

Съгласно резултатите до тук:

Q е елементарно събитие $\Leftrightarrow Q = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$

ρ е чисто състояние $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$

Получаваме 1-1 съответствие: $Q = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \hat{\rho}$.

Нека $Q = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho$ и $P = |\Phi\rangle\langle\Phi| = \hat{\eta}$ - съответни.

Тогава $\text{Prob}_{\rho} P = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2 = \text{Prob}_{\eta} Q$

$:=$ вероятност за преход $Q \leftrightarrow P$ или $\rho \leftrightarrow \eta$.

Забележете: Q - елементарно събитие
и ρ - чисто състояние са
съответни $\Leftrightarrow \text{Prob}_{\rho} Q = 1$

Така, за $\forall$ елементарно събитие $Q \exists!$ чисто състояние ρ ,
в което Q настъпва с вероятност 1.

Също, за $\forall$ чисто състояние $\rho \exists!$ елементарно събитие Q ,
така че Q настъпва в ρ с вероятност 1.

✱) Състоянията на квантовия бит

Обща наблюдаема $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ има вида $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$

за $x, y, z, r \in \mathbb{R}$. Следва: $\text{Tr } A = r$. Собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2 = ?$

$$0 = \det(A - \lambda \hat{1}) = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} r+z-2\lambda & x-iy \\ x+iy & r-z-2\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{4} ((r-2\lambda)^2 - z^2 - x^2 - y^2) \quad \text{характеристично уравнение}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \in \mathbb{R}$$

Условието A да е матрица на плътността: $\text{Tr } A = r = 1$ и $A \geq 0$, което
на свой ред е $\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

— условие за единично кълбо. Това е затворено изпъкнало множество, границата
на което е сферата на Блох върху която са разположени в 1-1 съответствие чистите
състояния и елементарните събития

Внимание: единичните вектори $\Psi = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ се

определят от 4 числа $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, т.е.:

$$1 = \|\Psi\|^2 = |a+ib|^2 + |c+id|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

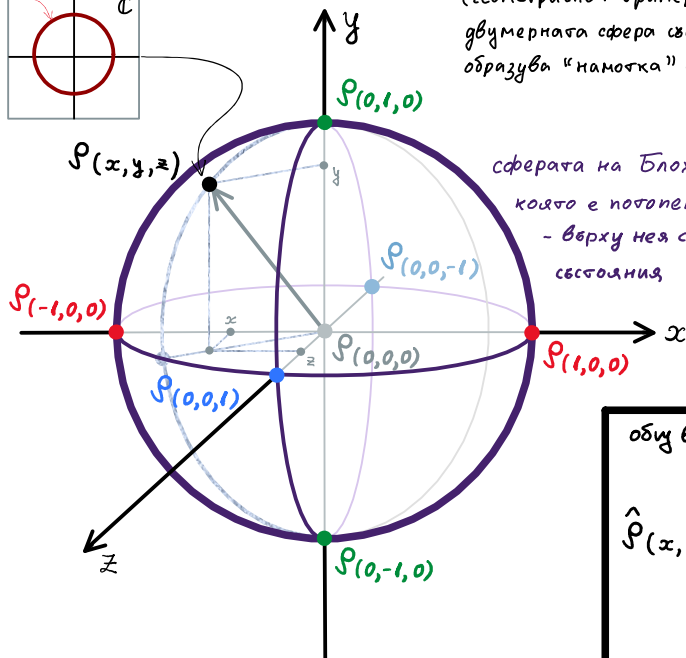
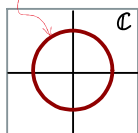
— уравнение на единичната 3-мерна сфера S^3 в $\mathbb{R}^4$.

В същото време чистите състояния заемат 2-мерната
единична сфера S^2 в $\mathbb{R}^3$. Защо?

Обща картина на състоянията на квантовия бит

Над всяка точка на сферата на Блох "напречно" в $\mathbb{R}^4$ се разполага единична окръжност $S^1 = \{e^{i\varphi}\} \varphi \in \mathbb{R}$ - така се намотава S^3 върху S^2 - нарича се разслоение на Хоф

(геометрично: сгънатата сфера се разполага над двумерната сфера със слоеве - окръжности, като образува "намотка" около двумерната сфера)



сферата на Блох,
която е потопена в $\mathbb{R}^3$
- върху нея са гистите
състояния



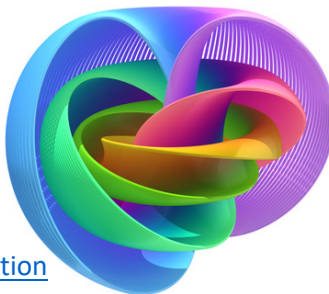
общ вид на матрицата на
плътността на състояние

$$\hat{\rho}(x,y,z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

$$\text{за } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

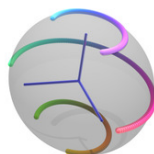
$$\text{исто състояние} \Leftrightarrow =$$

$$S^1 \xrightarrow{\text{влагане на слой}} S^3 \xrightarrow{\text{проекция}} S^2$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Hopf_fibration

The Hopf fibration can be visualized using a stereographic projection of S^3 to $\mathbb{R}^3$ and then compressing $\mathbb{R}^3$ to a ball. This image shows points on S^2 and their corresponding fibers with the same color.



4. Суперпозиция на вектори на състояния $\neq$ смес на състояния

Вече знаем, че чистите състояния на една неприводима квантова система от ниво n се определят от единични вектори $\Psi \in \mathbb{C}^n$, т.е. $\in$ на n -мерно хилбертово пространство $\mathcal{H} (= \mathbb{C}^n)$. По тази причина и хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$, което тук възниква се нарича и **хилбертово пространство на състоянията**. Важни уточнения тук обаче са: (1) не всички вектори на хилбертовото пространство на състоянията са вектори на състояние, а само единичните вектори; (2) само чистите състояния имат вектори на състояние и всяко такова състояние има безкрайно много вектори на състояние: два единични вектора $\Psi, \Psi' \in \mathbb{C}^n$ определят едно и също състояние $\Leftrightarrow \Psi' = e^{i\varphi} \Psi$, за някакво $\varphi \in \mathbb{R}$. Наистина, средната стойност на наблюдаема $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ в състояние с вектор Ψ се дава от формулата на Дирак:

$$\langle A \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \langle \Psi' | A | \Psi' \rangle \quad \left(= \underbrace{\langle e^{i\varphi} \Psi |}_{\text{blue}} \underbrace{A}_{\text{red}} \underbrace{| e^{i\varphi} \Psi \rangle}_{\text{red}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{— не се променя} \\ \text{при } \Psi \mapsto \Psi' \end{array}$$

Суперпозиция на вектори на състояние := линейна комбинация

$$\Psi := \alpha' \Psi' + \alpha'' \Psi'', \text{ за } \Psi, \Psi', \Psi'' \in \mathbb{C}^n \text{ и } \alpha', \alpha'' \in \mathbb{C}.$$

Това дава отново чисто състояние, определено от новия вектор Ψ . То обаче не е операция върху състоянията, понеже зависи от избора на представителните вектори Ψ', Ψ'' .

Наистина: ако изберем други представители $\Psi' \mapsto e^{i\varphi'} \Psi', \Psi'' \mapsto e^{i\varphi''} \Psi''$, то

$$\alpha' e^{i\varphi'} \Psi' + \alpha'' e^{i\varphi''} \Psi'' \neq e^{i\varphi} (\alpha' \Psi' + \alpha'' \Psi''), \text{ ако } e^{i\varphi'} \neq e^{i\varphi''}$$

(т.е., $\varphi' \neq \varphi'' + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$)

От друга страна, суперпозицията $\neq$ смесване на състояния.

Ако векторите на състояния $\Psi', \Psi'' \in \mathbb{C}^n$ определят чисти състояния с матрици на плътността $|\Psi'\rangle\langle\Psi'|$ и $|\Psi''\rangle\langle\Psi''|$, съответно, то смесването с тегла q_1, q_2 (сега вече $q_1, q_2 \in [0, 1]$, $q_1 + q_2 = 1$) е операция върху самите състояния и нейния резултат в общия случай не е чисто състояние: ако $|\Psi'\rangle\langle\Psi'| \neq |\Psi''\rangle\langle\Psi''|$, $q_1 \neq 0 \neq q_2$,

$$\text{то } \nexists \Psi \in \mathbb{C}^n: |\Psi\rangle\langle\Psi| = q_1 |\Psi'\rangle\langle\Psi'| + q_2 |\Psi''\rangle\langle\Psi''|$$

5. Квантово "гасене" (интерференция) на вероятностите

Да разгледаме преход $\Psi \rightarrow \Phi$ между състояния на квантов бит. Това е, за изходно състояние с вектор Ψ ทดสอบ елементарното обединение $|\Phi\rangle\langle\Phi|$. Вероятността за положителна регистрация е $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2$. Точно самото скалярно произведение $\langle\Psi|\Phi\rangle =: a_{\Psi \rightarrow \Phi}$ се нарича **амплитуда (на вероятността) за прехода** (това е вече комплексно число, по модул ≤ 1). Така $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = |a_{\Psi \rightarrow \Phi}|^2$.

Тогава за $\forall$ о.н.б. $f_1, f_2 \in \mathbb{C}^2 (\ni \Psi, \Phi)$

$$\begin{aligned} a_{\Psi \rightarrow \Phi} &= \langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Psi|\hat{f}|\Phi\rangle = \langle\Psi|(|f_1\rangle\langle f_1| + |f_2\rangle\langle f_2|)|\Phi\rangle \\ &= \langle\Psi|f_1\rangle\langle f_1|\Phi\rangle + \langle\Psi|f_2\rangle\langle f_2|\Phi\rangle \\ &= a_{\Psi \rightarrow f_1} a_{f_1 \rightarrow \Phi} + a_{\Psi \rightarrow f_2} a_{f_2 \rightarrow \Phi} \end{aligned}$$

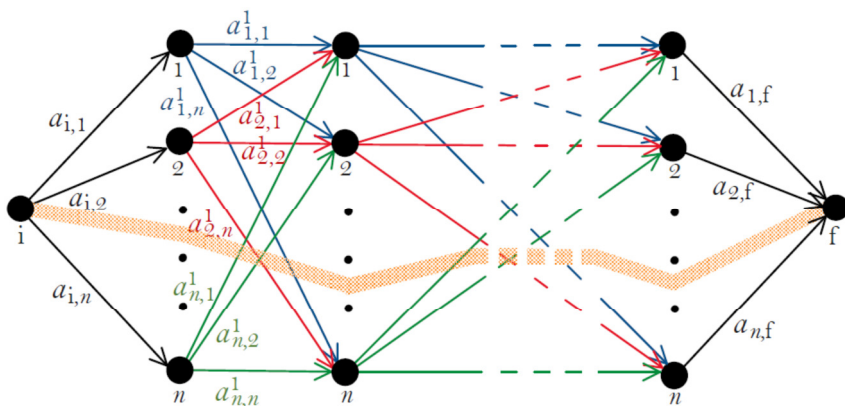
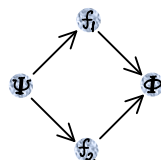
Извод: класическата формула за преход през две алтернативи

$$p_{\Psi \rightarrow \Phi} = p_{\Psi \rightarrow f_1} p_{f_1 \rightarrow \Phi} + p_{\Psi \rightarrow f_2} p_{f_2 \rightarrow \Phi}$$

се заменя от квантовата :

$$a_{\Psi \rightarrow \Phi} = a_{\Psi \rightarrow f_1} a_{f_1 \rightarrow \Phi} + a_{\Psi \rightarrow f_2} a_{f_2 \rightarrow \Phi}$$

като сега $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = |a_{\Psi \rightarrow \Phi}|^2$, $p_{\Psi \rightarrow f_j} = |a_{\Psi \rightarrow f_j}|^2$, $p_{f_j \rightarrow \Phi} = |a_{f_j \rightarrow \Phi}|^2$,
за $j = 1, 2$.



Преход между състояния $i \rightarrow f$ на няколко стъпки през алтернативни междинни състояния. В определени условия, наречени във физиката "класическа граница" амплитудите на повечето пътища се погасяват взаимно и остава един доминиращ път – оцветения с плътна оранжева линия – това е "класическата траектория" на системата.

6. Обобщения на алгебрения подход

Едно от най-слабо защитимите аксиоматични предположения е съществуването на некомутиативно, но асоциативно произведение, което поражда квадратите на наблюдаемите. През 1934, Jordan, von Neumann, Wigner предлагат по-общ подход, в който постулират

- Observables е крайно-мерна, реална, Йорданова алгебра с единица, която е положителна. Това означава, че в Observables има дистрибутивно и комутиативно произведение, $A \bullet B = B \bullet A$, такова, че притежава $\hat{1}$, степените $A, A^2 := A \bullet A, A^3 = A \bullet A^2, \dots$ изпълняват $A^n \bullet A^m = A^{n+m}$ и ако $A^2 + B^2 + \dots + C^2 = 0$, то $A = B = \dots = C = 0$.

В частност, за $\forall A \in \text{Observables}$, степените на A пораждат крайно-мерна, комутиативна асоциативна алгебра с $\hat{1}$, която е положителна и $\Rightarrow A$ притежава спектрално разлагане.

- States = извъншалото множество на всички линейни, нормирани и положителни функционали $\rho: \text{Observables} \rightarrow \mathbb{R}$, като $\rho(A)$ се интерпретира основно, като средна стойност на наблюдаема A в състояние ρ .

Това са структурно полаганите аксиоматични. Доизяснителни интерпретации

- Събитие := идемпотент ($Q = Q^2$).
- Съвместна измеримост = общ експеримент := взаимна асоциативност

Основен резултат е, че имаме отново класификационна структурна теорема на възникващите Йорданови алгебри на наблюдаемите. Те отново са преки произведения на "неприводими блокове", които са класифицирани напълно. Оказва се, че неприводимите Йорданови алгебри (от горния клас) са всички **без една** свързани с асоциативни $\ast$ -алгебри над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ и още $\mathbb{H}$ (кватернионите /quaternions). Остава една единствена напълно неасоциативна, наречена още изключителна, Йорданова алгебра. Тя има ниво 3 и размерност над $\mathbb{R}$ $27 = 3^3$ - известна е, като алгебра на Алберт /Albert и в нейната конструкция участва една нова неасоциативна числова система - октонионите /octonions $\mathcal{O}$.

В крайна сметка имаме следната обща картина на аксиоматичните подходи към квантовата теория:

