

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 7 / 21.11.2022, версия 0

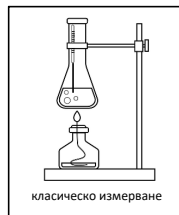
1. Основни принципи на квантовата теория :

статистика на общи системи (преговор)

Основни понятия и изрази (език) в квантовата теория

- наблюдаема, събитие – частен случай на наблюдаема;
- състояние;
- измерване на наблюдаема (измерване / тестване на събитие) в състояние и вероятност за това.

$\text{Prob}_\rho(Q) :=$ вероятност за настъпване (след измерване)
на събитие Q в състояние ρ



Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)**Основни понятия и изрази (език) в квантовата теория**

- **наблюдаема**, **събитие** – частен случай на наблюдаема;
- **състояние**;
- **измерване** на наблюдаема (измерване / тестване на събитие) в състояние и **вероятност** за това.

$\text{Prob}_\rho(Q) :=$ вероятност за настъпване (след измерване)
на събитие Q в състояние ρ



- Възможни стойности на наблюдаема $A =$ **спектр**, **Срес A** ;
спектра на събитие $e \subseteq \{0, 1\}$.
- Всяка наблюдаема A и число поражда събитие
" A приема стойност α след измерване " $\equiv$ " $A = \alpha$ "

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Резултата от всяко измерване е настъпване на някакво събитие Q , т.е., " $Q = 1$ ".

" $Q = 0$ " $\equiv$ " $Q^\perp = 1$ " ($Q^\perp$ е отрицанието на Q).

- Средна стойност на наблюдаема A при измерване в състояние ρ :

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho = \sum_{\alpha \in \text{Spec } A} \alpha \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha\}$$

Ако $A = Q$ е събитие, то $\rho(Q) \equiv \langle Q \rangle_\rho \equiv \text{Prob}_\rho(Q)$

- Смес на състояния ρ_1 и ρ_2 с тегла $q_1, q_2 \in [0, 1]$, $q_1 + q_2 = 1$, се определя от:

$\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$, което означава $\rho(A) = q_1 \rho_1(A) + q_2 \rho_2(A)$ за $\forall$ наблюдаема A

- Чисто състояние = такова, което не може да бъде не тривиална смес (т.е., q_1 или $q_2 = 0$)

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Експеримент** на системата $\equiv$ съвкупност от дизюнктивни събития, които разбиват $\hat{1}$ (единицата = твърдесовеното събитие = единствената наблюдаема):
 $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_m, Q_j \wedge Q_k = 0, Q_1, \dots, Q_m$ - елементарни събития на експеримента
- За някои наблюдаеми (и в частност, събития) се случва да могат да се измерят в общ експеримент: казваме, че те са **свместно измерими** (**свместни**).
- Всяка наблюдаема A отговаря на експеримент посредством **спектралното си разбиване**.
 $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_m Q_m, \alpha_j \neq \alpha_k, Q_j = \{A = \alpha_j\}, \text{Spec } A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{R}$
 $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_m,$
- Функция** f ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) от наблюдаема $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_m Q_m$ (спектралното разбиване на A) се определя от $f(A) = f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_m) Q_m$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- Съществува асоциативна ~~*~~-алгебра с $\hat{I}, \mathcal{A}$, така че A е наблюдаема $\Leftrightarrow A = A^*$
има дистрибутивно и асоциативно произведение
 $A^* = A, (AB)^* = B^* A^*$
 $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$
алгебра на наблюдаемите (самоспрежнатост)
- Q е събитие $\Leftrightarrow Q^* = Q = Q^2$
- ρ е състояние $\Leftrightarrow \rho$ е линеен, положителен и нормиран функционал върху $\mathcal{A}$
 $\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha \rho(A) + \beta \rho(B)$
 $\rho(A^* A) \geq 0$
 $\rho(\hat{I}) = 1$
 $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$
- Съвместно измерими наблюдаеми $A, B, \dots, C$ (в частност и събития)
 $\Leftrightarrow$ взаимно комутиращи: $AB = BA, \dots, AC = CA, \dots, BC = CB$.
- За съвместно измерими събития P, Q , логическите операции имат алгебричен израз:
 $P \wedge Q = PQ = QP, P \vee Q = P + Q - PQ, Q^\perp = \hat{I} - Q$
 В частност, $\hat{I} = Q_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} Q_m \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 + \dots + Q_m = \hat{I} \\ Q_j Q_k = 0 \text{ за } j \neq k \end{cases}$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- Математически резултат класифицира:

- прилаганите в квантовата информатика $\ast$ -алгебри са от вида $\mathcal{A} = \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{shaded } A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \text{shaded } A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \text{shaded } A_m \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1cm}}_{k_1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{k_2} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{k_m} \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} \text{блоково-диагонална матрица} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \quad \quad \quad =: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) \quad \left| \begin{array}{l} \text{за } A_j \in \text{Mat}_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1, \dots, m \end{array} \right. \\
 & \quad \quad \quad \text{за фиксирани избор } k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

• Математически резултат класифицира:

- прилаганите в квантовата информатика $\ast$ -алгебри са от вида $\mathcal{A} = \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$

- За всяко състояние ρ съществува единствена наблюдаема $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ ($\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$), така че

$$\rho(A) (\equiv \langle A \rangle_\rho) = \text{Tr} \hat{\rho} A.$$

следа на матрица $\text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + \dots + a_{nn}$

Наблюдаемата $\hat{\rho}$ се нарича **матрица на плътността** на състоянието. В сила е, че $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ е матрица на плътността на състояние $\Leftrightarrow \hat{\rho}$ е положително дефинитна матрица, $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$.

Ако $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ е смес, то $\hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$.

$$\hat{\rho} \geq 0 \text{ и } \text{Tr} \hat{\rho} = 1$$

Така, ρ е чисто $\Leftrightarrow \hat{\rho}$ е самоспрегната матрица от ранг = 1.

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

• Математически резултат класифицира:

- прилаганите в квантовата информатика $\ast$ -алгебри са от вида $\mathcal{A} = \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$

- За всяко състояние ρ съществува единствена наблюдаема $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ ($\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$), така че
 $\rho(A) (\equiv \langle A \rangle_\rho) = \text{Tr} \hat{\rho} A$.

- Пълният размер $n = k_1 + \dots + k_m$ се нарича **ниво на системата** и е = максималния брой алтернативи на експеримент. Например, един максимален експеримент се определя от следното

разбиване на $\hat{1}$, което е максимално: $\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

k_1	A_1	0	...	0
k_2	0	A_2	...	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k_m	0	0	...	A_m
	k_1	k_2		k_m

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая
 - **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единствения комутативен случай.

1	a_1	0	0	...	0	0
1	0	a_2	0	...	0	0
1	0	0	a_3	...	0	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	...	a_{n-1}	0
1	0	0	0	...	0	a_n
	1	1	1		1	1

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$\ast$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

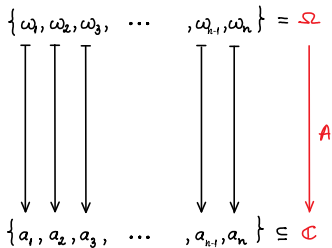
Наистина, законите за **собиране** и **умножаване на диагонални матрици** съответстват на законите за **собиране и умножаване на функции** (поелементно):

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) + \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \Leftrightarrow (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.



В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$\ast$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за **събиране и умножаване на функции (поелементно)**:

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) + \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \Leftrightarrow (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong \text{комутативната}$$

$\ast$ -алгебра от функции

$$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ върху } n\text{-елементно } \Omega$$

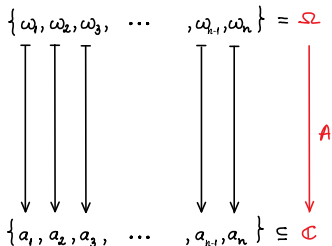
Наистина, законите за събиране и **умножаване на диагонални матрици** съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \times \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n) \iff (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.



В този случай алгебрата $\mathcal{A} =$

$\text{Mat}_{1, \dots, 1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната

$\ast$ -алгебра от функции

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ върху n -елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \times \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n) \iff (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая
- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единствения комутативен случай.

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega$$



$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$= \text{Spec } A = A(\Omega)$$

В този случай също:

$$A = A^* \iff \text{наблюдаема}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.

$$\{\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_k, \dots, \omega_n\} = \Omega$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \{0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0\} \subseteq \mathbb{R} \end{array} \quad \chi_S$$



събитие = характеристична функция
на подмножество $S \subseteq \Omega$

логически и алгебрични операции:

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{c} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\} = \Omega \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n\} \subseteq \mathbb{R} \\ \subseteq [0, 1] \end{array}$$

В този случай също:

$$\begin{array}{c} \Leftarrow \text{состояние } \rho \Leftrightarrow \text{вероятностно} \\ \text{разпределение} \\ = \text{матрицата на плът.} \\ \underbrace{\text{Tr } \rho}_{p_1 + \dots + p_n = 1} \end{array}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow A = A^* \end{array}$$

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

В този случай също:

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{\rho} \end{array}$$

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Формулата за средна стойност на наблюдаема:

$$\rho(A) = \langle A \rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr } \hat{\rho} A$$

$$(\text{Tr}(\text{diag}(p_1, \dots, p_n) \text{diag}(a_1, \dots, a_n)))$$

$$= p_1 a_1 + \dots + p_n a_n$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единственият комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow A = A^* \end{array}$$

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

В този случай също:

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{P} \end{array}$$

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Число състояния: $\hat{P} = \text{diag}(0, \dots, 1, \dots, 0)$

= елементарно събитие

= характеристична функция на синглетон $\{\omega_j\}$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрат на диагоналните матрици (блокове 1×1)
Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow A = A^* \\ \{a_1, a_2, a_3, & \dots & , a_{n-1}, a_n\} & \subseteq & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{\rho} \\ \{p_1, p_2, p_3, & \dots & , p_{n-1}, p_n\} & \subseteq & \mathbb{R} \end{array}$$

В този случай също:

Множеството от състояния на класическа система е симплекс с върхове - чистите състояния



Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- **класически системи**, $m = n$, $k_1 = \dots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единственият комутативен случай.

В този случай също:

Спектрално разлагане на наблюдаема:

$$A = \sum_{\alpha \in A(\Omega)} \alpha \cdot \chi_{A^{-1}(\alpha)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow A = A^* \end{array}$$

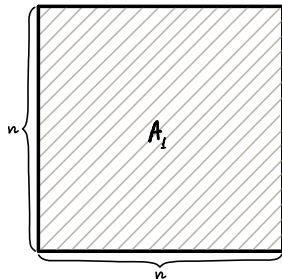
$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, & \dots & , \omega_{n-1}, \omega_n\} & = & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{\mathcal{P}} \end{array}$$

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая
 - **чисто квантови системи**, $m=1$, $k_1=\hbar \Rightarrow$ алгебрат на всички $n \times n$ матрици (1 блок)
Това е "напълно" некомутативен случай.



$$\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- **чисто квантови системи** $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

ρ е **чисто състояние** $\Leftrightarrow \hat{\rho} = \hat{\rho}^*$ и има ранг 1

$$\hat{\rho} \geq 0 \text{ и } \text{Tr} \hat{\rho} = 1$$

$$\Leftrightarrow \hat{\rho} = \Psi \Psi^* \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n)$$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ който е единичен вектор, $\|\Psi\|^2 = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2 = 1$

нареген **вектор на състоянието**.

Всеки единичен вектор определя, чисто състояние и два единични вектора $\Psi, \Psi' \in \mathbb{C}^n$ определят едно и също състояние $\Leftrightarrow \Psi' = e^{i\varphi} \Psi$ (те са пропорционални)

Средната стойност на наблюдаема A в състояние с вектор Ψ е:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\Psi} &= \text{Tr}(\Psi \Psi^* A) = \text{Tr}(\Psi^* A \Psi) = \Psi^* A \Psi = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \\ &= \langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle - \text{в бра-кет означения} \end{aligned}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- **чисто квантови системи** $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

$\langle \text{bra} | \text{ket} \rangle$: за вектор-стълб $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

ще пишем $\Phi \equiv |\Phi\rangle$ и ще го нарисуваме кет-вектор.

Тогава $\langle \Phi| := \Phi^* := (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n)$ - ермитово спрегнатия вектор-ред: бра-вектор.

Така: $\langle \Phi | \cdot | \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle$ $\xrightarrow{\text{скалярно произведение в } \mathbb{C}^n (\ni \Phi, \Psi)}$
ред x стълб = число
хилбертовото пространство на състоянията

Матриците от вида: $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ представят едновременно матрици на плътността на чисти състояния и елементарни събития. Това дава 1-1 съответствие между чистите състояния ρ и элем. събития Q :

$$\rho \text{ и } Q \text{ са съответстващи си} \iff \text{Prob}_\rho Q = 1 \iff \hat{\rho} = Q (= |\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- **чисте квантови системи** $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

Матриците от вида: $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ представят едновременно матрици на плътността на чисти състояния и елементарни събития. Това дава 1-1 съответствие между чистите състояния ρ и элем. събития Q :

$$\rho \text{ и } Q \text{ са съответстващи си} \iff \text{Prob}_\rho Q = 1 \iff \hat{\rho} = Q (= |\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

За два единични вектора $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$: вероятност за преход $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = |a_{\Psi \rightarrow \Phi}|^2$,

където $a_{\Psi \rightarrow \Phi} := \langle \Phi | \Psi \rangle$ - амплитуда на прехода. $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = p_{\Phi \rightarrow \Psi}$ е

вероятността за настъпване на елементарно събитие определено от Ψ в състояние с вектор Φ .

Спектралното разлагане на наблюдаема $A (= A^*)$ се определя от задачата за собствени вектори:

ако $A f_j = \lambda_j f_j$ за ортонормиран базис (о.н.б.) $f_1, \dots, f_n$ на $\mathbb{C}^n$,

$$\text{то: } A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_n |f_n\rangle\langle f_n|$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- **чисто квантови системи** $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

За два единични вектора $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$: вероятност за преход $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = |a_{\Psi \rightarrow \Phi}|^2$,

където $a_{\Psi \rightarrow \Phi} := \langle \Phi | \Psi \rangle$ - амплитуда на прехода. $p_{\Psi \rightarrow \Phi} = p_{\Phi \rightarrow \Psi}$ е

вероятността за настъпване на елементарно събитие определено от Ψ в състояние с вектор Φ .

Спектралното разлагане на наблюдаема $A (= A^*)$ се определя от задачата за собствени вектори:

ако $A f_j = \lambda_j f_j$ за ортонормиран базис (о.н.б.) $f_1, \dots, f_n$ на $\mathbb{C}^n$, $\alpha_1 := \lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} < \alpha_2 := \lambda_{k_1+1} = \dots$

то: $A = \lambda_1 |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + \lambda_n |f_n\rangle \langle f_n|$

$$= \alpha_1 \underbrace{(|f_1\rangle \langle f_1| + \dots + |f_{k_1}\rangle \langle f_{k_1}|)}_{:= Q_1} + \alpha_2 \underbrace{(|f_{k_1+1}\rangle \langle f_{k_1+1}| + \dots + |f_{k_1+k_2}\rangle \langle f_{k_1+k_2}|)}_{:= Q_2} + \dots$$

- Свдигие Q в **чисто квантова система** ($\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$)
 = самоспрегнат идемпотент $Q \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$
 = ортогонален проектор в хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$
 $\Leftrightarrow$ линейно подпространство $V \subseteq \mathbb{C}^n$, като $Q = P_V$ (ортогонален проектор върху V)
- Ако $Q_1 = P_{V_1}$ и $Q_2 = P_{V_2}$ са свдигия, тогава :
 $Q_1 \leq Q_2 \Leftrightarrow$ от $\text{Prob}_\rho(Q_1) = 1$ следва $\text{Prob}_\rho(Q_2) = 1$ ($\forall \rho$ -состояние)
 $\Leftrightarrow \text{Prob}_\rho(Q_1) \leq \text{Prob}_\rho(Q_2)$ ($\forall \rho$ -состояние)
 $\Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$
- Всеки максимален експеримент отговаря на о.н.б. $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ посредством разбиването на $\hat{I}$:

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_n\rangle\langle f_n|$$

- Картина на елементарните събития и състояния на квантов бит ($\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$)

общ вид на матрицата на плътността на състояние

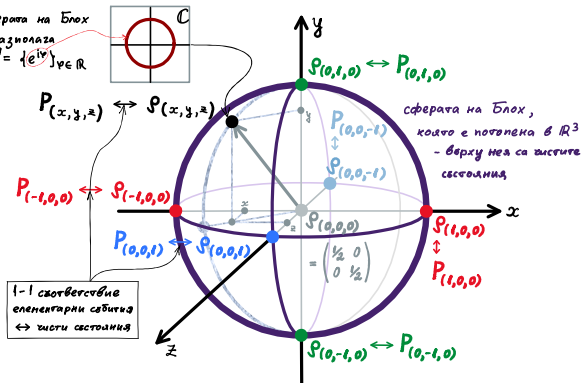
$$\hat{\rho}(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{за } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ \text{исто състояние} \leftrightarrow = \end{array}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи** (преговор)

- Картина на елементарните събития и състояния на квантов бит ($\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$)

Над всяка точка на сферата на Блох
"напречно" в $\mathbb{R}^4$ се разполага
единична окръжност $S^1 = \{e^{i\varphi}\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$

- така се намотава S^3 върху S^2
картата се разполюе на Хоф



Забележка Наредбата на наблюдаемите в класическите системи съвпада с поточковата

за $A, B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - класически наблюдаеми

$$A \leq B \iff A(\omega) \leq B(\omega) \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

Спрямо тази наредба класическите наблюдаеми образуват решетка (без 0 и 1 - защо?):

$$(A \wedge B)(\omega) = \min \{A(\omega), B(\omega)\}$$

$$(A \vee B)(\omega) = \max \{A(\omega), B(\omega)\}$$

Наблюдаемите на чисто квантовите системи не образуват решетки, макар че частично наредените подмножества на събитията са решетки (дори с 0 и 1).

Упражнение (контрапример за кубит)

а) Докажете, че множеството на наблюдаемите на кубит:

$$\text{Observables}(\text{Mat}_2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}^4$$

$$A = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \leftrightarrow (t, x, y, z)$$

б) При изоморфизма от "а)" имаме

$$- \det A = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$- \text{Tr } A = 2t$$

$$- A \geq 0 \Leftrightarrow \det A \geq 0 \text{ и } \text{Tr } A \geq 0$$

*в) Докажете, че $\text{Observables}(\text{Mat}_2(\mathbb{C}))$ не е решетка спрямо операторната частична наредба

$$A \leq B \Leftrightarrow B - A \geq 0 \text{ - положителна дефинитност}$$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи**

Допълнителни бележки към квантовия бит

Условието
 $(\forall a_{jk}, \psi_j \in \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \left(= \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \right) \iff \begin{cases} a_{11} = \psi_1 \bar{\psi}_1 \\ a_{12} = \psi_1 \bar{\psi}_2 \\ a_{21} = \psi_2 \bar{\psi}_1 \\ a_{22} = \psi_2 \bar{\psi}_2 \end{cases}$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 - \psi_2 \bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 = 0$$

Решенията за ψ_1, ψ_2 при дадени $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ не са единствени, а са взаимно пропорционални.

Пример 1: $\hat{\rho}_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} (\overline{e^{i\varphi}}, 0)$; $\hat{\rho}_{(0,0,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1)$;

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи**

Нека означим стандартния базис в $\mathbb{C}^2$. $e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: |0\rangle$, $e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: |1\rangle$ Тук стои информация за базисния вектор

Тогава $\hat{J}_{(0,0,1)} = |0\rangle\langle 0|$, $\hat{J}_{(0,0,-1)} = |1\rangle\langle 1|$. О.н.б. $|0\rangle$, $|1\rangle$ дава един макс. експеримент.

Пример 2: $\hat{J}_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\hat{J}_{(-1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Получаване други о.н.б.: $e'_0 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\rightarrow\rangle$, $e'_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\leftarrow\rangle$

$\hat{J}_{(1,0,0)} = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|$, $\hat{J}_{(-1,0,0)} = |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

Пример 3: $\hat{J}_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\hat{J}_{(0,-1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & +i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Получаване други о.н.б.: $e''_0 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\uparrow\rangle$, $e''_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\downarrow\rangle$

$\hat{J}_{(0,1,0)} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$, $\hat{J}_{(0,-1,0)} = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$

Основни принципи на квантовата теория: **статистика на общи системи**

Забележете в горните примери:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{S}_{(0,0,1)} + \hat{S}_{(0,0,-1)} = \hat{I} \\ \hat{S}_{(1,0,0)} + \hat{S}_{(-1,0,0)} = \hat{I} \\ \hat{S}_{(0,1,0)} + \hat{S}_{(0,-1,0)} = \hat{I} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{разбивания на } \hat{I} \text{ за три} \\ \text{различни и несъвместни} \\ \text{максимални експерименти} \end{array}$$

три двойки от
взаимно обратни
елементарни събития

При това:

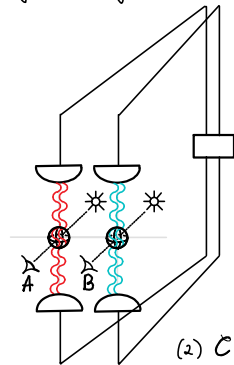
$$\begin{aligned} \hat{S}_{(1,0,0)} \hat{S}_{(0,1,0)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -i+1 \\ 1+i & -i+1 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_{(0,1,0)} \hat{S}_{(1,0,0)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ 1-i & i+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- некомутират
 $\Rightarrow$ не са съвместно измерими

Вероятност за преход: $P_{|\rightarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle} = |\langle \rightarrow | \cdot |\uparrow\rangle|^2 = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2$
 $= \frac{1}{2^2} |1+i|^2 = \frac{1}{4} (1+1) = \frac{1}{2}$

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $\ast$ -подалгебри с $\uparrow$ на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B} : i_1(A) i_2(B) = i_2(B) i_1(A)$$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

$$(2) \quad \mathcal{C} \text{ да се порожда алгебрично от } i_1(A) \text{ и } i_2(B) \text{ за } \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B}$$

Основни принципи на квантовата теория: **СЪСТАВНИ СИСТЕМИ**

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по **Кръонекер (Kronecker)**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_\Phi \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Основно свойство: $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

$$(A \otimes B)(\Phi \otimes \Psi) = (A\Phi) \otimes (B\Psi)$$

Основни принципи на квантовата теория: **СЪСТАВНИ СИСТЕМИ**

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Спрягане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

-наистина: $(\Phi \otimes \Psi)^*(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \otimes (\Psi^* \Psi')$

Стандартния
о.н.б. в $\mathbb{C}^4$: $e_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_0$, $e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_1$,
 $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_0$, $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_1$,

Основни принципи на квантовата теория: **СЪСТАВНИ СИСТЕМИ**

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

$$\hat{1} \otimes B \leftarrow B$$

$$i_2(B) =: B_{(2)}$$

$$\Rightarrow A \otimes B =$$

$$= (A \cdot 1) \otimes (1 \cdot B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B)$$

$$= (1 \cdot A) \otimes (B \cdot 1) = (1 \otimes B)(A \otimes 1)$$

$\Rightarrow$

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} & 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} \\ 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} & 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} & 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} \\ 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} & 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Основни принципи на квантовата теория: **съставни системи**

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

$$\hat{1} \otimes B \leftarrow B$$

$$i_2(B) =: B_{(2)}$$

 $\Rightarrow$

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

т.е., както и поискаме: *абсолютно всяка наблюдаема на системата "1", $A_{(1)}$, е съвместно измерима с всяка наблюдаема на системата "2", $B_{(2)}$.*

Основни принципи на квантовата теория: **СЪСТАВНИ СИСТЕМИ**

До тук изследвахме наблюдаемите в съставна система. Състоянието?

Показе алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ - наистина:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) &\equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \end{aligned}$$

Основни принципи на квантовата теория: **СЪСТАВНИ СИСТЕМИ**

Следователно, всеки две отделни състояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на подсистемите води до състояние $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ на съставната система, така че за всеки две наблюдавани A и B на подсистемите

$$\langle A \otimes B \rangle_{\rho} \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\rho} = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2} - \text{независимост}$$

- наистина

$$\text{Tr}((\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(A \otimes B)) = \text{Tr}((\hat{\rho}_1 A) \otimes (\hat{\rho}_2 B)) = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 A) \text{Tr}(\hat{\rho}_2 B)$$

Основни принципи на квантовата теория: **съставни системи**

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицек.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \hat{\rho} = \Theta\Theta^* &= (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\underbrace{\Psi\Psi^*}_{\hat{\rho}_1}) \otimes (\underbrace{\Phi\Phi^*}_{\hat{\rho}_2}) \\ &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \end{aligned}$$

Това се наричат **несплетени чисти състояния**.

Чисти състояния в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, чийто вектори на състояние Θ не могат да се представят, като $\Theta = \Phi \otimes \Psi$ се наричат сплетени / entangled

Специално за 2 бита има прост критерий за сплетеност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Пример : $\sqrt{2} \Theta := e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

↖ за нормировка

— определя сплетено чисто състояние.

3. Корелации и неравенства на Бел / Bell

Да разгледаме силетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{22} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22})$$

3. Корелации и неравенства на Бел / Bell

Да разгледаме силетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle B_{(2)} \rangle_{\Theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22})$$

3. Корелации и неравенства на Бел / Bell

Да разгледаме силетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули:

$$\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (a_{11} b_{11} + a_{22} b_{22} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12})$$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово състояние
($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) &\equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left((1+c)(1-c) + (-s)(-s) - s^2 - s^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Извод: при всеки избор на 1-битово състояние Z , ако то се измерва във всяка от подсистемите то или на две места $Z_{(1)} = 1$ и $Z_{(2)} = 1$ или на две места $Z_{(1)} = 0$ и $Z_{(2)} = 0$ — има пълна синхрон в това състояние по отношение на тези местове.

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}_\Theta \left(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right) &\equiv \langle Y_{(1)} Z_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) - \frac{1}{2} \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \frac{s}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1-s) \end{aligned}$$

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Z_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} (1-c) + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4} (1-c)$$

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)} \geq \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)}$$

Обаче тук
получихме:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-s) \geq \frac{1}{4}(1-c)$$

$$\begin{aligned} \text{където } c &= \cos \varphi \\ s &= \sin \varphi \end{aligned}$$

?

 $\geq$ $\Leftrightarrow$

$$1 \geq \sin \varphi - \cos \varphi$$

 $\Leftrightarrow$

$$\sin \frac{\pi}{4} \geq \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)$$

Извод: неравенствата $\Leftarrow$
на Бел се нарушават в
квантови системи, напр. за $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$

Следва извод на неравенствата на Бел за класически системи

В останалата част на презентацията вместо индекси "1" и "2" на събитията X, Y, Z са използвани "A" и "B", съответно.

За вектора Θ на сплетеното състояние е използвана буквата Ψ .

Неравенства на Бел

Bell's inequalities

АПР/Бел постановка

Айщайн - Подолски - Розен / Бел

Einstein - Podolsky - Rosen / Bell

АПР / Бел постановка

Ψ

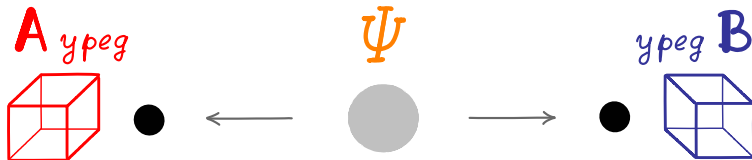


АПР / Бел постановка

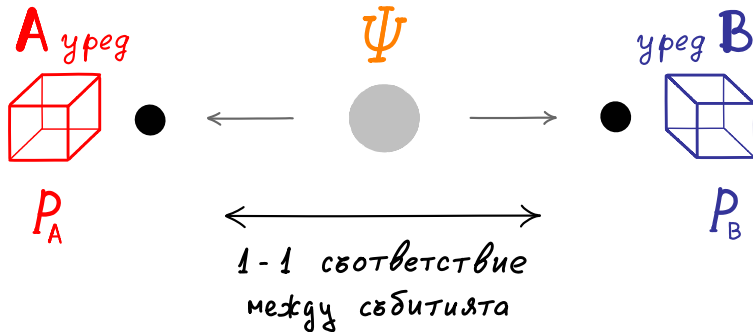
Ψ



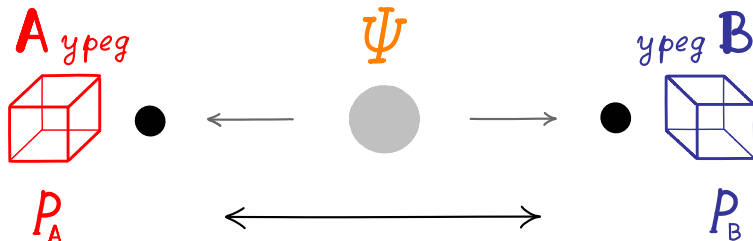
АПР / Бел постановка



АПР/Бел постановка



АПР/Бел постановка



При такава синхронизация между уредите ще има 100% корелация на резултатите.

Корелации и неравенства на Бел

0	1	0	1	0	1	0	1	Z_B	
0	0	1	1	0	0	1	1	Y_B	
0	0	0	0	1	1	1	1	X_B	
✓		✓		✓		✓			
p_1									X_A
	p_2								Y_A
		p_3							Z_A
			p_4						
				p_5				✓	
					p_6			✓	
						p_7		✓	
							p_8	✓	

$$p(X_A Y_B^\perp) = p_5 + p_6$$

$$p(Y_A Z_B^\perp) = p_3 + p_7$$

$$-p(X_A Z_B^\perp) = -p_5 - p_7$$

$$\geq 0$$

Корелации и неравенства на Бел

0	1	0	1	0	1	0	1	Z_B
0	0	1	1	0	0	1	1	Y_B
0	0	0	0	1	1	1	1	X_B
								X_A
								Y_A
								Z_A
p_1								0
	p_2							0
		p_3						1
			p_4					0
				p_5				1
					p_6			0
						p_7		1
							p_8	1

$$p(X_A Y_B^\perp) = p_5 + p_6$$

$$p(Y_A Z_B^\perp) = p_3 + p_7$$

$$-p(X_A Z_B^\perp) = -p_5 - p_7$$

$$\geq 0$$