

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 8 / 28.11.2022, версия 0

1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

1. Теория на измерването

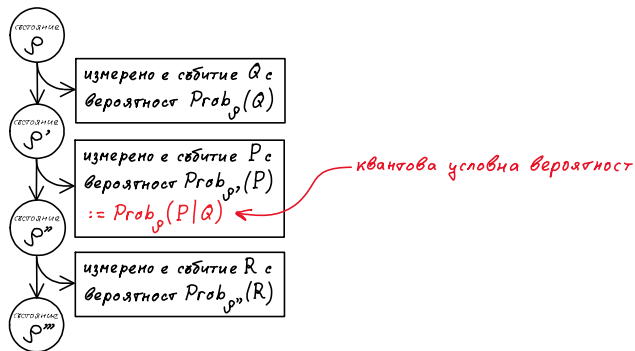
Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

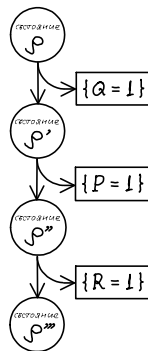
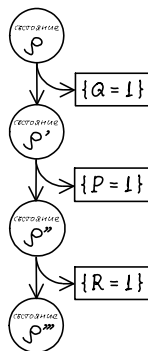
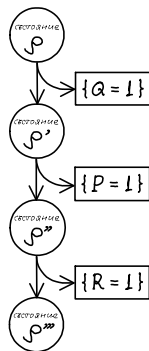
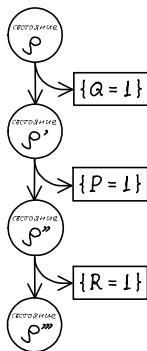
Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$



Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$



...

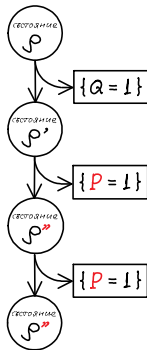
...

...

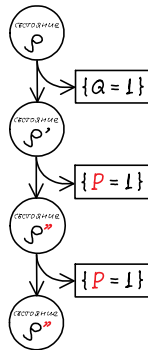
...

Теория на измерването

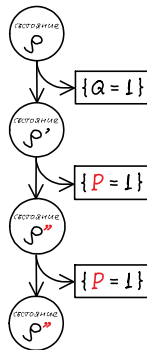
Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$



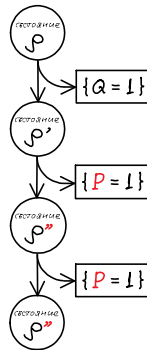
стабилизация



стабилизация



стабилизация



стабилизация

• • •
• • •
• • •
• • •

Теория на измерването

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Коректност: ρ' е състояние - наистина,

понеже алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$ е поразда линейно от събитията P

(поради спектралната теорема), то: $\rho'(A) = \frac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$ - като линеен функционал

Освен това, този линеен функционал е $\rho': \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.

$$\text{нормиран: } \rho'(\hat{1}) = \frac{\rho(Q\hat{1}Q)}{\rho(Q)} = \frac{\rho(Q^2)}{\rho(Q)} = 1$$

$$\text{и положителен: } \rho'(A^*A) = \frac{\rho(QA^*AQ)}{\rho(Q)} = \frac{\rho((AQ)^*AQ)}{\rho(Q)} \geq 0 \quad . \quad \square$$

Теория на измерването

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 1.: за $\forall A \in \mathcal{A}$, $\rho'(A) = \frac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 2.: Ако ρ е състояние с матрица на плътността $\hat{\rho}$, то след настаняване на Q матрицата на плътността става: $\hat{\rho}' = \frac{1}{\text{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q \hat{\rho} Q$

Наистина: за $\forall A \in \mathcal{A}$ имаме $\rho'(A) \equiv \text{Tr} \hat{\rho}' A = \frac{\text{Tr} \hat{\rho} Q A Q}{\rho(Q)} = \frac{\text{Tr} Q \hat{\rho} Q A}{\rho(Q)}$

$\Rightarrow \text{Tr} \left(\left(\hat{\rho}' - \frac{1}{\text{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q \hat{\rho} Q \right) A \right) = 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$. Полагайки $A = |\Psi\rangle\langle\Phi|$,

то за $\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ имаме $\langle\Phi| \underbrace{\left(\hat{\rho}' - \frac{1}{\text{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q \hat{\rho} Q \right)}_{\Rightarrow 0} |\Psi\rangle = 0$. $\square$

Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 3. : ако ρ е чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ (единичен), то състоянието ρ' след настаняване на Q е отново чисто и има вектор $\Phi = \frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi$

векторът на състояние се проектира ортогонално след измерване

Наистина : ако $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, то $\hat{\rho}' = \text{const} \cdot Q|\Psi\rangle\langle\Psi|Q = \text{const} \cdot |Q\Psi\rangle\langle Q\Psi|$.

$\Rightarrow \rho'$ също е чисто и има вектор Φ , пропорционален на $Q\Psi$. $\square$

Забележете : $\|Q\Psi\|^2 = \text{Prob}_\rho(Q)$ (от лекция 7) и $\Rightarrow$ ако Q настанява θ_ρ , то $\|Q\Psi\| \neq 0$.

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_{\rho}(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Забележете : в класически системи имаме $PQ = QP = P \cap Q$. Затова : $\parallel$

формулата на Бейс / Bayes $\leftarrow \text{Prob}_{\rho}(P|Q) = \frac{\text{Prob}_{\rho}(P \cap Q)}{\text{Prob}_{\rho}(Q)} \equiv \frac{\rho(QP)}{\rho(Q)}$

Закон на Бейс : $\text{Prob}_{\rho}(P \cap Q) = \text{Prob}_{\rho}(Q) \cdot \text{Prob}_{\rho}(P|Q)$
 $= \text{Prob}_{\rho}(Q \cap P) = \text{Prob}_{\rho}(P) \cdot \text{Prob}_{\rho}(Q|P)$

Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Теорема. Нека положим $\text{Prob}_\rho(P \text{ след } Q) := \text{Prob}_\rho(Q) \cdot \text{Prob}_\rho(P|Q)$

Тогава : $\text{Prob}_\rho(P \text{ след } Q) = \text{Prob}_\rho(Q \text{ след } P) \quad (\forall \rho - \text{свст.}) \iff PQ = QP$

В този случай : $\text{Prob}_\rho(P \cup Q)$

т.е., независимостта от реда на измерване е $\iff$ комасируемост, т.е., на съвместна измеримост

Доказателство. L.H.S. : $\rho(PQP) = \rho(QPQ) \quad (\forall \rho - \text{свст.})$.

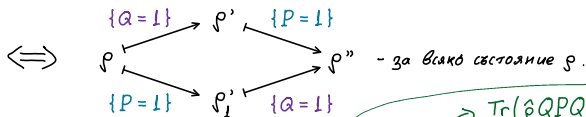
$$\Rightarrow PQP = QPQ \Rightarrow (PQ - QP)^2 = \underbrace{PQPQ}_{QPQ} + \underbrace{QPQP}_{PQP} - \underbrace{PQQP}_Q - \underbrace{QPPQ}_P = 0. \quad \square$$

Теория на измерването

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Теорема. $PQ = QP$ $\leftarrow$ събитията P и Q комутират, т.е. са съвместно измерими



Доказателство.

от друга страна

$$\text{R.H.S.: } \hat{\rho}'' = \frac{P \hat{\rho}' P}{\text{Tr}(\hat{\rho}' P)} = \frac{PQ \hat{\rho} QP}{\text{Tr}(\hat{\rho} QPQ)} \stackrel{\text{за } \text{Tr } Q \cdot}{=} \frac{QP \hat{\rho} PQ}{\text{Tr}(\hat{\rho} PQP)}$$

($\forall \hat{\rho}$ - матрица на излъчността)

$$\text{Tr}(\hat{\rho} QPQPQ) = \text{Tr}(\hat{\rho} QPQ) (\forall \hat{\rho}).$$

$\Rightarrow QPQ$ е събитие. $\Downarrow$

$$(QP - QPQ)(PQ - QPQ) = 0$$

$$PQ = (PQ)^* = QP \quad \Downarrow$$

Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Мотивация : проекционният постулат може да се изведе от следните по-прости принципи

- Принцип за стабилизация : ако след измерване на събитие Q в състояние ρ се е установило състояние ρ' и ако тогава измерим Q в ρ' , то Q ще натъпи в ρ' с вероятност 1 и състоянието повече няма да се промени (т.е., ще остане ρ').
- Принцип за "потвърждение" : ако Q настъпва в състояние ρ с вероятност 1, то след настъпване на Q състоянието остава същото.

(в тази връзка е и т.нар. "квантов ефект на Зенон" : https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Zeno_effect)

- Принцип на "смесване" : ако $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ и имаме $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' > \rho_j \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho'_j$,

за $j=1,2$, то $\text{Prob}_{\rho'}(P \text{ след } Q) = q_1 \text{Prob}_{\rho'_1}(P \text{ след } Q) + q_2 \text{Prob}_{\rho'_2}(P \text{ след } Q)$

Теория на измерването

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 1.: за $\forall A \in \mathcal{A}$, $\rho'(A) = \frac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 2.: Ако ρ е състояние с матрица на плътността $\hat{\rho}$, то след настъпване на Q матрицата на плътността става: $\hat{\rho}' = \frac{1}{\text{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q \hat{\rho} Q$

Следствие 3.: Ако ρ е чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ (единичен), то състоянието ρ' след настъпване на Q е отново чисто и има вектор $\Phi = \frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi$

Теорема.

$$PQ = QP \iff \begin{array}{ccccc} & \{Q=1\} & \nearrow & \rho' & \nwarrow \{P=1\} \\ \rho & & & & \\ & \{P=1\} & \searrow & \rho'_1 & \nearrow \{Q=1\} \\ & & & & \end{array} \iff$$

(forall rho)

$$\begin{aligned} & \text{Prob}_\rho(Q) \cdot \text{Prob}_\rho(P|Q) \\ &= \text{Prob}_\rho(P) \cdot \text{Prob}_\rho(Q|P) \end{aligned} \quad (\forall \rho)$$

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие

Нека A е наблюдаема със спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_m Q_m$, ако при измерване на A в чисто състояние с вектор Ψ е измерена

стойност α_k , то системата премива отново в чисто състояние с вектор

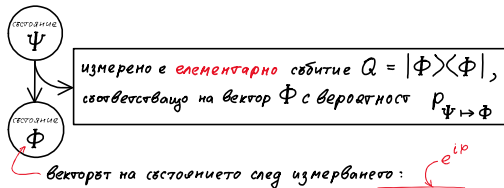
$\Phi = \frac{1}{\|Q_k \Psi\|} Q_k \Psi$, който е собствен вектор за A със собствена стойност α_k

Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Преход между състояния и вероятност за преход : допълнителна интерпретация



$$\frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi = \frac{1}{|\langle\Psi|\Phi\rangle|^2} |\Phi\rangle\langle\Phi|\Psi\rangle = \frac{\langle\Psi|\Phi\rangle}{\langle\Psi|\Phi\rangle} |\Phi\rangle$$

Нека : $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ - единични

$$P_{\Psi \rightarrow \Phi} = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2$$

вероятност за преход

амплитуда на прехода

$$\begin{aligned} \text{Prob}_\Psi(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\ = \langle\Psi|\Phi\rangle \underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}} \end{aligned}$$

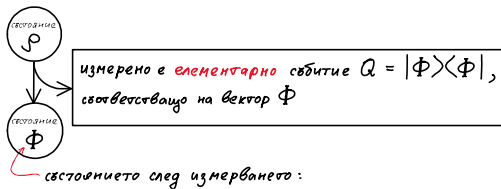
Теория на измерването

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) (\equiv \text{Prob}_\rho(P|Q)) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Наблюдение : след настъпване на елементарно събитие винаги се установява чисто състояние

Нека : $\Phi \in \mathbb{C}^n$ - единичен



$$\hat{\rho}' = \frac{Q \hat{\rho} Q}{\text{Tr}(\hat{\rho} Q)} = \frac{|\Phi\rangle \langle \Phi| \hat{\rho} |\Phi\rangle \langle \Phi|}{\text{Tr}(\hat{\rho} |\Phi\rangle \langle \Phi|)} = |\Phi\rangle \langle \Phi|$$

матрица на плътността на чисто състояние с вектор Φ

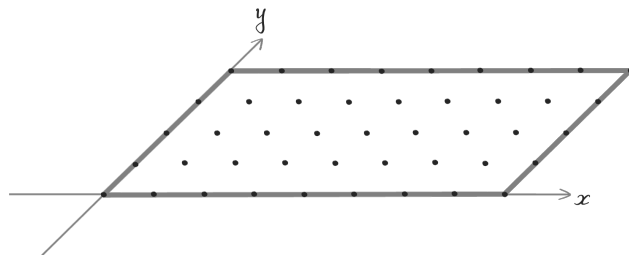
1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

Колапсът на вълновата функция

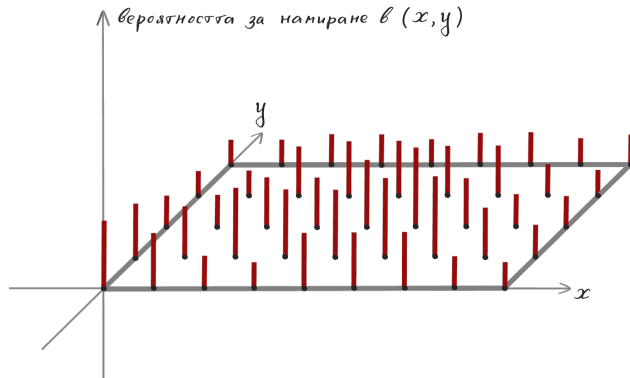


Разглеждаме частица в равнина.

За постигане на крайно описание, първо се ограничаваме в крайна област.

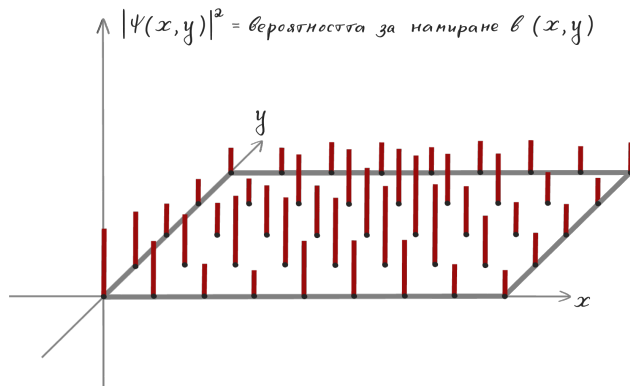
И второ, минаваме върху решетка (като върху монитор на компютър).

Колапсът на вълновата функция



Чатицата може да се намери с определени вероятности в отделните точки на пространството (в случая – на решетката).

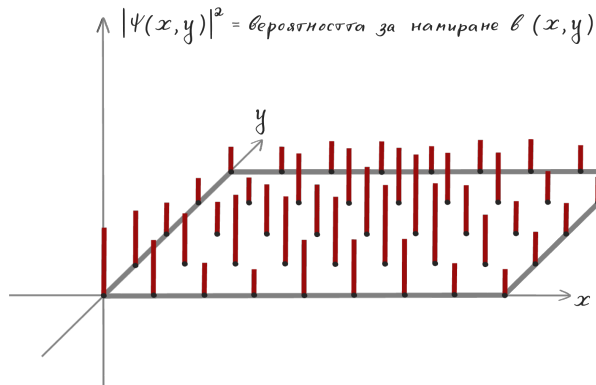
Колапсът на вълновата функция



Чатицата може да се намери с определени вероятности в отделните точки на пространството (в случая – на решетката).

Тези вероятности се определят от вектора на състояние Ψ на частицата.

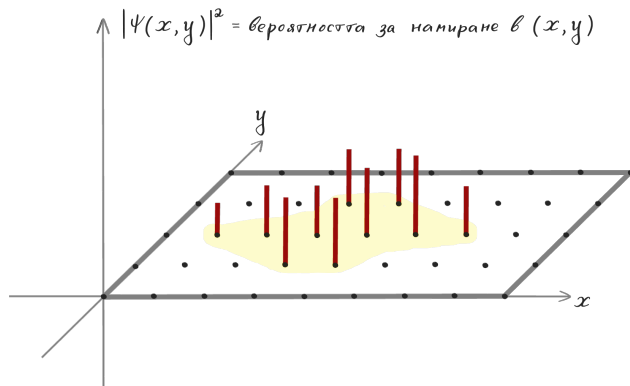
Колапсът на вълновата функция



Векторът на състоянието може да се запише, като “вълнова функция”

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(0, 0) \\ \vdots \\ \psi(0, M) \\ \vdots \\ \psi(x, y) \\ \vdots \\ \psi(N, 0) \\ \vdots \\ \psi(N, M) \end{pmatrix}$$

Колапсът на вълновата функция

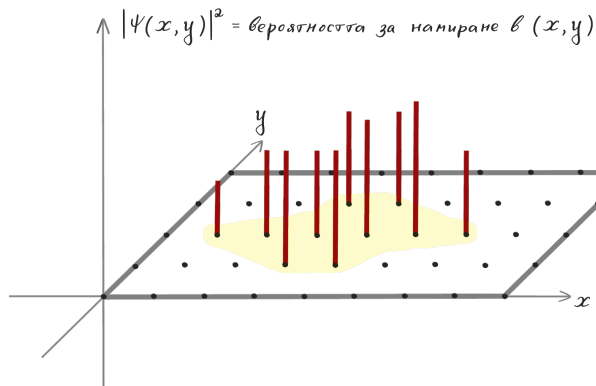


При измерване, векторът на състоянието първо се проектира

$$P\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \psi(x, y) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

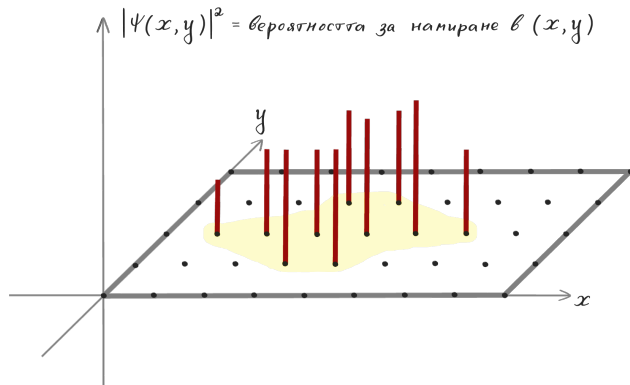
Колапсът на вълновата функция

След това се нормира



$$\frac{1}{\|\Pi\Psi\|} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \psi(x, y) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Колапсът е къде: в нас или извън нас?



Измерване в сплетено състояние

 Ψ в предходна презентация

"X" - вес

 $X_{(1)} =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_X \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e_0 \otimes e_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)$$



$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Но:
 $e_0 \neq f_0$

"Y" - вес

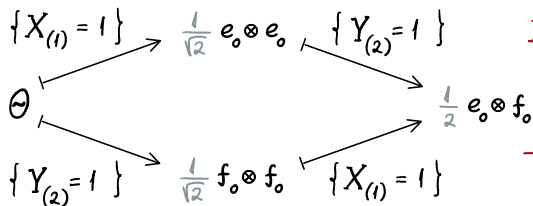
 $Y_{(2)} =$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_Y$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 \otimes \underbrace{f_0}_{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Теория на измерването: примери и дискусия

Измерване в сплетено състояние



Понеже:

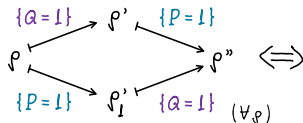
$$X_{(1)} Y_{(2)} = Y_{(2)} X_{(1)} \\ (= X \otimes Y)$$

(въпреки, че $XY \neq YX$)→ възстановява се
"противоречието"

припомняне

Теорема.

$$PQ = QP$$

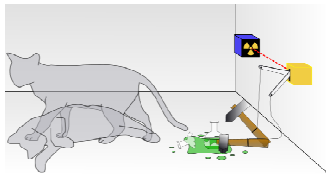
 $\Leftrightarrow$ 

$$\text{Prob}_{\rho}(Q) \cdot \text{Prob}_{\rho}(P|Q) \\ = \text{Prob}_{\rho}(P) \cdot \text{Prob}_{\rho}(Q|P) \quad (\forall \rho)$$

Теория на измерването: примери и дискусия

Котката на Шрьодингер https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger's_cat

Erwin Schrödinger
1887 – 1961



$$|dead\rangle + |alive\rangle$$

– сплитане между микро и макро-системи ?

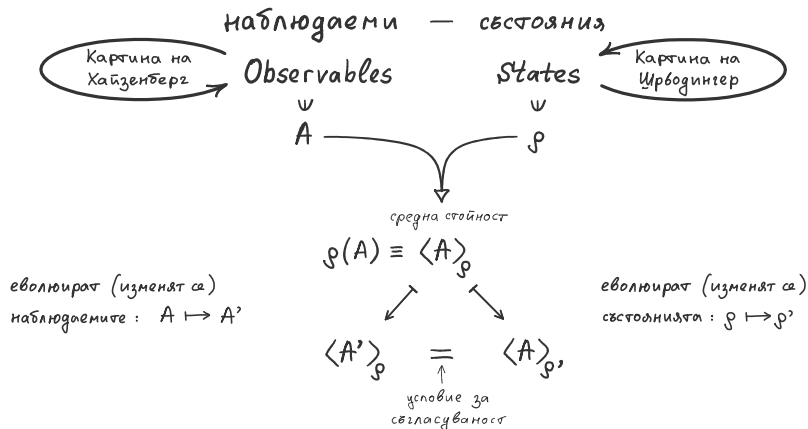
1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

Квантови трансформации



Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^{n'}$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,
като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

U е единствена с точност до пропорционалност. В сила е и обратната посока.

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

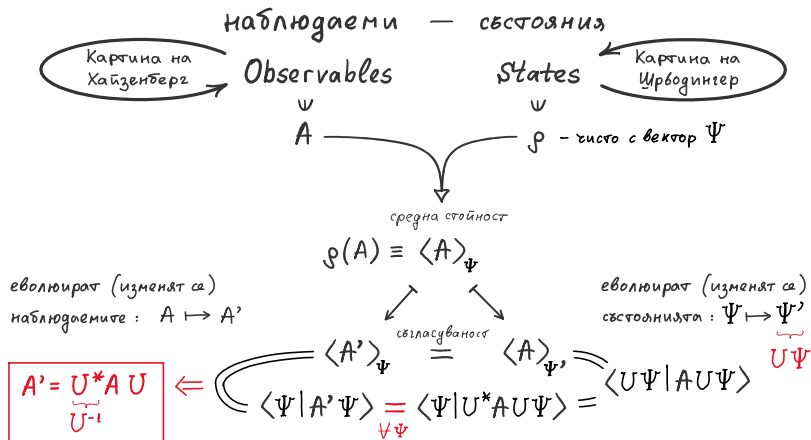
$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{I} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{I}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{I}$,
то U е обратима, понеже $1 = \det \hat{I} = \det U^* \det U = |\det U|^2$
Тогава: $U^* = U^{-1}$ - таква матрици се наричат **унитарни матрици**.

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации

Квантови трансформации



Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :

$$\left. \begin{aligned} &- U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU) \\ &- U^{-1}\hat{I}U = \hat{I} \\ &- (U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1*} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{това е изоморфизъм на } * \text{-алгебри с единица}$$
- Горният вид изоморфизми се наричат "вътрешни" / "inner".
- Математически резултат: всички $*$ -изоморфизми на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ в себе си са вътрешни.
- Това показва, че за крайни, чисто квантови системи, двете картини на описание на квантовите трансформации са еквивалентни.

1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

Квантови трансформации: примери и дискусия

Унитарни матрици и ортонормирани базиси

$$\begin{array}{c}
 U^* \\
 \left(\begin{array}{cccc} \overline{u_{11}} & \overline{u_{21}} & \overline{u_{31}} & \cdots & \overline{u_{n1}} \\ \overline{u_{12}} & \overline{u_{22}} & \overline{u_{32}} & \cdots & \overline{u_{n2}} \\ \overline{u_{13}} & \overline{u_{23}} & \overline{u_{33}} & \cdots & \overline{u_{n3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{u_{1n}} & \overline{u_{2n}} & \overline{u_{3n}} & \cdots & \overline{u_{nn}} \end{array} \right)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 U \\
 \left(\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{array} \right)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \hat{1} \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$e_j \xrightarrow{U} u_j$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \downarrow$
 $u_{\cdot 1} \quad u_{\cdot 2} \quad u_{\cdot 3} \quad \cdots \quad u_{\cdot n}$

U е унитарна $\Leftrightarrow$
 колоните (или редовете)
 са ортонормирани базиси

$$U^* U = \hat{1}$$

$$\Leftrightarrow \langle u_j | u_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

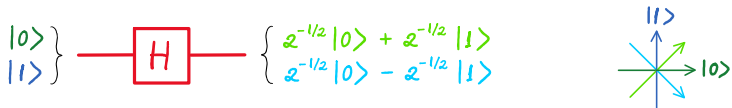
$$U U^* = \hat{1}$$

$$\Leftrightarrow |u_1\rangle \langle u_1| + \cdots + |u_n\rangle \langle u_n| = \hat{1}$$

Унитарни матрици и ортонормирани бази

- пример 1.: гейт на Адамар / Hadamard gate

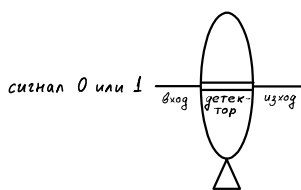
$$H := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_0 \equiv |0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \\ e_1 \equiv |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \end{array} \right.$$

- пример 2.: Ротация на ъгъл α : $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Квантови трансформации: примери и дискусия

"Бомбен" тест на Елицур-Вайдманhttps://en.wikipedia.org/wiki/Elitzur-Vaidman_bomb_tester

- а) Предполагения: разполагаме с бомби, взаимодейяни с детектори. Една част са със здрави детектори, а другата - с повредени.



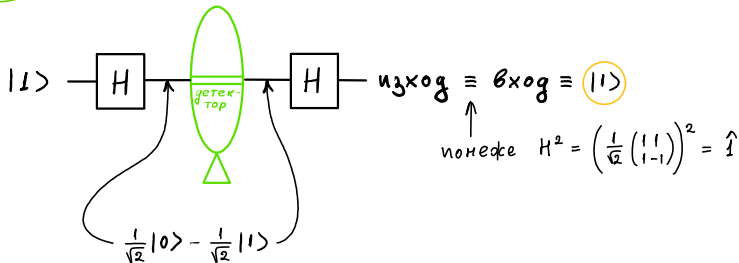
- а) при здрава бомба (детектор) се извършва измерване: при резултат $\perp$ - взаимодейя се
- б) при повредена бомба (детектор) считаме, че сигнала не се повлиява, т.е., все едно че няма детектор (вход $\equiv$ изход).

- б) Задачата е да тестваме бомбите (детекторите) без да им взаимодейяме.

Квантови трансформации: примери и дискусия

“Бомбен” тест на Елиуур-Вайдман – квантово решение 1

повредена
бомба

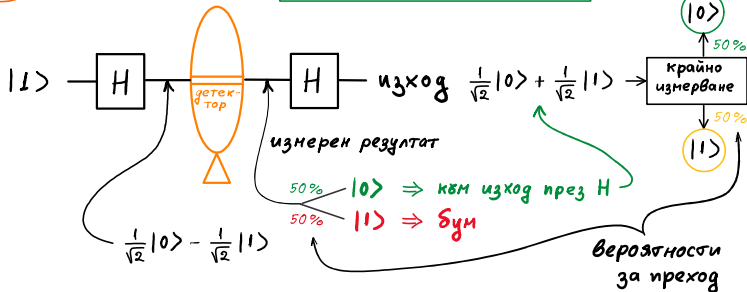


Квантови трансформации: примери и дискусия

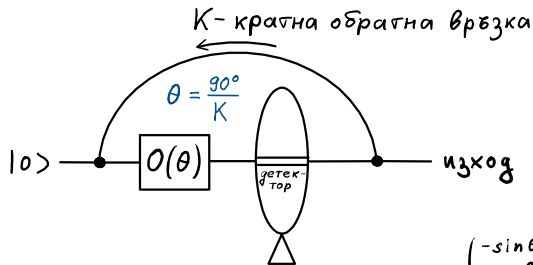
"Бомбен" тест на Елиуур-Вайдман - квантово решение 1

здрава
бомба

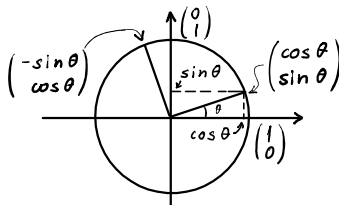
успешен тест: бомбата е здрава и незадействана

успех: $50\% \times 50\% = 25\%$ 

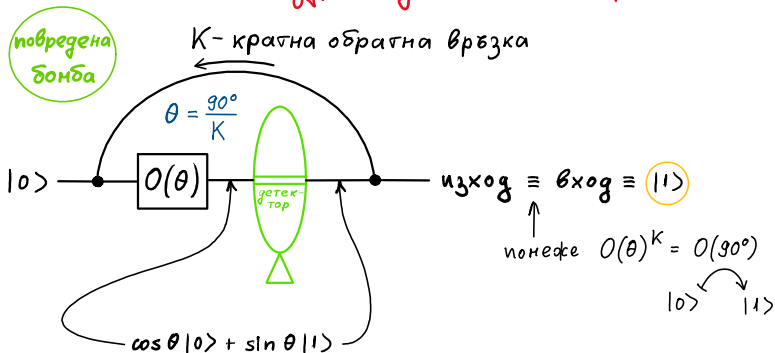
"Бомбен" тест на Елиуур-Вайдман - квантово решение 2



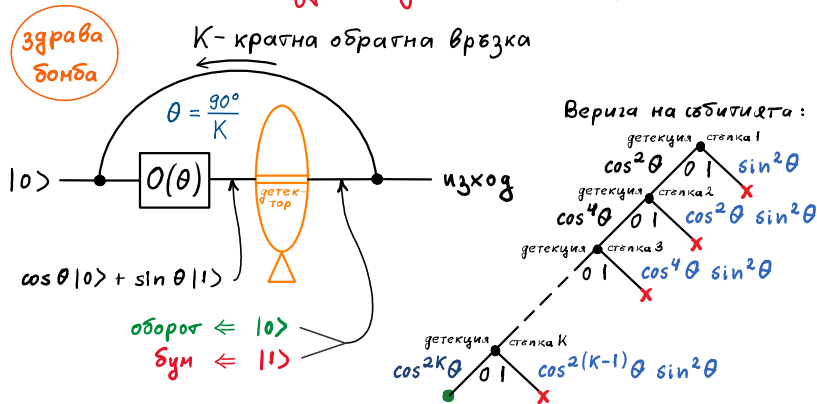
$$O(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



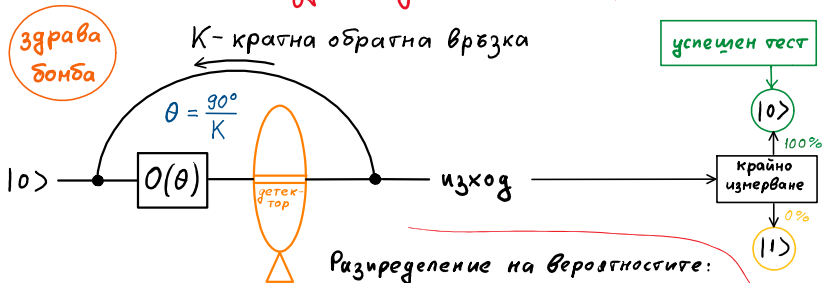
"Бомбен" тест на Елиуур-Вайдман - квантово решение 2



"Бомбен" тест на Елиуур-Вайдман - квантово решение 2



"Бомбен" тест на Елиуур-Вайдман - квантово решение 2



Разпределение на вероятностите:

$$\underbrace{\cos^{2K}\theta + \cos^{2(K-1)}\theta \sin^2\theta + \dots + \cos^4\theta \sin^2\theta + \sin^2\theta}_{\text{не се задейства и изхода е 0}} = 1$$

не се задейства
и изхода е 0

задейства се

с вероятност

$$1 - \cos^{2K}\theta$$

$$\approx 1 - \cos^{2K}\frac{\pi}{2K} \approx \frac{\pi^2}{4K} \rightarrow 0$$

при $K \rightarrow \infty$