Дискретната Фурие трансформация и нейното приложение за намиране на периоди (честоти)

1. По определение: дискретната Фурие трансформация е линейно преобразование

$$\underbrace{F.}_{\text{Fourier}}\underbrace{T.}_{\text{Transform}} : f \mapsto g$$

което изобразява всяка функция $f : \{0, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

отново във функция $g : \{0, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

Числото N е цяло, фиксирано число.

$$\boxed{\begin{gathered} g(\omega) := F.T.(f)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t} f(t) \\ t, \omega \in \{0, 1, \dots, N-1\} \end{gathered}}$$

2. Фурие трансформацията е обратима:

$$f(t) = \underbrace{I.}_{\text{inverse}}F.T.(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}\omega t} g(\omega)$$

Наистина: $I.F.T.\big(F.T.(f)\big)(t)$

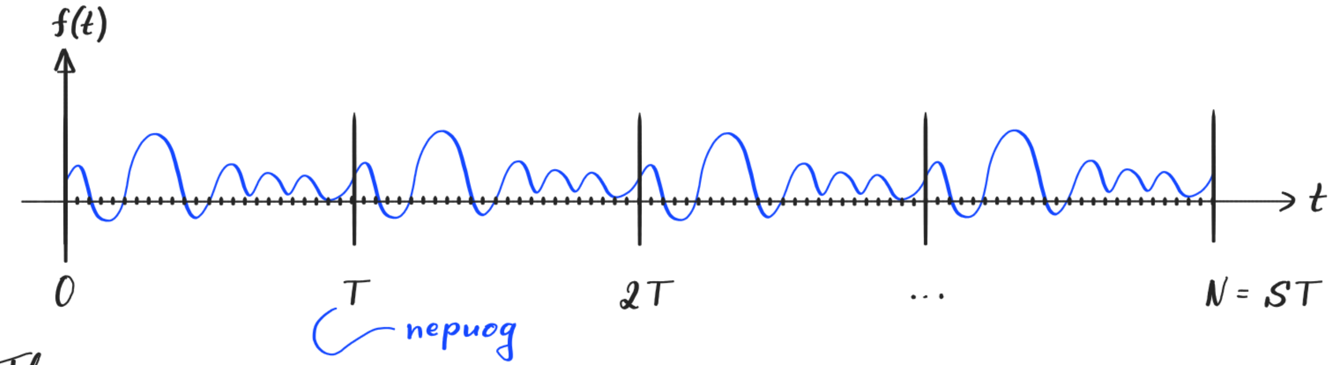
$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}\omega t} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t'=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'} f(t')$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t'=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{\omega=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N}(t-t')}\right)^{\omega}}_{N\,\delta_{t,t'}} f(t') = \sum_{t'=0}^{N-1} \delta_{t,t'} f(t') = f(t)$$

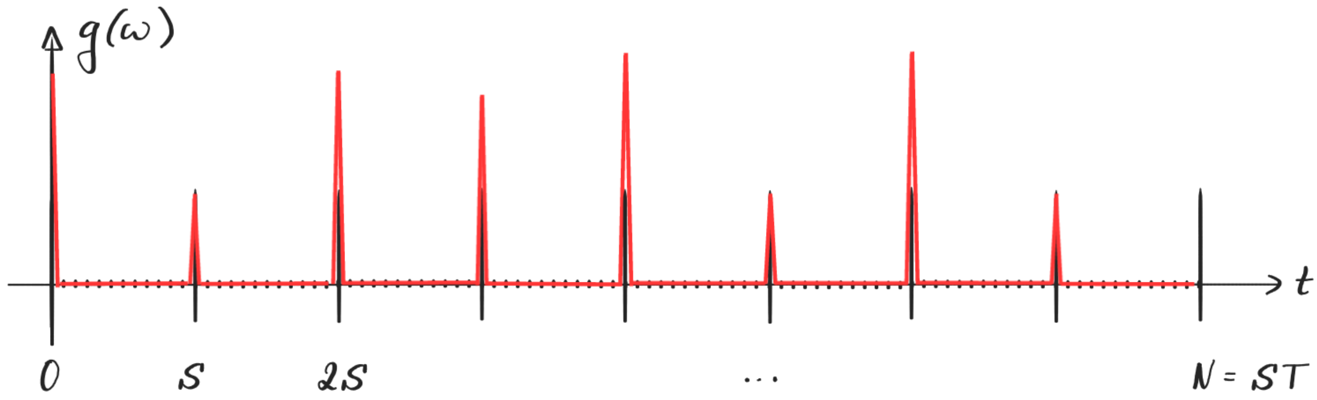
сума на геометрична прогресия

3. Трансформации на (под)периодични функции

Нека T дели N и $f(t) = f(t')$, ако T дели $t - t'$



Then



$S = \frac{N}{T} \sim \frac{1}{T}$ - честота

Фурие образа на функция с период T е съсредоточен върху подмножеството

$$\{0, S, \dots, (T-1)S\} \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$$

от кратни на "честотата" S

Доказателство

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t'=0}^{T-1} \underbrace{\sum_{s=0}^{S-1} \overbrace{e^{\frac{2\pi i}{N}\omega(sT+t')}}^{\left(e^{\frac{2\pi i}{N}\omega T}\right)^s e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'}}}_{e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'} \cdot \begin{cases} S & \text{ако } \frac{\omega T}{N} = \frac{\omega}{S} \text{ е цяло} \\ 0 & \text{ако не е} \end{cases}} \underbrace{f(sT+t')}_{f(t')}$$

$t = sT + t'$

t' — остатък при деление на T

$\Rightarrow$ $g(\omega) = 0$ ако ω не се дели на S

В противен случай, ако $\omega = S\omega'$

$$g(S\omega') = \frac{1}{\sqrt{N}}\, S \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{N} S\omega' t'} f(t')$$

$N = ST$

$$= \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{T}} \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{T} \omega' t'} f(t')$$

$$= \sqrt{S}\; \underbrace{F.T.'}(f)(\omega')$$

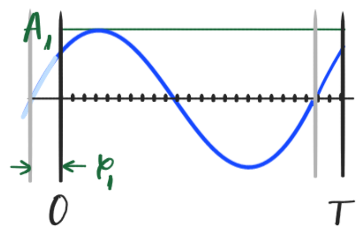
Фурие трансформация за размер T.

Следствие

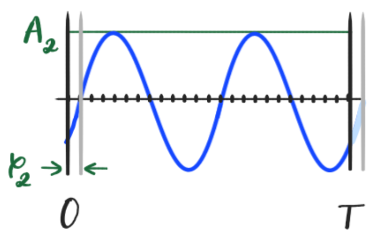
$$f(t) = g(0).1 + \underbrace{g(1.S)}_{|g(S)|e^{i\varphi_1}} e^{\frac{2\pi i}{T}1.t} + \underbrace{g(2.S)}_{|g(2S)|e^{i\varphi_2}} e^{\frac{2\pi i}{T}1.t} + \dots$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \text{const} + A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}2t + \varphi_2\right) + \dots$$

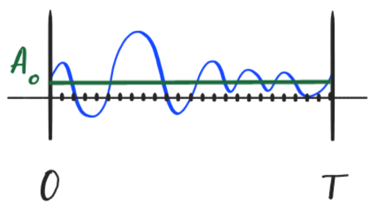
нулев член - постоянно средно ниво на сигнала



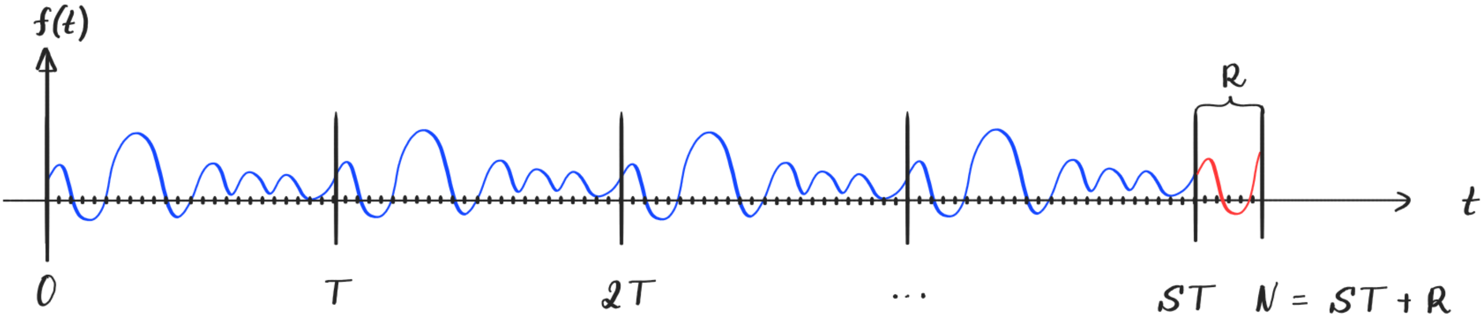
първа хармонична с амплитуда A_1 и начална фаза φ_1



втора хармонична с амплитуда A_2 и начална фаза φ_2

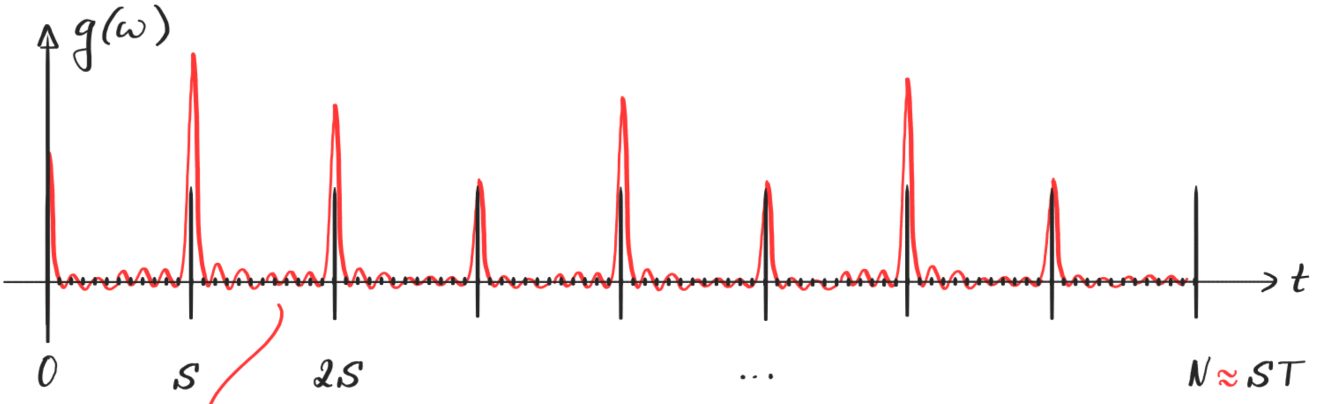


4. Почти периодични сигнали



Нека сега T не дели N, но остатъка $R = N - ST \ll N$

Сега $g(\omega)$ е приблизително съсредоточена в $\{0, S, 2S, \dots, (T-1)S\}$



преди в междинните точки беше точно $=0$, а сега ≈ 0.

Доказателство: отново

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t'=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{S-1} \underbrace{\underbrace{e^{\frac{2\pi i}{N}\omega(sT+t')}}_{\left(e^{\frac{2\pi i}{N}\omega T}\right)^{s} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'}}} \underbrace{f(sT+t')}_{f(t')}$$

$t = sT + t'$

остатък при делене на T

$$+ \underbrace{\sum_{t'=0}^{R-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega(ST+t')} f(ST+t')}_{\text{новото: остатъчен член } \approx 0 \text{ понеже } R \ll N}$$

Сега обаче: $\sum_{s=0}^{S-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega(sT+t')} = \sum_{s=0}^{S-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N}\omega T}\right)^s e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'}$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi i}{N}\omega T S} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N}\omega T} - 1} \, e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N}\omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N}\omega\right)} \, e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'}$$

И така, $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N}\omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N}\omega\right)} \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\omega t'} f(t')$

Въпросът е за кои ω, модулът $|g(\omega)|$ е малък (≈ 0) ?

Тъй като се оказва, че $\sum_{\omega=0}^{N-1} |g(\omega)|^2 \underbrace{=}_{\text{формула на Планшерел}} \sum_{t=0}^{N-1} |f(t)|^2 \overset{\text{нормировка}}{=} 1$

то $|g(\omega)| \leq 1$ и можем да потърсим, кога $|g(\omega)|$ може да е "значително" > 0.

Основание за последното е приблизителното анулиране на знаменателя:

$$\sin\left(\pi \frac{T}{N}\omega\right) \overset{?}{\approx} 0$$

$$\sin\left(\pi \frac{T}{ST+R}\omega\right) = \sin\left(\pi \underbrace{\frac{\omega}{S}}_{\text{трябва да е приблизително цяло число}} \underbrace{\left(1 - \frac{R}{N}\right)}_{\approx 1}\right)$$

Извод: $|g(\omega)|$ е съществено > 0 евентуално, когато ω се дели на S