КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 2 / 16.10.2023,   версия 1

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

аксиоматични подходи / аксиоматични раздели	квантово-логически аксиоматичен подход	алгебричен аксиоматичен подход

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

аксиоматични подходи аксиоматични раздели	квантово-логически аксиоматичен подход	алгебричен аксиоматичен подход
аксиоми на общи системи		
аксиоми на съставни системи		
квантови трансформации		

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

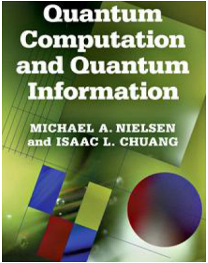
аксиоматични подходи / аксиоматични раздели	квантово-логически аксиоматичен подход	алгебричен аксиоматичен подход
аксиоми на общи системи	лекции 2-4	лекции 5-7
аксиоми на съставни системи	—	лекция 8
квантови трансформации	—	лекция 9

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

аксиоматични подходи аксиоматични раздели	квантово-логически аксиоматичен подход	алгебричен аксиоматичен подход
аксиоми на общи системи	2-3 лекции 2-4	3-5 лекции 5-7
аксиоми на съставни системи	—	6 лекция 8
квантови трансформации	—	7 лекция 9

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

Алтернативен източник: http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/NC2010.pdf




x *Contents*

Quantum Computation and Quantum Information
(10th Anniversary Edition)
by *Michael A. Nielsen* and
Isaac L. Chuang

Chapt. 2
Introduction to quantum mechanics
(стр. 60 – 119)

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За по-добра ориентация в изложението ще отличаваме следните два типа части:

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За по-добра ориентация в изложението ще отличаваме следните два типа части:

- Илюстративни и мотивационни части.

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За по-добра ориентация в изложението ще отличаваме следните два типа части:

- Илюстративни и мотивационни части.

  Те няма да имат доказателствена или логическа роля при построяването на теорията, аналогично както и чертежите в геометрията нямат доказателствена стойност. Тези части ще мотивират въвежданите понятия и ще ги илюстрират как биха изглеждали в практиката.

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За по-добра ориентация в изложението ще отличаваме следните два типа части:

- Илюстративни и мотивационни части.

  Те няма да имат доказателствена или логическа роля при построяването на теорията, аналогично както и чертежите в геометрията нямат доказателствена стойност. Тези части ще мотивират въвежданите понятия и ще ги илюстрират как биха изглеждали в практиката.

- Формални части.

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За по-добра ориентация в изложението ще отличаваме следните два типа части:

- Илюстративни и мотивационни части.

  Те няма да имат доказателствена или логическа роля при построяването на теорията, аналогично както и чертежите в геометрията нямат доказателствена стойност. Тези части ще мотивират въвежданите понятия и ще ги илюстрират как биха изглеждали в практиката.

- Формални части.

  Те ще съдържат определенията, аксиомите, теоремите и доказателствата в теорията, както и всички пресмятания и построения.

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За аксиоматичният подход:

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За аксиоматичният подход:

Един от шедьоврите на аксиоматичните подходи, на който ще подражаваме е книгата на Давид Хилберт "Основи на геометрията".

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За аксиоматичният подход:

Един от шедьоврите на аксиоматичните подходи, на който ще подражаваме е книгата на Давид Хилберт "Основи на геометрията". Тя започва така:

Мислим три различни системи от неща. Нещата от първата система наричаме *точки*; **нещата от втората система наричаме** *прави* **и ги означаваме с** $A, B, C, \ldots$; **нещата от третата система наричаме** *равнини* **и ги означаваме с** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; . . . .

Мислим точките, правите и равнините като намиращи се в известни взаимни отношения и ние изразяваме тези отношения с думи като "*лежат*", "*между*", "*паралелно*", "*конгруетно*", "*непрекъснато*" **и т.н.; точното и за математически цели описание на тези отношения се дава от аксиомите на геометрията.**

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За аксиоматичният подход:

Един от шедьоврите на аксиоматичните подходи, на който ще подражаваме е книгата на Давид Хилберт "Основи на геометрията". Тя започва така:

Мислим три различни системи от неща. Нещата от първата система наричаме *точки*; **нещата от втората система наричаме** *прави* **и ги означаваме с** $A, B, C, \ldots$; **нещата от третата система наричаме** *равнини* **и ги означаваме с** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; . . . .

Мислим точките, правите и равнините като намиращи се в известни взаимни отношения и ние изразяваме тези отношения с думи като "*лежат*", "*между*", "*паралелно*", "*конгруетно*", "*непрекъснато*" **и т.н.; точното и за математически цели описание на тези отношения се дава от аксиомите на геометрията.**

Ние ще изходим от две първични съвкупности от "неща": "множество на събитията" и "множество на състоянията". Заедно с тях ще предположим и едно функционално отношение между тях: зададено е число $\in [0, 1]$ за всяка двойка от събитие и състояние, което наричаме "вероятност за настъпване на събитие в състояние".

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

За аксиоматичният подход:

Един от шедьоврите на аксиоматичните подходи, на който ще подражаваме е книгата на Давид Хилберт “Основи на геометрията”. Тя започва така:

> **Мислим три различни системи от неща. Нещата от първата система наричаме** *точки*; **нещата от втората система наричаме** *прави* **и ги означаваме с** $A, B, C, \ldots$; **нещата от третата система наричаме** *равнини* **и ги означаваме с** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; . . . .
>
> **Мислим точките, правите и равнините като намиращи се в известни взаимни отношения и ние изразяваме тези отношения с думи като** “*лежат*”, “*между*”, “*паралелно*”, “*конгруетно*”, “*непрекъснато*” **и т.н.; точното и за математически цели описание на тези отношения се дава от аксиомите на геометрията.**

Ние ще изходим от две първични съвкупности от “неща”: “множество на събитията” и “множество на състоянията”. Заедно с тях ще предположим и едно функционално отношение между тях: зададено е число $\in [0, 1]$ за всяка двойка от събитие и състояние, което наричаме “вероятност за настъпване / регистриране / измерване на събитие в състояние”.

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности:

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности: $\mathscr{E}vents$ – множество на **събитията**,

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности: $\mathscr{E}vents$ – множество на **събитията**,
$\mathscr{S}tates$ – множество на **състоянията**.

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности: $\mathscr{E}vents$ – множество на **събитията**, $\mathscr{S}tates$ – множество на **състоянията**.

Заедно с това ще ни бъде определена и функция:

$$\begin{aligned} Prob : \mathscr{E}vents \times \mathscr{S}tates &\to [0,1] \\ (Q, \rho) &\mapsto Prob_\rho(Q) \ (\equiv Prob_\rho(Q)) \end{aligned}$$

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности: $\mathcal{E}vents$ – множество на **събитията**, $\mathcal{S}tates$ – множество на **състоянията**.

Заедно с това ще ни бъде определена и функция:

$$
\begin{aligned}
Prob : \mathcal{E}vents \times \mathcal{S}tates &\to [0,1] \\
(Q, \rho) &\mapsto Prob_{\rho}(Q) \ (\equiv Prob_{\rho}(Q)) ,
\end{aligned}
$$

което се нарича **вероятност за настъпване (регистриране) на събитието Q в състояние ρ.**

Аксиоми на общи системи

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности: $\mathscr{Events}$ – множество на **събитията**,
$\mathscr{States}$ – множество на **състоянията**.

Заедно с това ще ни бъде определена и функция:

$$\begin{aligned} Prob : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} &\to [0,1] \\ (Q, \rho) &\mapsto Prob_\rho(Q)\ (\equiv Prob_\rho(Q))\,, \end{aligned}$$

което се нарича **вероятност за настъпване (регистриране) на събитието Q в състояние ρ.**

Накратко казваме: "зададена статистическа система от данни: $\big(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} \to [0,1]\big)$."

Определение на статистическа система:

$$\left(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} \to [0, 1]\right).$$

Определение на статистическа система:

$$\left(\boldsymbol{\mathscr{Events}}, \boldsymbol{\mathscr{States}}, \mathit{Prob}\right).$$

Определение на статистическа система:

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{Events}}, \boldsymbol{\mathcal{States}}, Prob\right).$$

Множествата $\boldsymbol{\mathcal{Events}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{States}}$, заедно с функцията $Prob$ ще бъдат структурно-определящите данни.

Определение на статистическа система:

$$\left(\boldsymbol{\mathscr{Events}}, \boldsymbol{\mathscr{States}}, Prob\right).$$

Множествата $\boldsymbol{\mathscr{Events}}$ и $\boldsymbol{\mathscr{States}}$, заедно с функцията $Prob$ ще бъдат структурно-определящите данни.

Заедно с това, понятията "събитие" и "състояние" ще са всичките първични понятия.

Определение на статистическа система:

$$\left(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob\right).$$

Множествата $\mathscr{Events}$ и $\mathscr{States}$, заедно с функцията $Prob$ ще бъдат структурно-определящите данни.

Заедно с това, понятията "събитие" и "състояние" ще са всичките първични понятия.

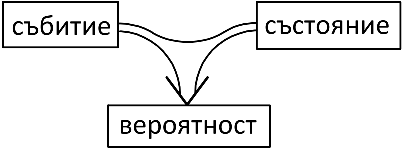
По-нататък ще определим, като вторични понятия:
"логическата наредба и операции над събитията", "елементарни събития", "чисти / смесени състояния", "експеримент", "подсистема / надсистема", "съвместна измеримост" и др.

Определение на статистическа система:

$$\left(\mathscr{E}vents, \mathscr{S}tates, Prob\right).$$

> Определение на статистическа система:
> $$\left(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob\right).$$

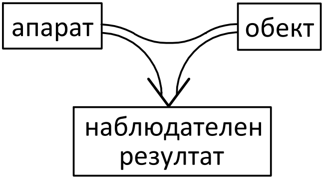
Илюстративна схема:



Определение на статистическа система:

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)\ .$$

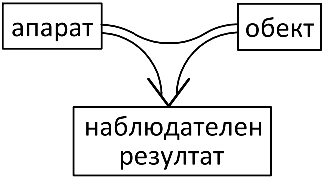
Илюстративна схема:



Определение на статистическа система:

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)\,.$$

Илюстративна схема:

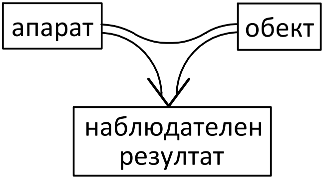


Обръщаме внимание: квантовата теория описва взаимоотношението между "субект" (напр., апарат за наблюдение или цяла експериментална установка) и "обект" (напр., изследвания / наблюдавания обект), без да отстранява "субекта".

Определение на статистическа система:

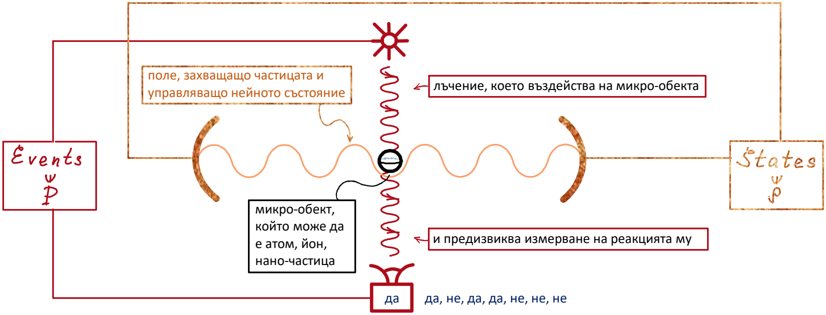
$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob).$$

Илюстративна схема:



На илюстративните схеми трябва да се гледа, като на чертежите в геометрията: от тях нищо не следва, но те помагат за по-доброто разбиране на теорията.

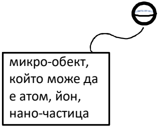
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



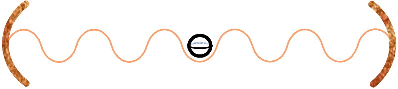
$$\mathrm{Prob}_\rho P = \lim_{N\to\infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

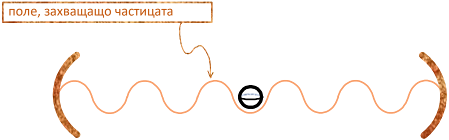
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



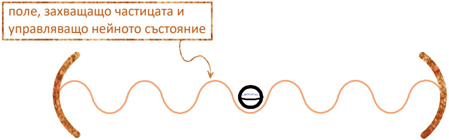
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



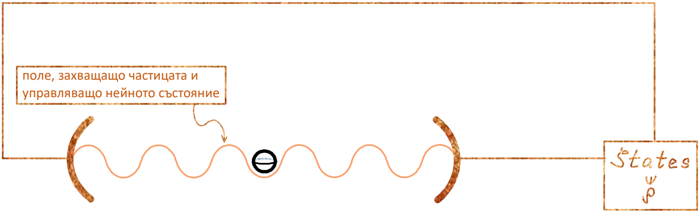
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



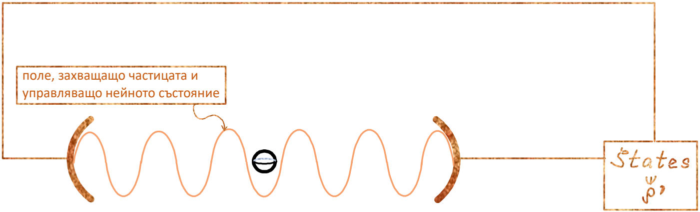
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



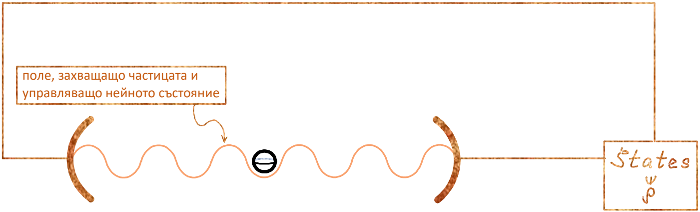
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



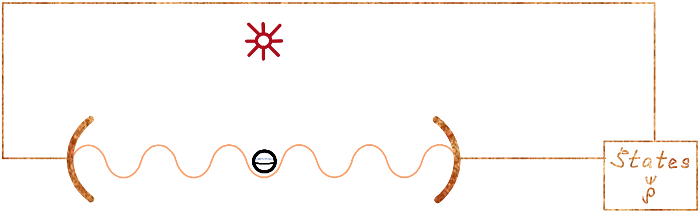
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



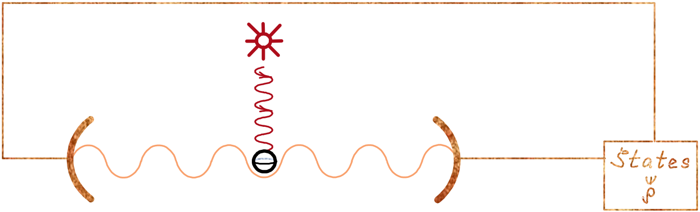
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



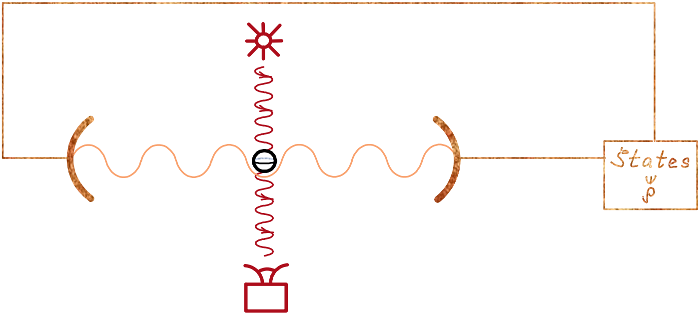
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

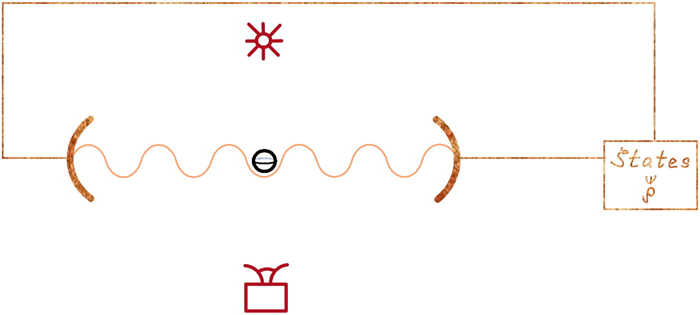
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

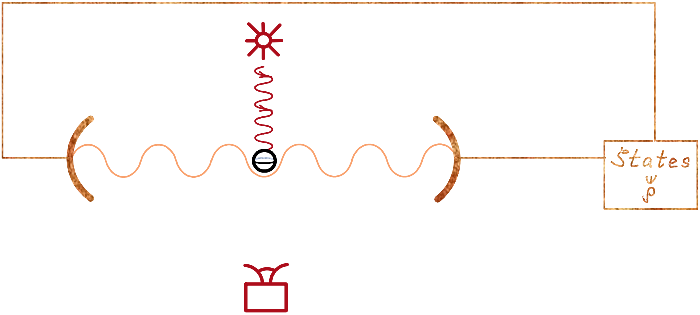
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



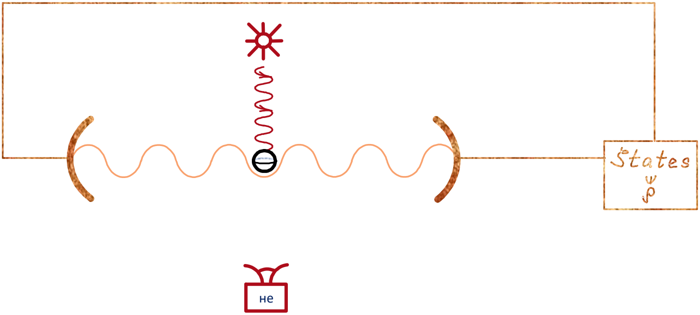
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



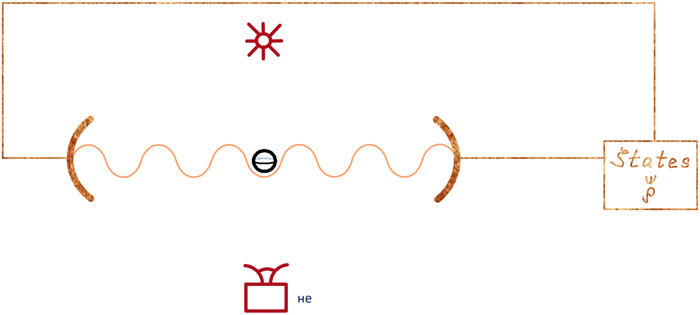
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



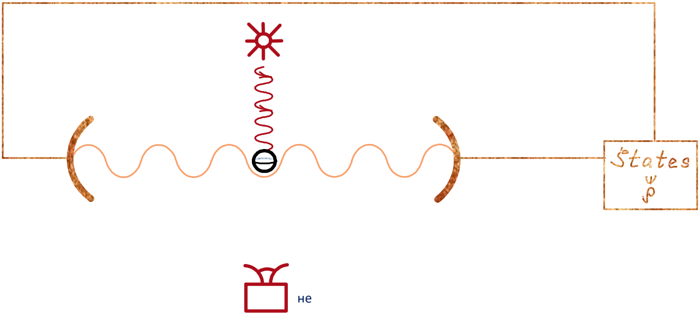
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



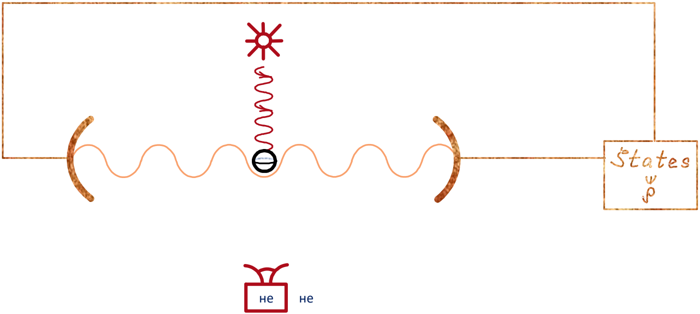
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



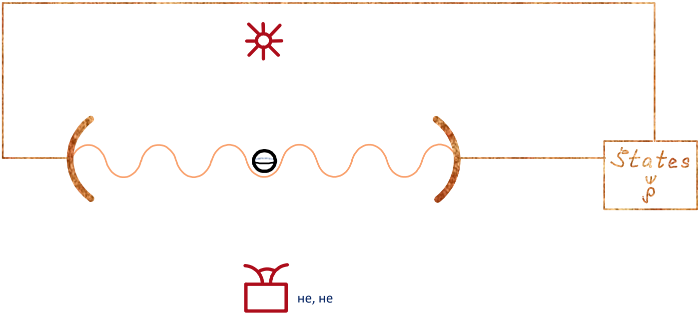
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



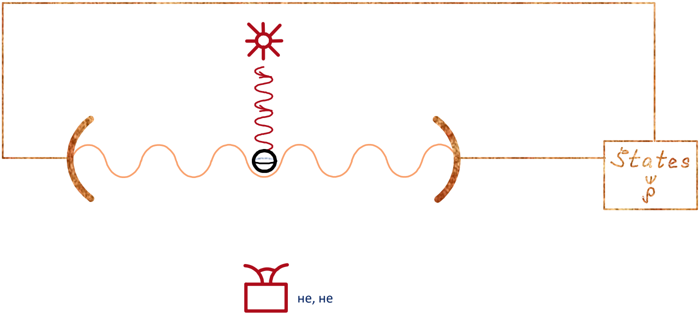
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



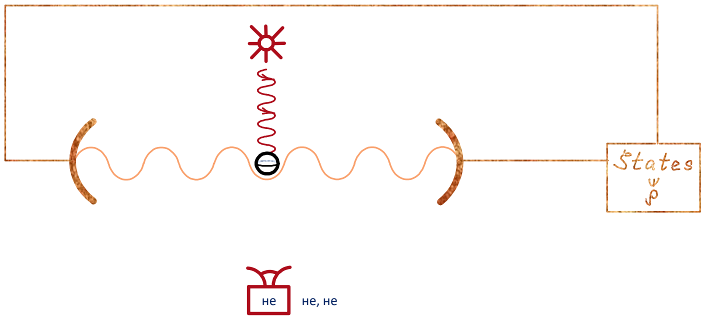
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



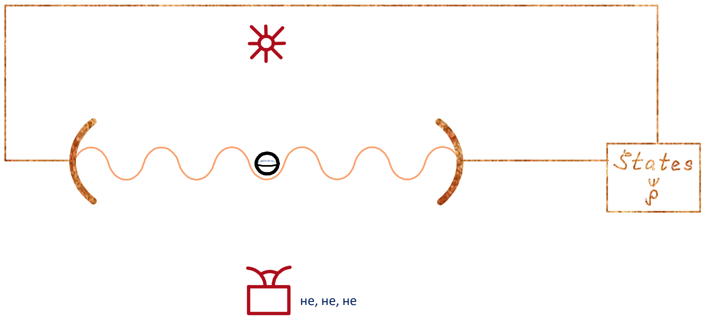
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



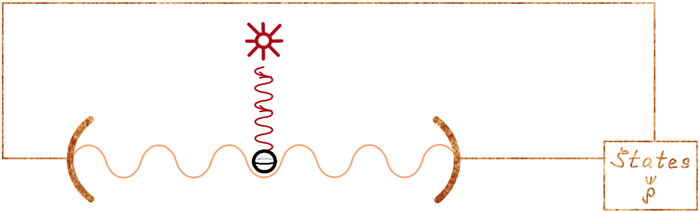
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



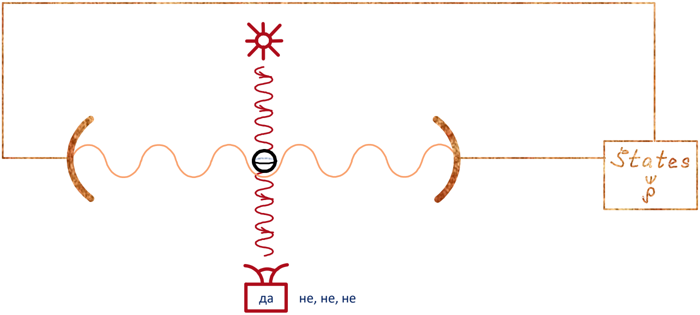
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



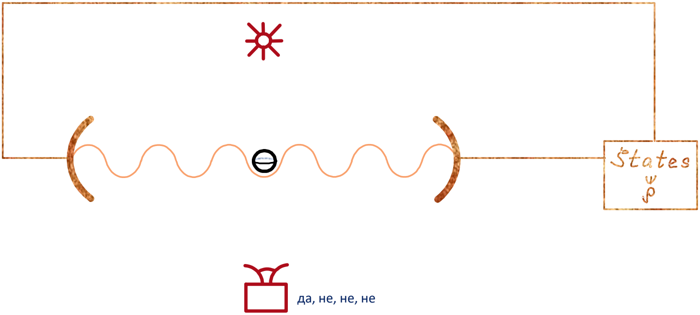
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



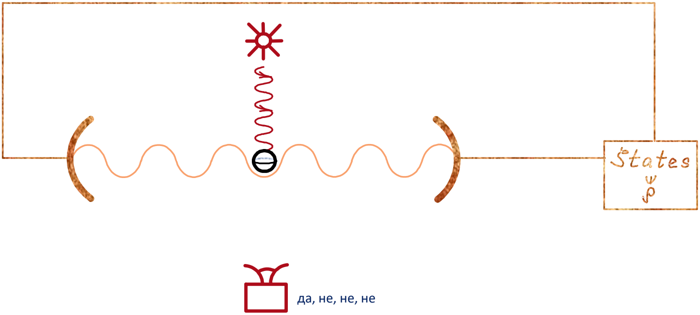
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



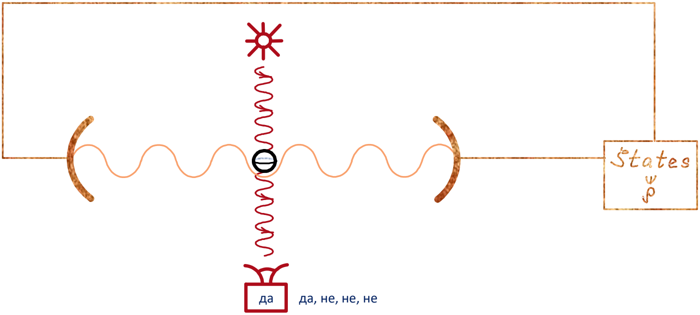
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



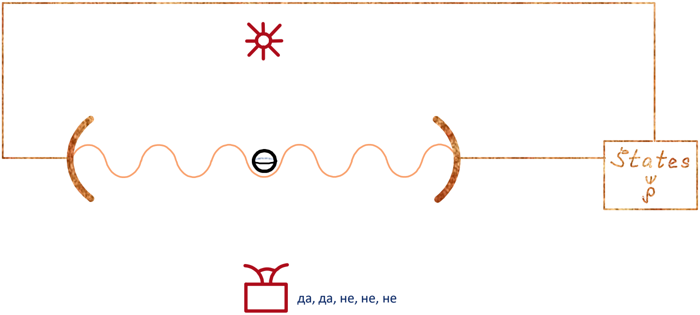
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



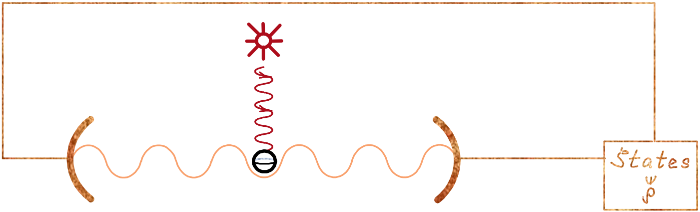
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

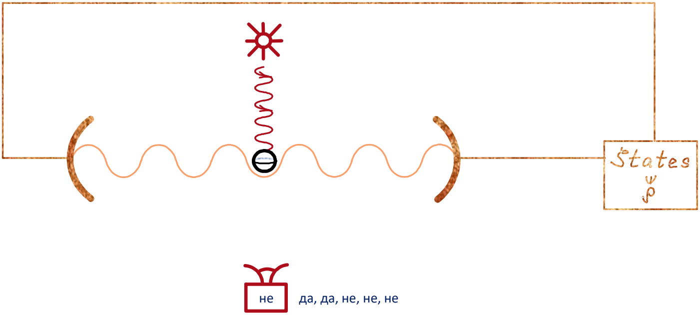


Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

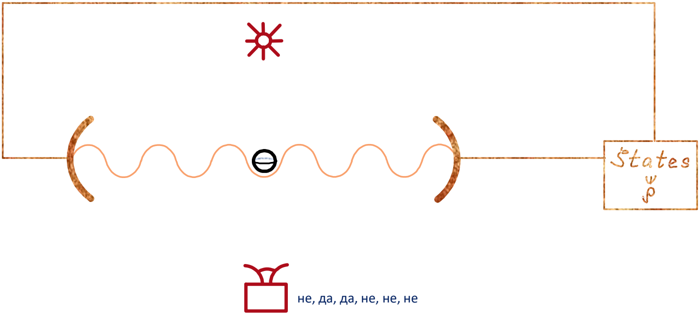


да, да, не, не, не

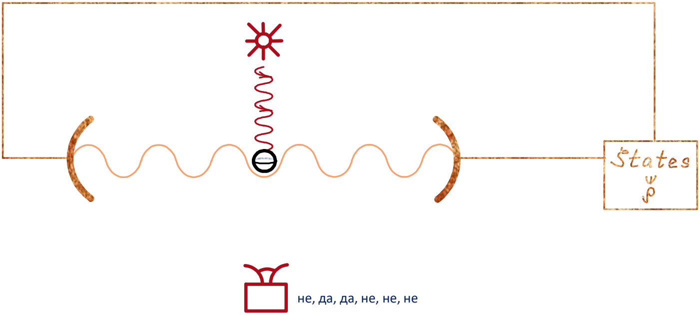
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



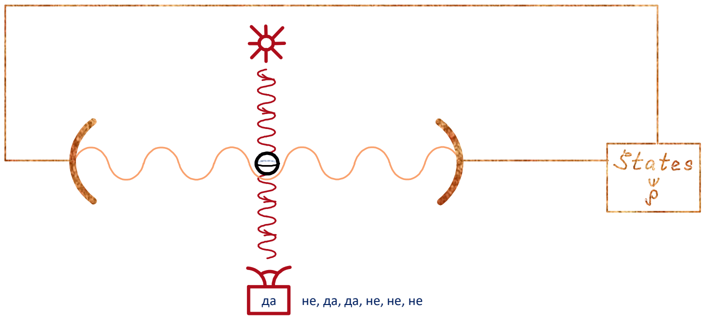
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



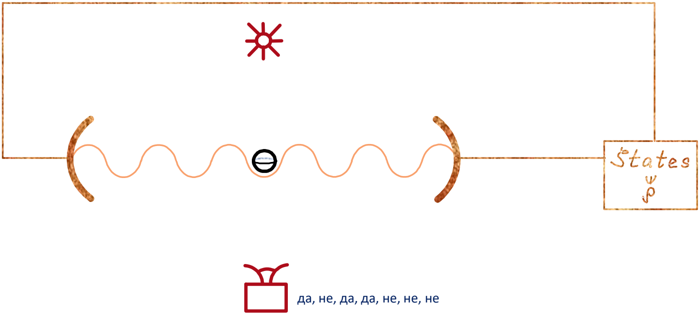
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



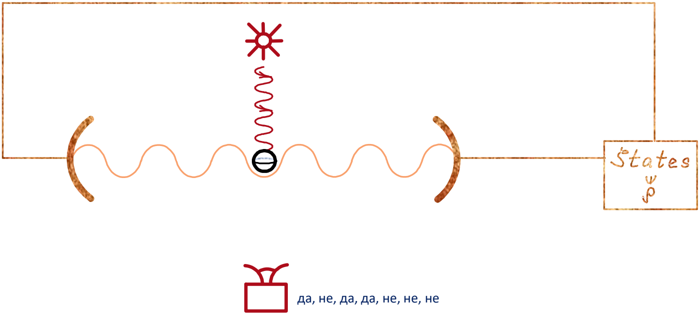
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



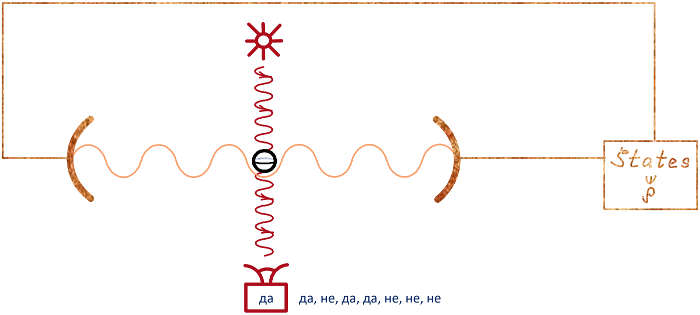
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



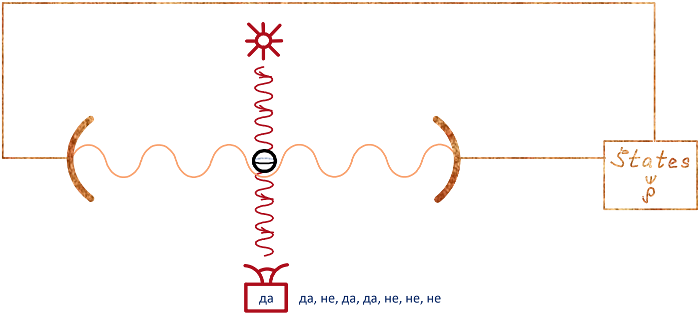
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

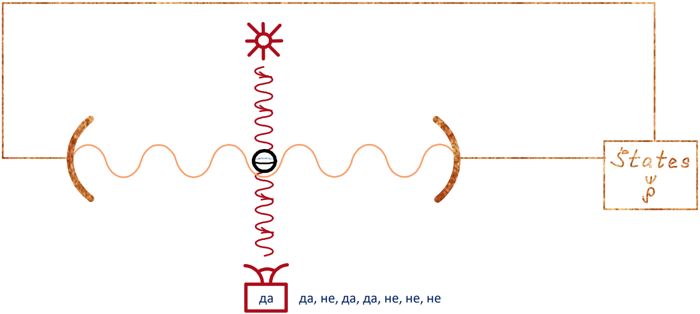


Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



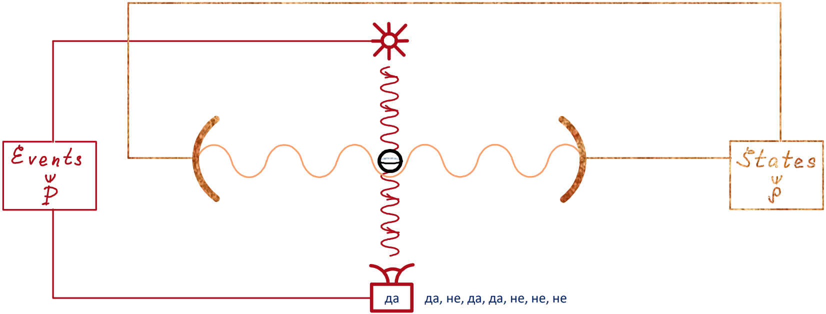
$$\lim_{N \to \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



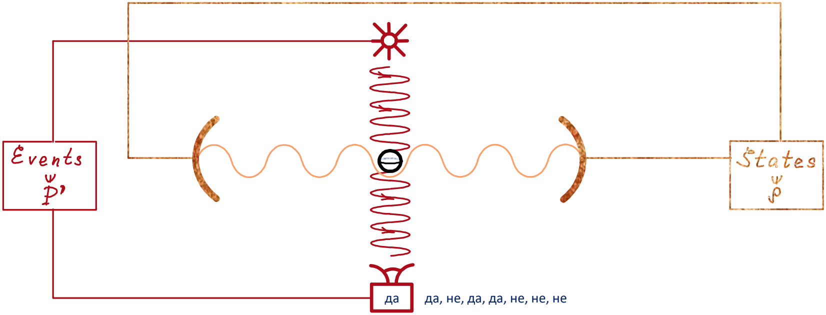
$$Prob_{\rho} P = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



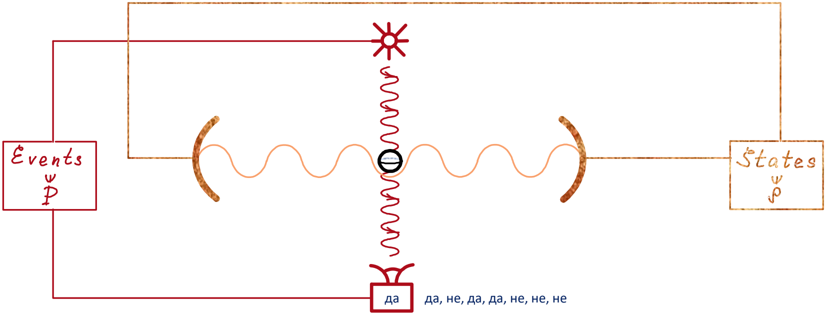
$$Prob_\rho P = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



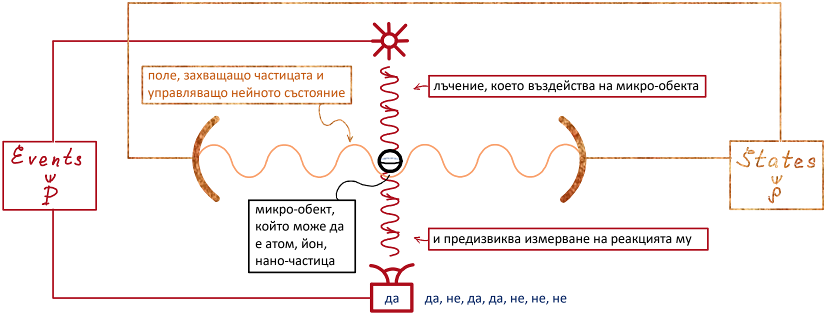
$$\mathrm{Prob}_{\rho} P' = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

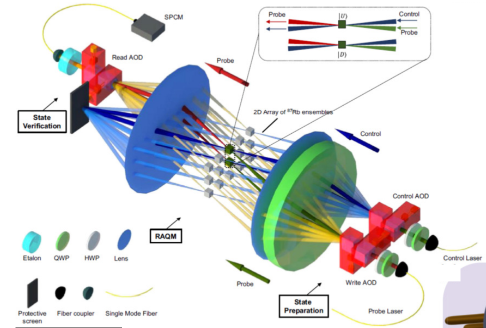


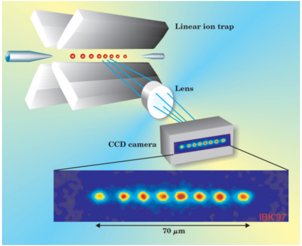
$$\mathrm{Prob}_\rho P = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

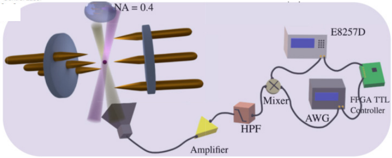
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

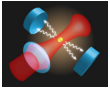


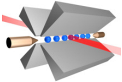
$$\mathrm{Prob}_\rho P = \lim_{N\to\infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

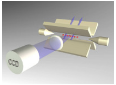

SPCM
Read AOD
Probe
Control
Probe
|U⟩
|D⟩
Probe
2D Array of ^{87}Rb ensembles
Control
State Verification
Control AOD
RAQM
Etalon
QWP
HWP
Lens
Control Laser
Probe
Write AOD
State Preparation
Probe Laser
Protective screen
Fiber coupler
Single Mode Fiber


Linear ion trap
Lens
CCD camera
IBK'97
70 μm

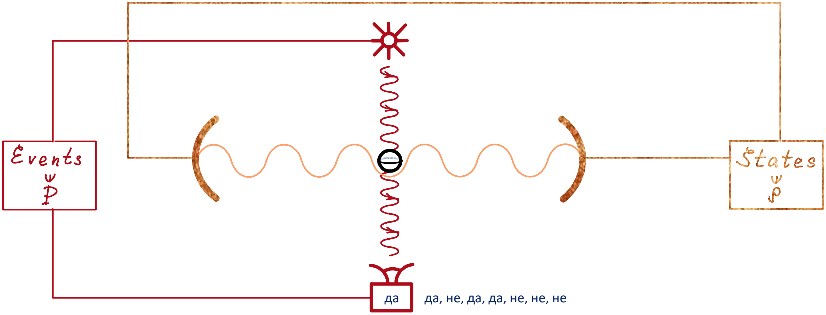

NA = 0.4
E8257D
Mixer
FPGA TTL Controller
AWG
HPF
Amplifier







Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



$$\mathrm{Prob}_\rho P = \lim_{N\to\infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

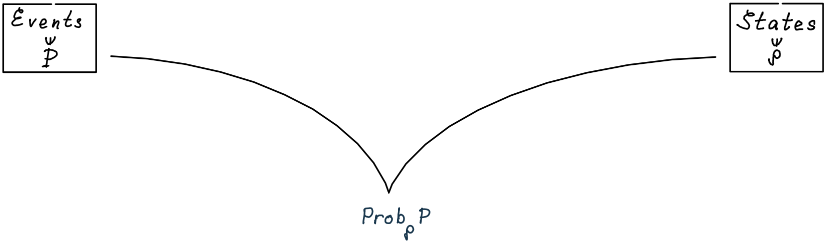
Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

$\boxed{\text{Events} \ni P}$

$\boxed{\text{States} \ni \rho}$

$\text{Prob}_\rho P$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка



Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\text{субект}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\text{субект}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\text{наблюдател}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{обект}}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\text{субект}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\text{наблюдател}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

представено от:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Events} & \qquad & \mathscr{States} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ Q & & \rho \end{array}$$

$$Prob_{\rho}(Q) =: \boxed{\begin{array}{l}\text{вероятност за регистриране} \\ \text{на събитието } Q \text{ в съст. } \rho\end{array}}$$

$$=: \rho(Q)$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\text{субект}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\text{наблюдател}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

представено от:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Events} & & \mathscr{States} \\ \Cup & & \Cup \\ Q & & \rho \end{array}$$

$$Prob_{\rho}(Q) =: \boxed{\text{вероятност за регистриране на събитието } Q \text{ в съст. } \rho}$$

$$=: \rho(Q)$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\text{субект}} \longleftrightarrow \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\text{наблюдател}} \longleftrightarrow \boxed{\text{обект}}$$

представено от:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Events} & & \mathscr{States} \\ \Cup & & \Cup \\ Q & & \rho \end{array}$$

$$Prob_{\rho}(Q) =: \boxed{\text{вероятност за регистриране на събитието } Q \text{ в съст. } \rho}$$

$$=: \rho(Q)$$

Регистрирането на събитие или още казано, установяване на свойство на обект, е "активен процес".

То е нещо като "обичане на дреха върху обекта", като резултата е "става" / "не става".

При следваща регистрация на събитие, се "облича нова дреха", което може да заличи старата.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\text{субект}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\text{наблюдател}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\xcancel{\text{субект}}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\xcancel{\text{наблюдател}}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

$$\uparrow$$

без да отстранява субекта / наблюдателя

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\cancel{\text{субект}}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\cancel{\text{наблюдател}}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{обект}}$$

без да отстранява субекта / наблюдателя

и да описва обектите “сами по себе си”

Квантовата теория описва отношението

$$\boxed{\cancel{\text{субект}}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

или, по-конкретно,

$$\boxed{\cancel{\text{наблюдател}}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{обект}}$$

без да отстранява субекта / наблюдателя

и да описва обектите "сами по себе си",

както се прави при класическото описание на природата.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$\boxed{\cancel{\text{субект}}} \longleftrightarrow \boxed{\text{обект}}$

или, по-конкретно,

$\boxed{\cancel{\text{наблюдател}}} \longleftrightarrow \boxed{\text{обект}}$

без да отстранява субекта / наблюдателя

и да описва обектите “сами по себе си”,

както се прави при класическото описание на природата.

Проблемът: може ли да опишем квантовия свят по класически път е т.нар. “проблем за скритите параметри (hidden variables)”.

Еквивалентно: може ли да симулираме квантовите феномени на класически компютър.

Отговор: да – това е една от целите на квантовата теория.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

~~субект~~ ⟷ обект

или, по-конкретно,

~~наблюдател~~ ⟷ обект

без да отстранява субекта / наблюдателя

и да описва обектите “сами по себе си”,

както се прави при класическото описание на природата.

Това, което по принцип не може да се постигне, е при една такава симулация да е в сила, че на отделните части на света (напр., на отделни хора) *винаги* ще отговарят отделни части от паметта на класическия компютър, който извършва симулацията.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

~~субект~~ $\longleftrightarrow$ обект

или, по-конкретно,

~~наблюдател~~ $\longleftrightarrow$ обект

$\uparrow$

без да отстранява субекта / наблюдателя

и да описва обектите “сами по себе си”,

както се прави при класическото описание на природата.

> Това следва от т.нар. теорема на Бел, която може да се изказва така: “ако има скрити параметри, то те не са локални”.
>
> Тази теорема е част от раздела по съставни системи.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Квантовата теория описва отношението

$\boxed{\cancel{\text{субект}}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{обект}}$

или, по-конкретно,

$\boxed{\cancel{\text{наблюдател}}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{обект}}$

$\uparrow$

без да отстранява субекта / наблюдателя

$\uparrow$

и да описва обектите “сами по себе си”,

както се прави при класическото описание на природата.

От друга страна, квантовото описание допуска локалност. Тя обаче идва преди всичко от наблюдателната страна.

Локалността е особено важна за т.нар. *квантова теория на полето* (Quantum Field Theory), която поради това също бива наричана “*локална квантова физика*” (Local Quantum Physics).

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.

Понятието експеримент, което ще въведем още в първия аксиоматичен раздел ще ни даде “влагания” на “класически картини” в “квантовия свят”.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.

Понятието експеримент, което ще въведем още в първия аксиоматичен раздел ще ни даде “влагания” на “класически картини” в “квантовия свят”.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.

Понятието експеримент, което ще въведем още в първия аксиоматичен раздел ще ни даде “влагания” на “класически картини” в “квантовия свят”.

При измерването състоянията в квантовия свят допълнително ще се трансформират в следствие на извличането на класическата картина.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.

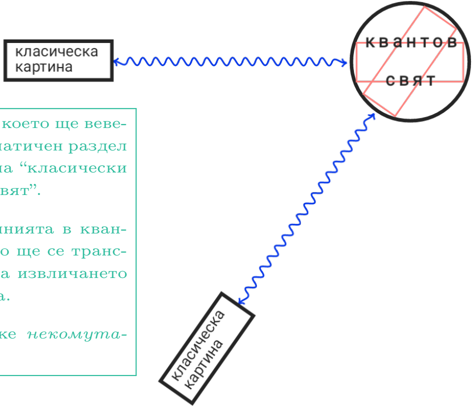
Понятието експеримент, което ще въведем още в първия аксиоматичен раздел ще ни даде “влагания” на “класически картини” в “квантовия свят”.

При измерването състоянията в квантовия свят допълнително ще се трансформират в следствие на извличането на класическата картина.

Този процес ще се окаже *некомутативен*.

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.



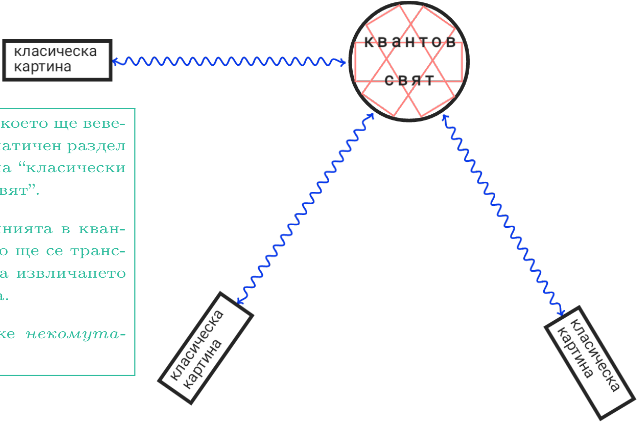
Понятието експеримент, което ще въведем още в първия аксиоматичен раздел ще ни даде “влагания” на “класически картини” в “квантовия свят”.

При измерването състоянията в квантовия свят допълнително ще се трансформират в следствие на извличането на класическата картина.

Този процес ще се окаже *некомутативен.*

Аксиоми на общи системи – илюстрация на началната постановка

Допълнителни сведения за взаимоотношението между “наблюдателя” и “обекта” ще ни даде постулата за измерване от третия аксиоматичен раздел за “квантовите трансформации”.



Понятието експеримент, което ще въведем още в първия аксиоматичен раздел ще ни даде “влагания” на “класически картини” в “квантовия свят”.

При измерването състоянията в квантовия свят допълнително ще се трансформират в следствие на извличането на класическата картина.

Този процес ще се окаже *некомутативен*.

Аксиомите до тук:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{Events} & & \mathscr{States} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
Q & & \rho \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& Prob_{\rho}(Q) =: & \boxed{\text{вероятност за регистриране на събитието } Q \text{ в съст. } \rho}
\end{array}$$

Аксиомите до тук:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Events} & & \mathscr{States} \\
Q \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dr] & & \rho \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dl] \\
& Prob_{\rho}(Q) =: \boxed{\text{вероятност за регистриране на събитието } Q \text{ в съст. } \rho} &
\end{tikzcd}$$

- Квантова система се задава от: $(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$.

Еднаквост (еквивалентност / изоморфност) на статистически системи

,

Еднаквост (еквивалентност / изоморфност) на статистически системи:

$$\left(\mathcal{Events}_1, \mathcal{States}_1, Prob_1 : \mathcal{Events}_1 \times \mathcal{States}_1 \to [0,1]\right),$$
$$\left(\mathcal{Events}_2, \mathcal{States}_2, Prob_2 : \mathcal{Events}_2 \times \mathcal{States}_2 \to [0,1]\right).$$

,

Еднаквост (еквивалентност / изоморфност) на статистически системи:

$$\left(\mathscr{Events}_1, \mathscr{States}_1, Prob_1 : \mathscr{Events}_1 \times \mathscr{States}_1 \to [0,1]\right),$$
$$\left(\mathscr{Events}_2, \mathscr{States}_2, Prob_2 : \mathscr{Events}_2 \times \mathscr{States}_2 \to [0,1]\right).$$

Наричат се **еквивалентни** (**изоморфни**), ако са зададени биекции

$$F : \mathscr{Events}_1 \cong \mathscr{Events}_2 ,$$
$$G : \mathscr{States}_1 \cong \mathscr{States}_2 ,$$

Еднаквост (еквивалентност / изоморфност) на статистически системи:

$\left(\mathscr{Events}_1, \mathscr{States}_1, \mathit{Prob}_{\mathit{1}} : \mathscr{Events}_{\mathit{1}} \times \mathscr{States}_{\mathit{1}} \to [\mathit{0}, \mathit{1}]\right)$,

$\left(\mathscr{Events}_2, \mathscr{States}_2, \mathit{Prob}_{\mathit{2}} : \mathscr{Events}_{\mathit{2}} \times \mathscr{States}_{\mathit{2}} \to [\mathit{0}, \mathit{1}]\right)$.

Наричат се **еквивалентни** (**изоморфни**), ако са зададени биекции

$$F : \mathscr{Events}_1 \cong \mathscr{Events}_2 \,,$$
$$G : \mathscr{States}_1 \cong \mathscr{States}_2 \,,$$

такива че

$$\mathit{Prob}_{G(\rho)}(F(Q)) \;=\; \mathit{Prob}_{\rho}(Q) \;,$$

за всеки $Q \in \mathscr{Events}_1$ и $\rho \in \mathscr{States}_1$.

Значение на аксиомата за еднаквост на статистически системи: *пълното описание на системата трябва да следва единствено от информацията, съдържаща се в задаването на тройката*

$$\big(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, \mathit{Prob} : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} \to [0, 1]\big)\,.$$

Аксиоми за отделимост.

Аксиоми за отделимост. Нека е зададена статистическа система

$$\left(\boldsymbol{\mathscr{Events}}, \boldsymbol{\mathscr{States}}, \mathit{Prob} : \boldsymbol{\mathscr{Events}} \times \boldsymbol{\mathscr{States}} \to [0, 1]\right).$$

Аксиоми за отделимост. Нека е зададена статистическа система

$$\left(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} \to [0, 1]\right).$$

- За всеки две състояния ρ, $\sigma \in \mathscr{States}$,
  ако $Prob_\rho(Q) = Prob_\sigma(Q)$ при всяко събитие $Q \in \mathscr{Events}$,
  то $\rho = \sigma$.

Аксиоми за отделимост. Нека е зададена статистическа система

$$\left(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, \mathit{Prob} : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} \to [0, 1]\right).$$

- За всеки две състояния $\rho, \sigma \in \mathscr{States}$,
  ако $\mathit{Prob}_\rho(Q) = \mathit{Prob}_\sigma(Q)$ при всяко събитие $Q \in \mathscr{Events}$,
  то $\rho = \sigma$.
- За всеки две събития $P, Q \in \mathscr{Events}$,
  ако $\mathit{Prob}_\rho(P) = \mathit{Prob}_\rho(Q)$ при всяко състояние $\rho \in \mathscr{States}$,
  то $P = Q$.

Аксиоми за отделимост. Нека е зададена статистическа система

$$\left(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, \mathit{Prob} : \mathscr{Events} \times \mathscr{States} \to [0,1]\right).$$

- За всеки две състояния ρ, $\sigma \in \mathscr{States}$, ако $\mathit{Prob}_\rho(Q) = \mathit{Prob}_\sigma(Q)$ при всяко събитие $Q \in \mathscr{Events}$, то $\rho = \sigma$.
- За всеки две събития $P, Q \in \mathscr{Events}$, ако $\mathit{Prob}_\rho(P) = \mathit{Prob}_\rho(Q)$ при всяко състояние $\rho \in \mathscr{States}$, то $P = Q$.

Съгласно първата от горните аксиоми ние отъждествяваме две състояния, ако при всеки експеримент те водят до еднакви наблюдателни резултати. Втората аксиома привежда същия принцип спрямо събитията.

Първо следствие

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

От първата от аксиомите за отделимост следва, че ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* $\mathscr{Events}$.

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

От първата от аксиомите за отделимост следва, че ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* $\mathscr{E}\mathit{vents}$.

Припомняме, че според първата от аксиомите ние отъждествяваме две състояния, ако за всяко събитие P те дават еднаква вероятност $Prob_{\rho}(P)$.

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

От първата от аксиомите за отделимост следва, че ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* $\boldsymbol{\mathscr{E}vents}$.

За едно състояние $\rho \in \boldsymbol{\mathscr{S}tates}$ ще пишем $\boxed{\rho(Q) := Prob_{\rho}(Q)}$

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

От първата от аксиомите за отделимост следва, че ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* $\boldsymbol{\mathcal{Events}}$.

За едно състояние $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{States}}$ ще пишем $\boxed{\rho(Q) \ := \ Prob_{\rho}(Q)}$

Така, ρ става функция $\boxed{\rho : \boldsymbol{\mathcal{Events}} \to [0,1] : Q \mapsto \rho(Q)}$

Първо следствие: състоянията като функции на събитията

От първата от аксиомите за отделимост следва, че ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* $\boldsymbol{\mathcal{Events}}$.

За едно състояние $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{States}}$ ще пишем $\boxed{\rho(Q) \ := \ Prob_{\rho}(Q)}$

Така, ρ става функция $\boxed{\rho : \boldsymbol{\mathcal{Events}} \to [0,1] : Q \mapsto \rho(Q)}$

Нека подчертаем обаче, че далеч не всяка функция $\boldsymbol{\mathcal{Events}} \to [0,1]$ идва от състояние.

Смесване на състояния

Аксиома за смесване на състояния.

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

и произволни нейни състояния ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0, 1], \quad q_1 + q_2 = 1$$

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

и произволни нейни състояния ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathscr{States}$, такова че

$$Prob_{\rho}(P) = q_1\, Prob_{\rho_1}(P) + q_2\, Prob_{\rho_2}(P) ,$$

за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$.

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

и произволни нейни състояния ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathscr{States}$, такова че

$$Prob_\rho(P) = q_1\, Prob_{\rho_1}(P) + q_2\, Prob_{\rho_2}(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$.

От първата аксиома за отделимост следва, че горното ρ е **единствено**.

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

и произволни нейни състояния ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathscr{States}$, такова че

$$Prob_\rho(P) = q_1\, Prob_{\rho_1}(P) + q_2\, Prob_{\rho_2}(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$.

От първата аксиома за отделимост следва, че горното ρ е единствено.

Припомняме, че според първата от аксиомите ние отъждествяваме две състояния, ако за всяко събитие P те дават еднаква вероятност $Prob_\rho(P)$.

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

и произволни нейни състояния $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathscr{States}$, такова че

$$Prob_{\rho}(P) = q_1\, Prob_{\rho_1}(P) + q_2\, Prob_{\rho_2}(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$.

От първата аксиома за отделимост следва, че горното ρ е единствено.

Състоянието ρ се нарича **смес на ρ_1 и ρ_2 с тегла q_1 и q_2**.

Аксиома за смесване на състояния. За една статистическа система

$$(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$$

и произволни нейни състояния $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathscr{States}$, такова че

$$Prob_\rho(P) = q_1\, Prob_{\rho_1}(P) + q_2\, Prob_{\rho_2}(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$.

От първата аксиома за отделимост следва, че горното ρ е единствено.

Състоянието ρ се нарича **смес на** ρ_1 **и** ρ_2 **с тегла** q_1 **и** q_2.

Еквивалентно условие: $\rho(P) = q_1\, \rho_1(P) + q_2\, \rho_2(P)$.

Аксиома за смесване на състояния:

За една статистическа система $(\mathcal{Events}, \mathcal{States}, Prob)$

и произволни нейни състояния $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathcal{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0,1], \quad q_1 + q_2 = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathcal{States}$, такова че

$$\rho(P) = q_1\, \rho_1(P) + q_2\, \rho_2(P),$$

за всяко събитие $P \in \mathcal{Events}$.

Състоянието ρ се нарича **смес на** $\rho_1,\ \rho_2$ **с тегла** $q_1,\ q_2$.

Аксиома за смесване на състояния – след итерация:

За една статистическа система $(\mathscr{Events}, \mathscr{States}, Prob)$

и произволни нейни състояния $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathscr{States}$ и числа

$$q_1, \ldots, q_n \in [0, 1], \quad q_1 + \cdots + q_n = 1,$$

съществува състояние $\rho \in \mathscr{States}$, такова че

$$\rho(P) = q_1\, \rho_1(P) + \cdots + q_n\, \rho_n(P),$$

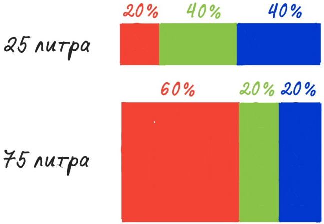
за всяко събитие $P \in \mathscr{Events}$.

Състоянието ρ се нарича **смес на** $\rho_1, \ldots, \rho_n$ **с тегла** $q_1, \ldots, q_n$.

Илюстрация: смес на бои

Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Илюстрация: смес на бои

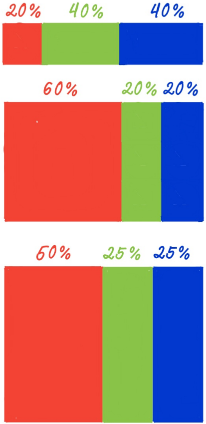


Аксиоми на общи системи – смесване на състояния

Илюстрация: смес на бои

25 литра

75 литра



$$
\begin{array}{r}
+\begin{cases} 0.25 \times \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \\ 0.75 \times \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \end{cases} \\
\hline
\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)
\end{array}
$$

Чисти и смесени състояния

Чисти и смесени състояния:

Чисто състояние е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*.

Чисти и смесени състояния:

Чисто състояние е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*.

Подробно, състоянието ρ е чисто

$\Longleftrightarrow$ за всяко представяне на ρ в смес $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е в сила, че или $q_1 = 1$ $(\Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_1)$, или $q_2 = 1$ $(\Leftrightarrow q_1 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_2)$

Чисти и смесени състояния:

Чисто състояние е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*.

Подробно, състоянието ρ е чисто

$\iff$ за всяко представяне на ρ в смес $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е в сила, че или $q_1 = 1$ $(\Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_1)$, или $q_2 = 1$ $(\Leftrightarrow q_1 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_2)$

(последните именно казваме, че отговарят на тривиални смеси).

Чисти и смесени състояния:

Чисто състояние е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*.

Подробно, състоянието ρ е чисто

$\Longleftrightarrow$ за всяко представяне на ρ в смес $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е в сила, че
или $q_1 = 1$ $(\Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_1)$, или $q_2 = 1$ $(\Leftrightarrow q_1 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_2)$

(последните именно казваме, че отговарят на тривиални смеси).

Смесено състояние = не чисто състояние.

Чисти и смесени състояния:

Чисто състояние е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*.

Подробно, състоянието ρ е чисто

$\Longleftrightarrow$ за всяко представяне на ρ в смес $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е в сила, че
или $q_1 = 1$ $(\Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_1)$, или $q_2 = 1$ $(\Leftrightarrow q_1 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_2)$

(последните именно казваме, че отговарят на тривиални смеси).

Смесено състояние = не чисто състояние.

И така, чистите състояния съответстват на най-прецизно приготвените състояния. Логично е да се очаква, че при тях вероятностите на всички събития биха били 1 или 0. Оказва се обаче, че това е така само за т.нар. "класически системи". За обща квантова система се оказва, че дори и в чисто състояние определени събития могат да настъпват с вероятност отлична от 1 или 0. Това е именно точния израз на неотстранимия индетерминизъм на квантовата теория, за който споменахме в увода.

Чисти и смесени състояния

Терминология от квантовата физика:

Когато една система е в чисто състояние се казва, че имаме "**кохерентност**" ("**coherence**").

Чисти и смесени състояния

Терминология от квантовата физика:

Когато една система е в чисто състояние се казва, че имаме "**кохерентност**" ("**coherence**").

Когато системата премине по някаква причина от чисто в смесено състояние се казва, че гибим "**кохерентноста**". Този процес се нарича "**декохерентност**" ("**decoherence**" = "загуба на чистота").

Чисти и смесени състояния

Терминология от квантовата физика:

Когато една система е в чисто състояние се казва, че имаме “**кохерентност**” (“**coherence**”).

Когато системата премине по някаква причина от чисто в смесено състояние се казва, че гибим “**кохерентноста**”. Този процес се нарича “**декохерентност**” (“**decoherence**” = “загуба на чистота”).

Една от стандартните причини за загуба на чистотата (декохерентността) е сплитането с околната среда. Това ще изучим като едно приложение на втория аксиомитичен раздел за съставни системи. Борбата за кохерентост се състои в добрата изолация от околната среда.

Преговор от теория на вероятностите

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство – включва:

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство – включва:

- $$\begin{aligned} \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} &= \textit{множество на елементарните състояния} \\ &\equiv \textit{множество на елементарните “събития”}. \end{aligned}$$

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство – включва:

- $$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} = \textit{множество на елементарните състояния}$$
  $$\equiv \textit{множество на елементарните “събития”}.$$

- Зададени са *вероятности*:
  $$\begin{array}{c} \Omega = \{\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n\} \\ \quad\ \ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ \quad p_1,\ \ldots,\ p_n \\ = p_1(\omega_1)\ ,\ \ \ldots,\ = p(\omega_n)\ . \end{array}$$

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство – включва:

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ = *множество на елементарните състояния*
  $\equiv$ *множество на елементарните "събития"*.
- Зададени са *вероятности*:

$$\begin{array}{c} \Omega = \{\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n\} \\ \quad\;\; \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ \quad\; p_1,\ \ldots,\ p_n \\ = p_1(\omega_1)\,,\ \ldots,\ = p(\omega_n)\,. \end{array}$$

Тоест, $\quad p_j \in [0,\, 1]\,, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\equiv \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\right) = 1$

Преговор от теория на вероятностите

Крайно вероятностно пространство – включва:

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ = *множество на елементарните състояния* ≡ *множество на елементарните "събития"*.

- Зададени са *вероятности*:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega = \{ & \omega_1, & \ldots, & \omega_n & \} \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & p_1, & \ldots, & p_n & \\ & = p_1(\omega_1)\,, & \ldots, & = p(\omega_n)\,. & \end{array}$$

Тоест, $p_j \in [0,\,1]\,,\quad \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(\equiv \sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega)\right) = 1$

– $(p_1, \ldots, p_n)$ е **вероятностно разпределение**.

В крайно вероятностно пространство Ω:

В крайно вероятностно пространство Ω:

- за подмножествата $S \subseteq \Omega$: $p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]$

  – *вероятност за събитието* S

В крайно вероятностно пространство Ω:

- за подмножествата $S \subseteq \Omega$: $p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]$
  – *вероятност за събитието* S
- Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:

В крайно вероятностно пространство Ω:

- за подмножествата $S \subseteq \Omega$: $p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]$

  – *вероятност за събитието* S

- Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:

  (p_1) адитивност $S = S_1 \overset{\bullet}{\cup} S_2 \quad \Rightarrow \quad p(S) = p(S_1) + p(S_2)$,

  където $S = S_1 \overset{\bullet}{\cup} S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S = S_1 \cup S_2$ и $\emptyset = S_1 \cap S_2$

  и се нарича *дизюнктивно обединение*;

В крайно вероятностно пространство Ω:

- за подмножествата $S \subseteq \Omega$: $p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]$ – *вероятност за събитието* S
- Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:

(p_1) адитивност $S = S_1 \mathbin{\dot\cup} S_2 \quad \Rightarrow \quad p(S) = p(S_1) + p(S_2)\,,$
където $S = S_1 \mathbin{\dot\cup} S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S = S_1 \cup S_2$ и $\emptyset = S_1 \cap S_2$
и се нарича *дизюнктивно обединение*;

(p_2) монотонност $S_1 \subseteq S \quad \Rightarrow \quad p(S_1) \leqslant p(S)\,;$

В крайно вероятностно пространство Ω:

- за подмножествата $S \subseteq \Omega$: $p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]$

  – *вероятност за събитието* S

- Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:

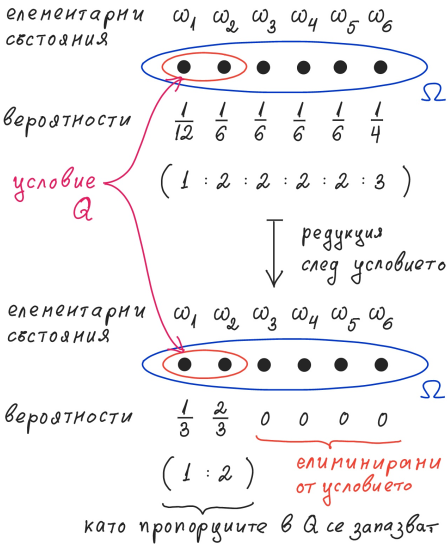
  (p_1) адитивност $S = S_1 \mathbin{\dot\cup} S_2 \quad \Rightarrow \quad p(S) = p(S_1) + p(S_2)\,,$
  където $S = S_1 \mathbin{\dot\cup} S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S = S_1 \cup S_2$ и $\emptyset = S_1 \cap S_2$
  и се нарича *дизюнктивно обединение*;

  (p_2) монотонност $S_1 \subseteq S \quad \Rightarrow \quad p(S_1) \leqslant p(S)\,;$

  (p_3) нормировка $p(\emptyset) = 0\,, \quad p(\Omega) = 1\,.$

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \mid Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)


елементарни състояния
ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6
Ω
вероятности
$\frac{1}{12}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$
$(1 : 2 : 2 : 2 : 2 : 3)$
условие Q
редукция след условието
елементарни състояния
ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6
Ω
вероятности
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 0 0 0 0
$(1 : 2)$
елиминирани от условието
като пропорциите в Q се запазват

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \mid Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \,|\, Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- Забележете: $p'(\omega_k) := p(\omega_k | Q)$ $(k = 1, \ldots, n)$ отново е вероятностно разпределение.

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \,|\, Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- <u>Забележете</u>: $p'(\omega_k) := p(\omega_k | Q)$ $(k = 1, \ldots, n)$ отново е вероятностно разпределение. Действително:

$$\sum_{k=1}^{n} p(\omega_k \,|\, Q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(\{\omega_k\} \cap Q)}{p(Q)} = \frac{1}{p(Q)} \sum_{k=1}^{n} p\big(\{\omega_k\} \cap Q\big)$$

$$= \frac{1}{p(Q)}\, p\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \big(\{\omega_k\} \cap Q\big)\Big) = \frac{1}{p(Q)}\, p\Bigg(\underbrace{\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \{\omega_k\}\Big)}_{\Omega} \cap Q\Bigg) = 1.$$

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \,|\, Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- Събитията S, $Q \subseteq \Omega$ се наричат **независими събития**, ако $p(S \,|\, Q) = p(S)$.

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \,\big|\, Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- Събитията S, $Q \subseteq \Omega$ се наричат **независими събития**, ако $p(S \,|\, Q) = p(S)$. Така, S и Q са независими

$$\iff \quad p(Q \,|\, S) = p(Q)$$

$$\iff \quad p(S \cap Q) = p(S)\, p(Q)$$

В крайно вероятностно пространство Ω:

- **Условната вероятност**: $p(S \,|\, Q) := \dfrac{p(S \cap Q)}{p(Q)}$ (ф-ла на *Бейс*)
- Събитията S, $Q \subseteq \Omega$ се наричат **независими събития**, ако $p(S \,|\, Q) = p(S)$. Така, S и Q са независими

$$\iff \quad p(Q \,|\, S) = p(Q)$$
$$\iff \quad p(S \cap Q) = p(S)\, p(Q)$$

и в частност, релацията независимост е симетрична.

(но не и рефлексивна или транзитивна)

Вероятностна смес

Вероятностна смес: пример

75 зарчета от вид 1:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
●	●	●	●	●	●
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

25 зарчета от вид 2:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
●	●	●	●	●	●
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Вероятностна смес: пример

75 зарчета от вид 1:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

25 зарчета от вид 2:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$+\begin{cases} 0.75 \times \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \\ 0.25 \times \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\overline{\left(\frac{7}{48}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{16}\right)}$$

Вероятностна смес: обща постановка

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме, че експеримент с елементарни събития $\widetilde{\omega}_k := \{\omega_k\}$, за $k = 1, \ldots, n$,

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме, че експеримент с елементарни събития $\widetilde{\omega}_k := \{\omega_k\}$, за $k = 1, \ldots, n$, има по-фино описание, при което всяко $\widetilde{\omega}_k$ престава да бъде елементарно и се реализира при две взаимно допълнителни се ситуации A_1, A_2: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (невъзможно събитие),

$A_1 \cup A_2 =$ винаги изпълненото събитие.

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме, че експеримент с елементарни събития $\widetilde{\omega}_k := \{\omega_k\}$, за $k = 1, \ldots, n$, има по-фино описание, при което всяко $\widetilde{\omega}_k$ престава да бъде елементарно и се реализира при две взаимно допълнителни се ситуации A_1, A_2:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ (невъзможно събитие)},$$
$$A_1 \cup A_2 = \text{винаги изпълненото събитие.}$$

Тогава: $\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$ като

$$(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset\,.$$

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме: $\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$ като

$$(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset\,.$$

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме: $\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$ като

$$(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset\,.$$

Следователно,

$$p(\omega_k) \;=\; p(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) \;=\; p(A_1)\, p(\omega_k \mid A_1) + p(A_2)\, p(\omega_k \mid A_2).$$

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме: $\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$ като $(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset\,.$

Следователно,

$$p(\omega_k) \;=\; p(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) \;=\; p(A_1)\, p(\omega_k \,|\, A_1) + p(A_2)\, p(\omega_k \,|\, A_2).$$

Нека положим:

$$p'(\omega_k) := p(\omega_k \,|\, A_1)\,, \quad q_1 := p(A_1)\,,$$
$$p''(\omega_k) := p(\omega_k \,|\, A_2)\,, \quad q_2 := p(A_2) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме: $\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$ като
$$(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset\,.$$

Следователно,
$$p(\omega_k) \;=\; p(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) \;=\; p(A_1)\,p(\omega_k \,|\, A_1) + p(A_2)\,p(\omega_k \,|\, A_2).$$

Нека положим:
$$p'(\omega_k) := p(\omega_k \,|\, A_1)\,, \quad q_1 := p(A_1)\,,$$
$$p''(\omega_k) := p(\omega_k \,|\, A_2)\,, \quad q_2 := p(A_2) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Тогава полученият резултат се записва като:
$$p(\omega_k) = q_1 \cdot p'(\omega_k) + q_2 \cdot p''(\omega_k) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Вероятностна смес: обща постановка

Допускаме: $\widetilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \widetilde{\omega}_k = (A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k)\,,$ като

$$(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) = \emptyset\,.$$

Следователно,

$$p(\omega_k) \;=\; p(A_1 \cap \widetilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \widetilde{\omega}_k) \;=\; p(A_1)\, p(\omega_k \,|\, A_1) + p(A_2)\, p(\omega_k \,|\, A_2).$$

Нека положим:
$$p'(\omega_k) := p(\omega_k \,|\, A_1)\,, \quad q_1 := p(A_1)\,,$$
$$p''(\omega_k) := p(\omega_k \,|\, A_2)\,, \quad q_2 := p(A_2) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Тогава полученият резултат се записва като:

$$p(\omega_k) = q_1 \cdot p'(\omega_k) + q_2 \cdot p''(\omega_k) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

където $(p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n))$, $(p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))$ и $(q_1,\, q_1)$ са вероятностни разпределения.

Вероятностна смес: обща постановка

Полученото вероятностно разпределение $(p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n))$ се нарича **смес** на $(p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n))$ и $(p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))$ с тегла q_1 и q_2.

Вероятностна смес: обща постановка

Полученото вероятностно разпределение $(p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n))$ се нарича **смес** на $(p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n))$ и $(p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))$ с тегла q_1 и q_2.

То се дава по формулата

$$(p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n)) = q_1 \cdot (p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n)) + q_2 \cdot (p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n)).$$

Вероятностна смес: обща постановка

Полученото вероятностно разпределение $(p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n))$ се нарича **смес** на $(p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n))$ и $(p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n))$ с тегла q_1 и q_2.

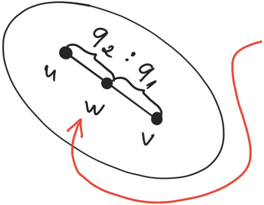
То се дава по формулата

$$(p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n)) = q_1 \cdot (p'(\omega_1), \ldots, p'(\omega_n)) + q_2 \cdot (p''(\omega_1), \ldots, p''(\omega_n)) .$$

Упражнение. За всяко събитие $S \subseteq \Omega$ е в сила равенството:

$$p(S) = q_1 \, p'(S) + q_2 \, p''(S) .$$

Геометрия на множеството на състоянията



w се нарича
изпъкнала комбинация
на u и v с тегла q_1, q_2

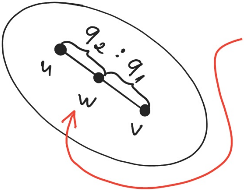
Геометрия на множеството на състоянията

Следователно:

Геометрия на множеството на състоянията

Следователно: • $\mathscr{States}$ е изпъкнало множество

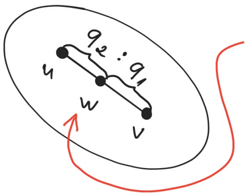
Геометрия на множеството на състоянията



w се нарича изпъкнала комбинация на u и v с тегла q_1, q_2

Следователно: • $\mathscr{States}$ е изпъкнало множество в линейното пространство $\{f \mid f : \mathscr{Events} \to \mathbb{R}\}$.

Геометрия на множеството на състоянията

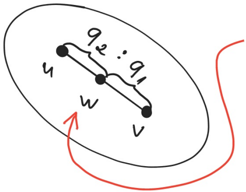


w се нарича
изпъкнала комбинация
на u и v с тегла q_1, q_2

Следователно:

- $\mathscr{States}$ е изпъкнало множество в линейното пространство $\{f \mid f : \mathscr{Events} \to \mathbb{R}\}$.
- Смес $\Leftrightarrow$ **изпъкнала комбинация**

Геометрия на множеството на състоянията

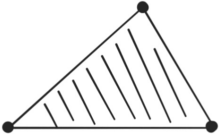


w се нарича изпъкнала комбинация на u и v с тегла q_1, q_2

Следователно:

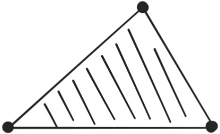
- $\mathscr{S}tates$ е изпъкнало множество в линейното пространство $\{f \,|\, f : \mathscr{E}vents \to \mathbb{R}\}$.
- Смес $\Leftrightarrow$ **изпъкнала комбинация**
- Чисто състояние $\Leftrightarrow$ **екстремална точка**

Геометрия на множеството на състоянията

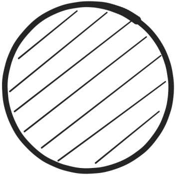


Всеки затворен триъгълник е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са само върховете му, без останалата част от границата му.

Геометрия на множеството на състоянията



Всеки затворен триъгълник е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са само върховете му, без останалата част от границата му.



Всеки затворен диск е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са цялата граница.

Геометрия на множеството на състоянията

Симплексът:

$$\Delta_{n-1} := \Big\{(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}^n \;\Big|\; 0\leqslant p_j\leqslant 1,\ \text{за}\ j=1,\ldots,n\,; \\ p_1+\ldots+p_n=1\Big\}\,.$$

Геометрия на множеството на състоянията

Симплексът:

$$\Delta_{n-1} := \Big\{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; 0 \leqslant p_j \leqslant 1, \text{ за } j = 1, \ldots, n\,; \\ p_1 + \ldots + p_n = 1\Big\}\,.$$

Това е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, в което изпъкналата комбинация, както видяхме в предната точка, има смисъл на *вероятностна смес*.

Геометрия на множеството на състоянията

Симплексът:

$$\Delta_{n-1} := \Big\{(p_1,\dots,p_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; 0 \leqslant p_j \leqslant 1, \text{ за } j = 1,\dots,n\,; \; p_1 + \ldots + p_n = 1\Big\}\,.$$

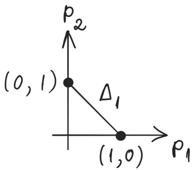
Това е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, в което изпъкналата комбинация, както видяхме в предната точка, има смисъл на *вероятностна смес*.

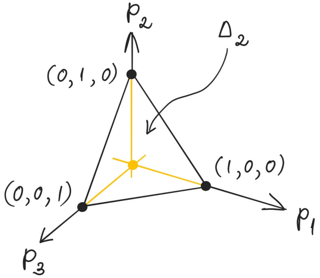
Екстремалните точки на Δ_{n-1} са разпределенията от вида $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\,.$

Геометрия на множеството на състоянията

Симплексът:

$$\Delta_{n-1} := \Big\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; 0 \leqslant p_j \leqslant 1, \text{ за } j = 1, \ldots, n\,; \\ p_1 + \ldots + p_n = 1 \Big\}\,.$$

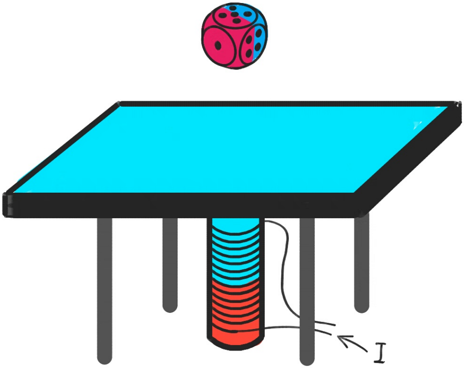




Класически системи

Класическа крайна система се определя от едно крайно множество Ω, по което задаваме:

- $\mathscr{Events} := \mathscr{P}(\Omega)$ - това е **степенното множество** (**power set**) на Ω (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);
- $\mathscr{States} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$ – това е множеството на всички вероятностни разпределения над Ω – то е симплекс.



Магнитно зарче, чието вероятностно разпределение на падания може да се манипулира от тока I намагнетизиращ масата

състояние ↘	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
вероятност $p_{(I=+3)}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{6}$
вероятност $p_{(I=+1)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
вероятност $p_{(I=0)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
вероятност $p_{(I=-1)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
вероятност $p_{(I=-3)}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{54}$

Примерни вероятностни разпределения за зарчето от предната фигура, в зависимост от силата на тока I

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Следващата аксиома може да се изкаже така:

$\boldsymbol{\mathscr{States}}$ е изпъкнало множество в реалното линейно пространство

$$\{f \mid f : \boldsymbol{\mathscr{Events}} \to \mathbb{R}\}.$$

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Следващата аксиома може да се изкаже така:

$\mathscr{States}$ е изпъкнало множество в реалното линейно пространство

$$\{f \,|\, f : \mathscr{Events} \to \mathbb{R}\}\,.$$

При това:

- напомняме, че изпъкналостта на $\mathscr{States}$ означава, че заедно с всеки два него елемента ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{States}$, то съдържа и всяка тяхна *изпъкнала комбинация*, $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$
  (на свой ред, "изпъкнала комбинация" $\Leftrightarrow q_1, q_2 \in [0,1]$ и $q_1 + q_2 = 1$; изпъкналите комбинации са точките от свързващата отсечка).

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Следващата аксиома може да се изкаже така:

$\mathscr{States}$ е изпъкнало множество в реалното линейно пространство

$$\{f \,|\, f : \mathscr{Events} \to \mathbb{R}\}\,.$$

При това:

- напомняме, че изпъкналостта на $\mathscr{States}$ означава, че заедно с всеки два него елемента ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{States}$, то съдържа и всяка тяхна *изпъкнала комбинация*, $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$
(на свой ред, "изпъкнала комбинация" $\Leftrightarrow q_1, q_2 \in [0,1]$ и $q_1 + q_2 = 1$; изпъкналите комбинации са точките от свързващата отсечка).

- Изпъкналите комбинации на състояния наричаме **смес на състояния**.

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Следващата аксиома може да се изкаже така:

$\mathcal{States}$ е изпъкнало множество в реалното линейно пространство

$$\{f \,|\, f : \mathcal{Events} \to \mathbb{R}\}\,.$$

При това:

- напомняме, че изпъкналостта на $\mathcal{States}$ означава, че заедно с всеки два него елемента ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{States}$, то съдържа и всяка тяхна *изпъкнала комбинация*, $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$
  (на свой ред, "изпъкнала комбинация" $\Leftrightarrow q_1, q_2 \in [0,1]$ и $q_1 + q_2 = 1$; изпъкналите комбинации са точките от свързващата отсечка).

- Изпъкналите комбинации на състояния наричаме смес на състояния.
  Смесването на състояния се интерпретира, като на "квантова" вероятностна смес.

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Следващата аксиома може да се изкаже така:

$\mathcal{States}$ е изпъкнало множество в реалното линейно пространство

$$\{f \,|\, f : \mathcal{Events} \to \mathbb{R}\}\,.$$

При това:
- напомняме, че изпъкналостта на $\mathcal{States}$ означава, че заедно с всеки два него елемента $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathcal{States}$, то съдържа и всяка тяхна *изпъкнала комбинация*, $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$
  (на свой ред, "изпъкнала комбинация" $\Leftrightarrow q_1, q_2 \in [0,1]$ и $q_1 + q_2 = 1$; изпъкналите комбинации са точките от свързващата отсечка).

- Изпъкналите комбинации на състояния наричаме **смес на състояния.**
  Смесването на състояния се интерпретира, като на "квантова" вероятностна смес.
- **Чисто състояние = екстремална точка на** $\mathcal{States}$ $=$ такова състояние, което не може да се представи, като *нетривиална* смес на други състояния.

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Следващата аксиома може да се изкаже така:

$\mathcal{States}$ е изпъкнало множество в реалното линейно пространство

$$\{f\,|\,f : \mathcal{Events} \to \mathbb{R}\}\,.$$

При това:
- напомняме, че изпъкналостта на $\mathcal{States}$ означава, че заедно с всеки два него елемента ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{States}$, то съдържа и всяка тяхна *изпъкнала комбинация*, $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ (на свой ред, "изпъкнала комбинация" $\Leftrightarrow q_1, q_2 \in [0,1]$ и $q_1 + q_2 = 1$; изпъкналите комбинации са точките от свързващата отсечка).

- Изпъкналите комбинации на състояния наричаме смес на състояния. Смесването на състояния се интерпретира, като на "квантова" вероятностна смес.
- Чисто състояние = екстремална точка на $\mathcal{States}$ = такова състояние, което не може да се представи, като *нетривиална* смес на други състояния. Смесено състояние = не чисто състояние.

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$).

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$). Тогава:

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\boldsymbol{\mathscr{E}vents} := \mathscr{P}(\Omega)$

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\mathscr{Events} := \mathscr{P}(\Omega) :=$ степенното множество (**power set**) на Ω (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\boldsymbol{\mathscr{Events}} := \mathscr{P}(\Omega)$:= степенното множество (**power set**) на Ω (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);
- $\boldsymbol{\mathscr{States}} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\boldsymbol{\mathscr{Events}} := \mathscr{P}(\Omega) :=$ степенното множество (**power set**) на Ω (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);
- $\boldsymbol{\mathscr{States}} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$:= множеството на всички вероятностни разпределения над Ω

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\boldsymbol{\mathscr{Events}} := \mathscr{P}(\Omega) :=$ степенното множество (**power set**) на Ω (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);
- $\boldsymbol{\mathscr{States}} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$ $:=$ множеството на всички вероятностни разпределения над Ω $(= \{p : \Omega \to [0,1] \mid \sum_{j=1}^{n} p(\omega_j) = 1\})$

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\boldsymbol{\mathscr{Events}} := \mathscr{P}(\Omega) :=$ степенното множество (**power set**) на Ω

  (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);

- $\boldsymbol{\mathscr{States}} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$

  $:=$ множеството на всички вероятностни разпределения над Ω $(= \{p : \Omega \to [0,1] \mid \sum_{j=1}^{n} p(\omega_j) = 1\})$

  $\cong \Delta_{n-1}$ ($(n-1)$–мерния симплекс)

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\boldsymbol{\mathscr{Events}} := \mathscr{P}(\Omega) :=$ степенното множество (**power set**) на Ω
  (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);
- $\boldsymbol{\mathscr{States}} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$
  $:=$ множеството на всички вероятностни разпределения над Ω $\left(= \{p : \Omega \to [0,1] \,|\, \sum_{j=1}^{n} p(\omega_j) = 1\}\right)$
  $\cong \Delta_{n-1}$ (($n-1$)–мерния симплекс)
  $:= \left\{(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n \,\middle|\, p_1 + \cdots + p_n = 1\right\}.$

АКСИОМИТЕ ДО ТУК

Първи пример: крайни класически системи

Крайна класическа система се строи по едно крайно множество Ω ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$). Тогава:

- $\mathscr{Events} := \mathscr{P}(\Omega) :=$ степенното множество (**power set**) на Ω

  (т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω);

- $\mathscr{States} := \mathscr{Prob.Func.}(\Omega)$

  $:=$ множеството на всички вероятностни разпределения над Ω $\left(= \{p : \Omega \to [0,1] \,|\, \sum_{j=1}^{n} p(\omega_j) = 1\}\right)$

  $\cong \Delta_{n-1}$ ($(n-1)$–мерния симплекс)

  $:= \left\{(p_1, \dots, p_n) \in [0,1]^n \,\middle|\, p_1 + \dots + p_n = 1\right\}.$

- Чистите състояния $\longleftrightarrow$ $(p_1, \dots, p_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

  (в частност, чистите състояния са n на брой).

ПО-НАТАТЪК В ТАЗИ ЛЕЦИЯ ЩЕ ВЪВЕДЕМ

Втори пример: крайни (чисто) квантови системи

Крайна квантова система се строи по $\mathbb{C}^n$ – крайно-мерно, комплексно хилбертово (= унитарно) пространство с размерност n.

- $\mathscr{E}\mathit{vents} := \mathfrak{L}(\mathbb{C}^n) := \{V \,|\, V$ е линейно подпространство на $\mathbb{C}^n\}$
  (това е вече безкрайно множеството);
- $\mathscr{S}\mathit{tates} := \mathit{ConvexHull}\left\{\rho_\Psi \,\middle|\, \Psi \in \mathbb{C}^n \text{ е единичен вектор}\right\}$,

  където $\rho_\Psi(V) := \left\|\Pi_V \Psi\right\|^2$,

  а Π_V е ортогоналния проектор върху V

- Чистите състояния ще са тези и само тези, които са от вида ρ_Ψ
  (множеството на чистите състояния е също безкрайно).

Аксиомите до тук бяха толкова общи, че допускат не само горните два класа модели, но и много други, които са “безинтересни”.

Една от целите на аксиоматиката е да се въведат такива аксиоми, които освен че са “интуитивни”, също и максимално да стесняват кръга на моделите, по възможност дори, само до тези два класа (и евентуално, “хибриди” между тях).

Преговор по алгебра

Преговор по алгебра

Комплексни числа

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица} \end{array}}$$

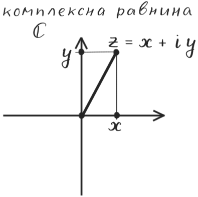
Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица} \end{array}}$$

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част



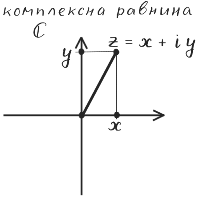
Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица} \end{array}}$$

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част



$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(y_1x_2 + x_1y_2)$$

– асоциативно и комутативно умножение.

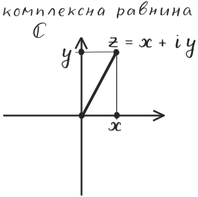
Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица} \end{array}}$$

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част



$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(y_1x_2 + x_1y_2)$$

– асоциативно и комутативно умножение.

За $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$: $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ – комплексно спрягане

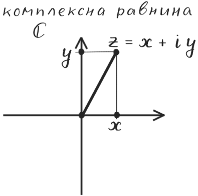
Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\mathrm{i}^2 = -1$
i – имагинерна единица

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част



$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(y_1x_2 + x_1y_2)$$

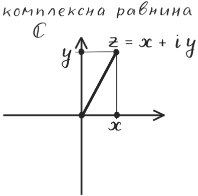
– асоциативно и комутативно умножение.

За $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$: $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ – комплексно спрягане,

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ – модул на } z.$$

Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$



$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица}\end{gathered}}$$

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(y_1x_2 + x_1y_2)$$

– асоциативно и комутативно умножение.

За $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$: $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ – комплексно спрягане,

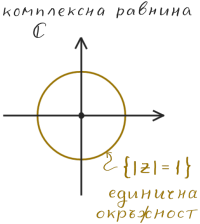
$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ – модул на } z.$$

Формула на Ойлер: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Euler

Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$



$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица} \end{array}}$$

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(y_1x_2 + x_1y_2)$$

– асоциативно и комутативно умножение.

За $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$: $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ – комплексно спрягане,

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ – модул на } z.$$

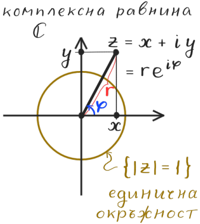
Формула на Ойлер: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Euler

– общ вид на комплексно число по модул 1.

Преговор по алгебра

Комплексни числа: $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$



$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{i}^2 = -1 \\ \mathrm{i} \text{ – имагинерна единица} \end{array}}$$

$x = \operatorname{Re} z$ – реална част на z

$y = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(y_1x_2 + x_1y_2)$$

– асоциативно и комутативно умножение.

За $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$: $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ – комплексно спрягане,

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ – модул на } z.$$

Формула на Ойлер: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Euler

– общ вид на комплексно число по модул 1.

Полярно разлагане: $z = re^{i\varphi}$,

където $r = |z|$ е модула на z, а φ се нарича аргумент /фаза.

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \quad (\Phi, \Psi) \longmapsto \langle \Phi | \Psi \rangle,$$

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\text{наредена двойка}} \longmapsto \langle \Phi | \Psi \rangle,$$

внимание:

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\substack{\text{наредена}\\ \text{двойка}}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

внимание:

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \quad \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\substack{\text{внимание: наредена} \\ \text{двойка}}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

наречена **скаларно произведение**

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\text{наредена двойка}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

внимание: наредена двойка

наречена **скаларно произведение** със свойствата:

- $\langle \alpha\Phi + \beta\Psi \,|\, \alpha'\Phi' + \beta'\Psi' \rangle$
  $= \overline{\alpha}\alpha' \langle \Phi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\alpha}\beta' \langle \Phi \,|\, \Psi' \rangle + \overline{\beta}\alpha' \langle \Psi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\beta}\beta' \langle \Psi \,|\, \Psi' \rangle$

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\text{наредена двойка}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

внимание:

наречена **скаларно произведение** със свойствата:

- $\langle \alpha\Phi + \beta\Psi \,|\, \alpha'\Phi' + \beta'\Psi' \rangle$
  $= \overline{\alpha}\alpha' \langle \Phi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\alpha}\beta' \langle \Phi \,|\, \Psi' \rangle + \overline{\beta}\alpha' \langle \Psi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\beta}\beta' \langle \Psi \,|\, \Psi' \rangle$

за всеки Φ, Ψ, Φ', $\Psi' \in \mathscr{H}$ и α, β, α', $\beta' \in \mathbb{C}$.

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\substack{\text{внимание: наредена} \\ \text{двойка}}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

наречена **скаларно произведение** със свойствата:

- $\langle \alpha\Phi + \beta\Psi \,|\, \alpha'\Phi' + \beta'\Psi' \rangle$ (антилинейност-линейност)
  $= \overline{\alpha}\alpha' \langle \Phi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\alpha}\beta' \langle \Phi \,|\, \Psi' \rangle + \overline{\beta}\alpha' \langle \Psi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\beta}\beta' \langle \Psi \,|\, \Psi' \rangle$

за всеки Φ, Ψ, Φ', $\Psi' \in \mathscr{H}$ и α, β, α', $\beta' \in \mathbb{C}$.

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\text{наредена двойка}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

внимание:

наречена **скаларно произведение** със свойствата:

- $\langle \alpha\Phi + \beta\Psi \,|\, \alpha'\Phi' + \beta'\Psi' \rangle$ (антилинейност-линейност)
  $= \overline{\alpha}\alpha' \langle \Phi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\alpha}\beta' \langle \Phi \,|\, \Psi' \rangle + \overline{\beta}\alpha' \langle \Psi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\beta}\beta' \langle \Psi \,|\, \Psi' \rangle$,
- $\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi \,|\, \Phi \rangle}$ (ермитова симетрия),

за всеки Φ, Ψ, Φ', $\Psi' \in \mathscr{H}$ и α, β, α', $\beta' \in \mathbb{C}$.

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\text{внимание: наредена двойка}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

наречена **скаларно произведение** със свойствата:

- $\langle \alpha\Phi + \beta\Psi \,|\, \alpha'\Phi' + \beta'\Psi' \rangle$ (антилинейност-линейност)
  $= \overline{\alpha}\alpha' \langle \Phi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\alpha}\beta' \langle \Phi \,|\, \Psi' \rangle + \overline{\beta}\alpha' \langle \Psi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\beta}\beta' \langle \Psi \,|\, \Psi' \rangle$,
- $\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi \,|\, \Phi \rangle}$ (емитова симетрия),
- $\langle \Phi \,|\, \Phi \rangle \geqslant 0$

за всеки Φ, Ψ, Φ', $\Psi' \in \mathscr{H}$ и α, β, α', $\beta' \in \mathbb{C}$.

Крайно-мерни комплексни хилбертови пространства

(= унитарни пространства)

Определение. Крайно-мерно комплексно хилбертово пространство е крайно-мерно линейно пространство $\mathscr{H}$ над $\mathbb{C}$, снабдено с функция

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \; : \; \underbrace{(\Phi, \Psi)}_{\text{наредена двойка}} \longmapsto \underbrace{\langle \Phi | \Psi \rangle}_{\text{число}},$$

внимание:

наречена **скаларно произведение** със свойствата:

- $\langle \alpha\Phi + \beta\Psi \,|\, \alpha'\Phi' + \beta'\Psi' \rangle$ (антилинейност-линейност)
  $= \overline{\alpha}\alpha' \langle \Phi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\alpha}\beta' \langle \Phi \,|\, \Psi' \rangle + \overline{\beta}\alpha' \langle \Psi \,|\, \Phi' \rangle + \overline{\beta}\beta' \langle \Psi \,|\, \Psi' \rangle$,
- $\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi \,|\, \Phi \rangle}$ (емитова симетрия),
- $\langle \Phi \,|\, \Phi \rangle \geqslant 0$, като $\langle \Phi \,|\, \Phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0$ (строга положителна дефинитност),

за всеки Φ, Ψ, Φ', Ψ' $\in \mathscr{H}$ и α, β, α', $\beta' \in \mathbb{C}$.

Елементарна теория на хилбертовите пространства

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията: • $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ се нарича **норма** (**дължина**) на вектор Ψ в хилбертово пространство $\mathscr{H}$.

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията: • $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ се нарича **норма** (**дължина**) на вектор Ψ в хилбертово пространство $\mathscr{H}$.

- Ψ е **единичен вектор** $\Leftrightarrow \|\Psi\| = 1$.

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията: • $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ се нарича **норма** (**дължина**) на вектор Ψ в хилбертово пространство $\mathscr{H}$.

- Ψ е **единичен вектор** $\Leftrightarrow \|\Psi\| = 1$.
- Векторите Ψ и Φ са взаимно **ортогонални** $(\Psi \perp \Phi) \Leftrightarrow \langle\Psi|\Phi\rangle = 0$.

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също “**реални евклидови пространства**”.)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията: • $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ се нарича **норма** (**дължина**) на вектор Ψ в хилбертово пространство $\mathscr{H}$.

- Ψ е **единичен вектор** $\Leftrightarrow \|\Psi\| = 1$.
- Векторите Ψ и Φ са взаимно **ортогонални** $(\Psi \perp \Phi) \Leftrightarrow \langle\Psi|\Phi\rangle = 0$.
- Базисът $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ на $\mathscr{H}$ се нарича **орто-нормиран**, ако се състои от единични вектори, които са взаимно ортогонални.

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също “**реални евклидови пространства**”.)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията:

- $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ се нарича **норма** (**дължина**) на вектор Ψ в хилбертово пространство $\mathscr{H}$.
- Ψ е **единичен вектор** $\Leftrightarrow \|\Psi\| = 1$.
- Векторите Ψ и Φ са взаимно **ортогонални** $(\Psi \perp \Phi) \Leftrightarrow \langle\Psi|\Phi\rangle = 0$.
- Базисът $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ на $\mathscr{H}$ се нарича **орто-нормиран**, ако се състои от единични вектори, които са взаимно ортогонални.

  Еквивалентно: $\langle\mathrm{e}_j|\mathrm{e}_k\rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k \\ 0 \text{ при } j \neq k \end{cases}$

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията: • $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ се нарича **норма** (**дължина**) на вектор Ψ в хилбертово пространство $\mathscr{H}$.

- Ψ е **единичен вектор** $\Leftrightarrow \|\Psi\| = 1$.
- Векторите Ψ и Φ са взаимно **ортогонални** $(\Psi \perp \Phi) \Leftrightarrow \langle\Psi|\Phi\rangle = 0$.
- Базисът $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ на $\mathscr{H}$ се нарича **орто-нормиран**, ако се състои от единични вектори, които са взаимно ортогонални.

Еквивалентно: $\langle \mathrm{e}_j|\mathrm{e}_k\rangle = \boxed{\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 \text{ при } j = k \\ 0 \text{ при } j \neq k \end{cases}}$ $\leftarrow\!\Big\{$ **делта-символ на Крьонекер.**

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията:

- Ако $V \subseteq \mathscr{H}$ е линейно подпространство, то
$$V^{\perp} := \{\Phi \in \mathscr{H} \,|\, \Phi \perp \Psi \text{ за всяко } \Psi \in V\}$$
наричаме **ортогонално допълнение на** V.

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията:

- Ако $V \subseteq \mathscr{H}$ е линейно подпространство, то
$$V^{\perp} := \{\Phi \in \mathscr{H} \,|\, \Phi \perp \Psi \text{ за всяко } \Psi \in V\}$$
наричаме **ортогонално допълнение на** V.

Теорема.

Всеки вектор $\Theta \in \mathscr{H}$ се представя по единствен начин като сума:
$$\Theta = \Psi + \Phi \qquad \textit{за } \Psi \in V \textit{ и } \Phi \in V^{\perp}.$$

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията:

- Ако $V \subseteq \mathscr{H}$ е линейно подпространство, то
$$V^{\perp} := \{\Phi \in \mathscr{H} \,|\, \Phi \perp \Psi \text{ за всяко } \Psi \in V\}$$
наричаме **ортогонално допълнение на** V.

Теорема.

Всеки вектор $\Theta \in \mathscr{H}$ се представя по единствен начин като сума:
$$\Theta = \Psi + \Phi \qquad \text{за } \Psi \in V \text{ и } \Phi \in V^{\perp}.$$
Последното се записва също така: $\mathscr{H} = V \oplus V^{\perp}$.

Елементарната теория на хилбертовите пространства в голяма степен прилича на теорията евклидовите пространства.

(Евклидовите пространства ги наричат също "**реални евклидови пространства**".)

Например, аналогично на евклидовите пространства въвеждаме понятията:

- Ако $V \subseteq \mathscr{H}$ е линейно подпространство, то
$$V^{\perp} := \{\Phi \in \mathscr{H} \,|\, \Phi \perp \Psi \text{ за всяко } \Psi \in V\}$$
наричаме **ортогонално допълнение на** V.

Теорема.

Всеки вектор $\Theta \in \mathscr{H}$ се представя по единствен начин като сума:
$$\Theta = \Psi + \Phi \qquad \text{за } \Psi \in V \text{ и } \Phi \in V^{\perp}.$$
Последното се записва също така: $\mathscr{H} = V \oplus V^{\perp}$.

Полагането $\Pi_V(\Theta) := \Psi$ определя линеен оператор $\Pi_V : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, наречен **ортогонален проектор върху** V.

Основен пример на хилбертово пространство:

Това е $\mathbb{C}^n$ снабдено със скаларното произведение:

$$\begin{aligned} &\langle \Psi | \Phi \rangle = \overline{\psi}_1 \phi_1 + \cdots \overline{\psi}_n \phi_n, \\ \text{ако} \quad &\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{C}^n \text{ и} \\ &\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Скаларното произведение в орто-нормиран базис придобива вида на скаларното произведение в $\mathbb{C}^n$ и по такъв начин, разглеждането на хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$ е равносилно на задаване на n-мерно хилбертово пространство с *посочен* орто-нормиран базис.

ТАКА ДЕФИНИРАМЕ

Втори пример: крайни (чисто) квантови системи

Крайна квантова система се строи по $\mathbb{C}^n$ – крайно-мерно, комплексно хилбертово (= унитарно) пространство с размерност n.

- $\mathscr{E}\mathit{vents} := \mathfrak{L}(\mathbb{C}^n) := \{V \,|\, V$ е линейно подпространство на $\mathbb{C}^n\}$
  (това е вече безкрайно множеството);
- $\mathscr{S}\mathit{tates} := \mathit{ConvexHull}\left\{\rho_\Psi \,\middle|\, \Psi \in \mathbb{C}^n \text{ е единичен вектор}\right\}$,

  където $\rho_\Psi(V) := \left\|\Pi_V \Psi\right\|^2$,

  а Π_V е ортогоналния проектор върху V
- Чистите състояния ще са тези и само тези, които са от вида ρ_Ψ
  (множеството на чистите състояния е също безкрайно).