

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 3 / 23.10.2023, версия 2

Обзорна част

ЧАСТ 1: АКСИОМАТИЧНИ ОСНОВИ НА КВАНТОВАТА ТЕОРИЯ

аксиоматични аксиома- тични раздели	аксиоматични подходи	квантово-логически аксиоматичен подход	алгебричен аксиоматичен подход
аксиоми на обща системи		лекции ²⁻³ <u>2-4</u>	лекции ³⁻⁵ <u>5-7</u>
аксиоми на съставни системи		_____	лекция ⁶ <u>8</u>
квантови трансформации		_____	лекция ⁷ <u>9</u>

Най-важного до тук

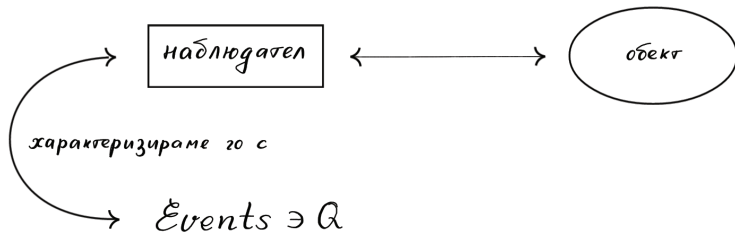
Най-важното до тук

В квантовата теория се изучава връзката



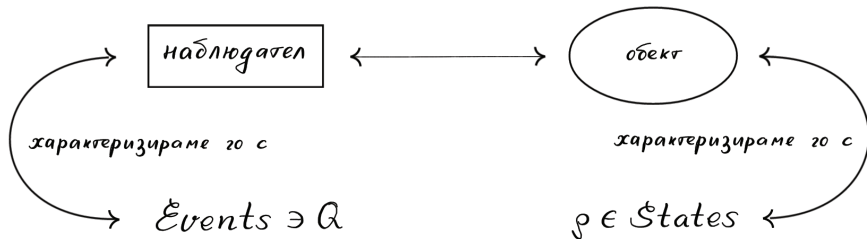
Най-важното до тук

В квантовата теория се изучава връзката



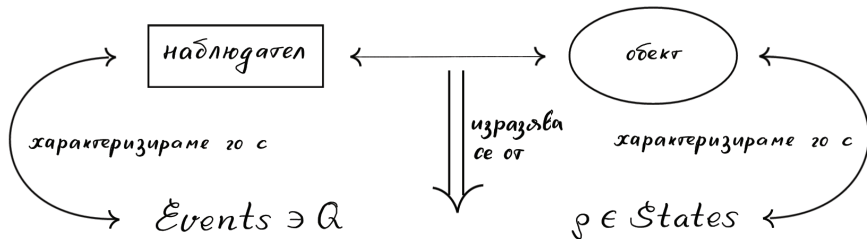
Най-важното го еук

В квантовата теория се изучава връзката



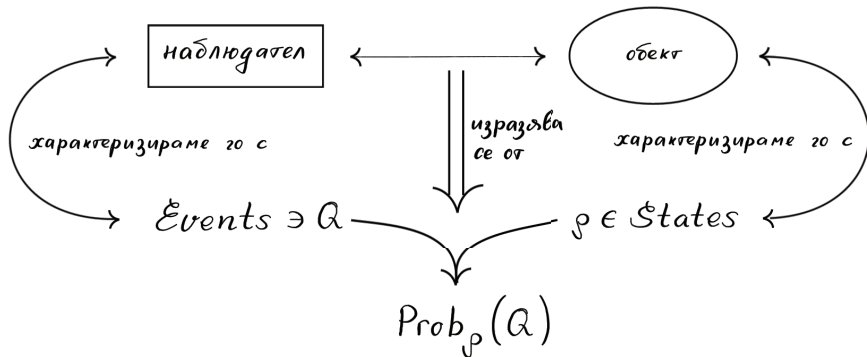
Най-важното го еук

В квантовата теория се изучава връзката



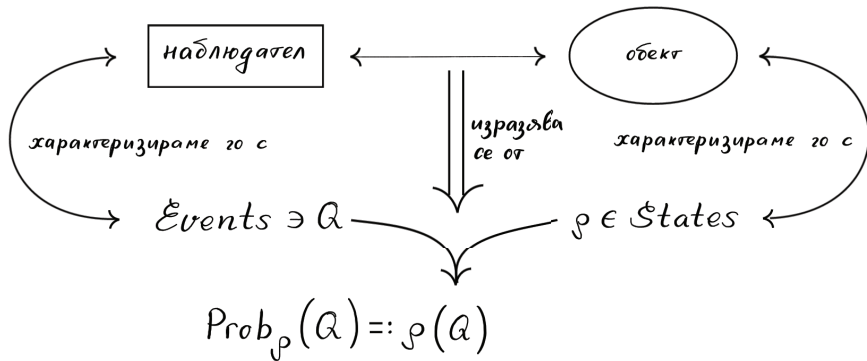
Най-важното го еук

В квантовата теория се изучава връзката



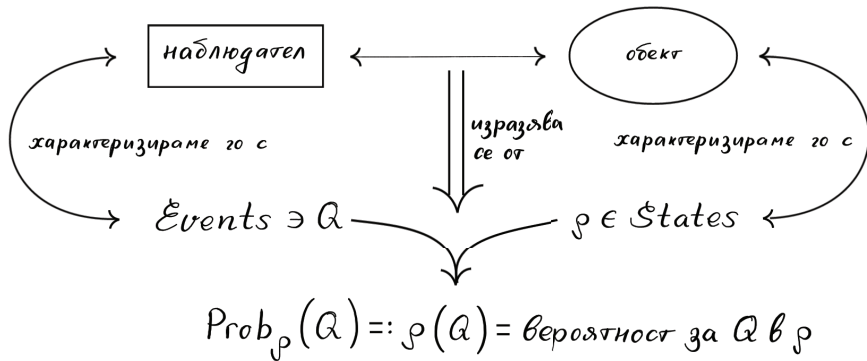
Най-важното го гук

В квантовата теория се изучава връзката



Най-важното до тук

В квантовата теория се изучава връзката



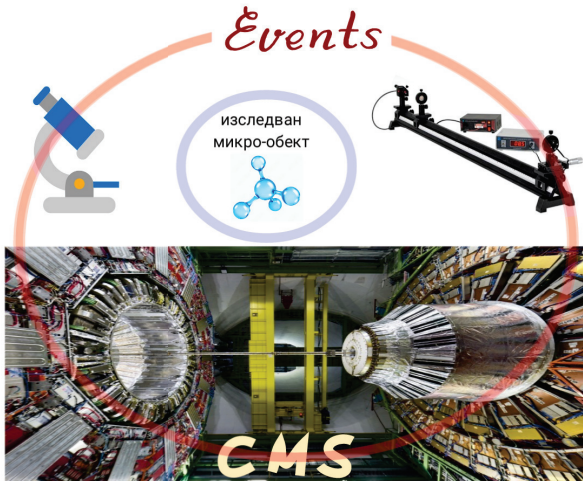
При разглеждането на
сдвояването

наблюдател - обект

ние фиксираме изследвания вид
обект, но не фиксираме
изследващия го експеримент
(апарат).

Разглеждаме "всички възможни
по принцип, изследващи
експерименти".

Някои от тях ще могат да се
проведат съвместно, други - не.



Пример от социологията



↗ Пример от социологията



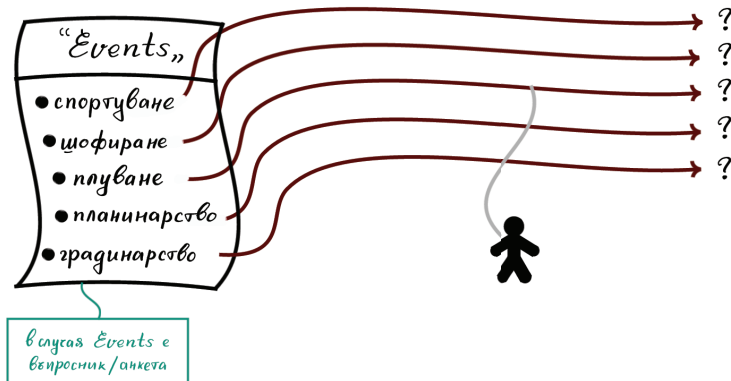
в случая Events е
въпросник / анкета

↖ Пример от социологията

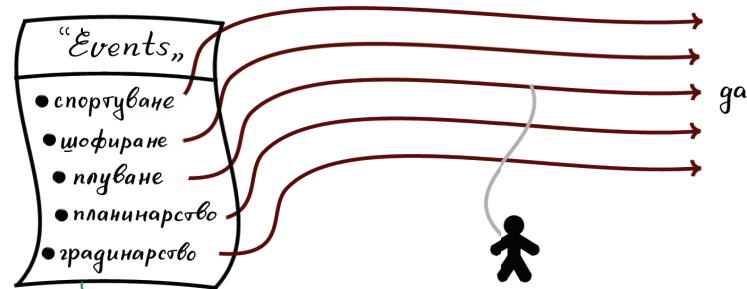


в случая Events е
въпросник / анкета

↑
Пример от социологията



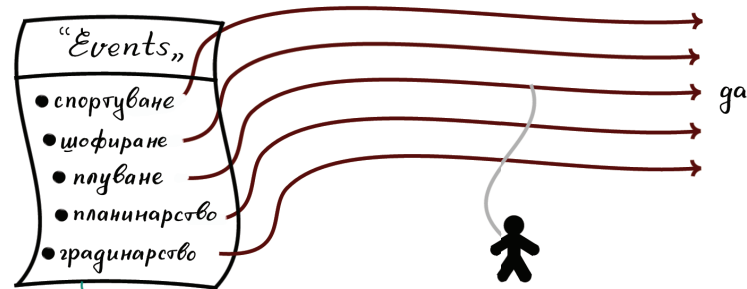
↑
Пример от социологията



в случая Events е
въпросник / анкета

задава се винаги само един въпрос от анкетата
защото смятаме, че отговора на един въпрос ще
повлияе върху отговорите на следващите

↑
Пример от социологията

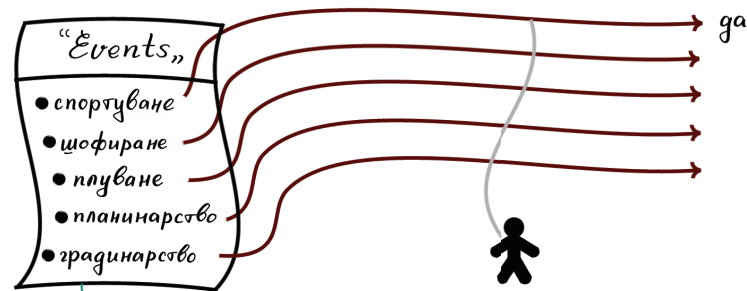


в случая Events е
въпросник / анкета

задава се винаги само един въпрос от анкетата
защото смятаме, че отговора на един въпрос ще
повлияе върху отговорите на следващите

за следващите въпроси - повтаряме всичко отначало

↑
Пример от социологията

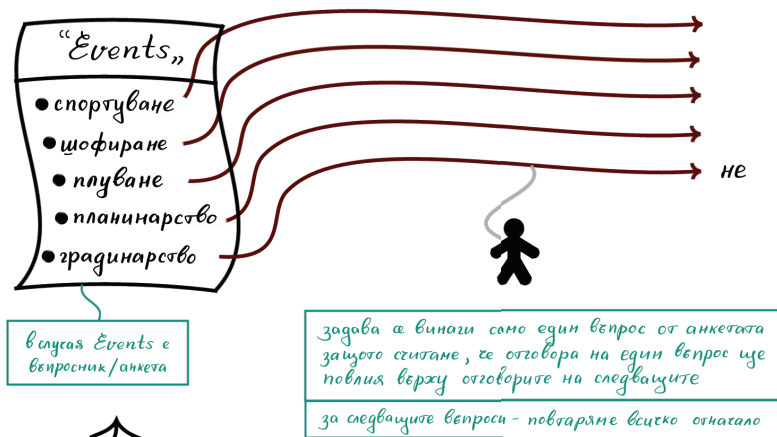


в случая Events е
въпросник / анкета

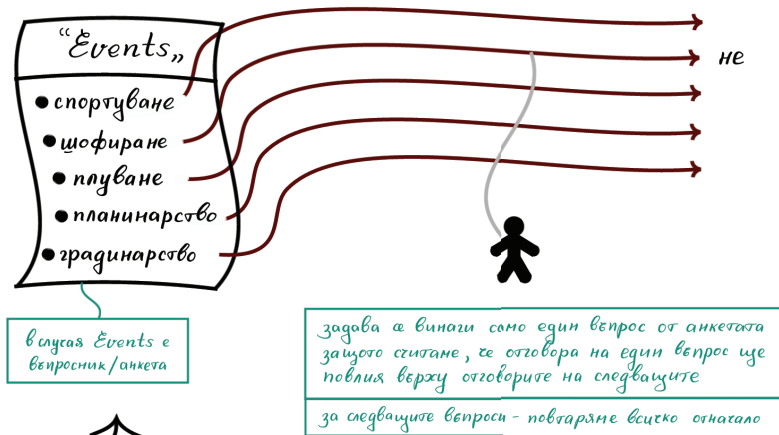
задава се винаги само един въпрос от анкетата
защото ситаме, че отговора на един въпрос ще
повлияе върху отговорите на следващите

за следващите въпроси - повтаряме всичко отначало

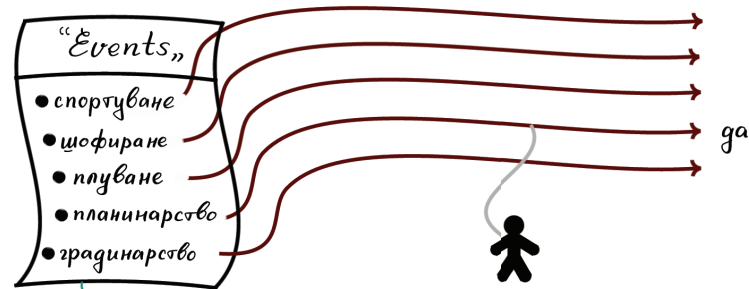
↑ Пример от социологията



Пример от социологията



Пример от социологията

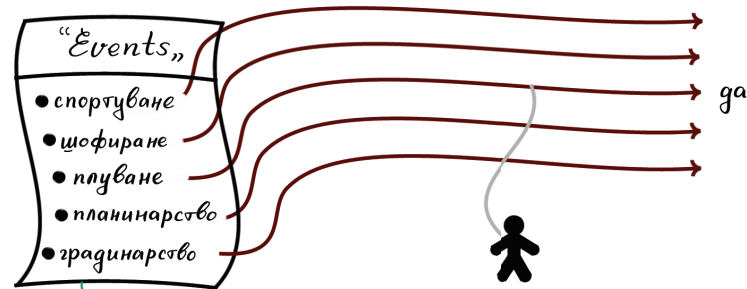


в случая Events е
въпросник / анкета

задава се винаги само един въпрос от анкетата
защото ситаме, че отговора на един въпрос ще
повлияе върху отговорите на следващите

за следващите въпроси - повтаряме всичко отначало

↑
Пример от социологията

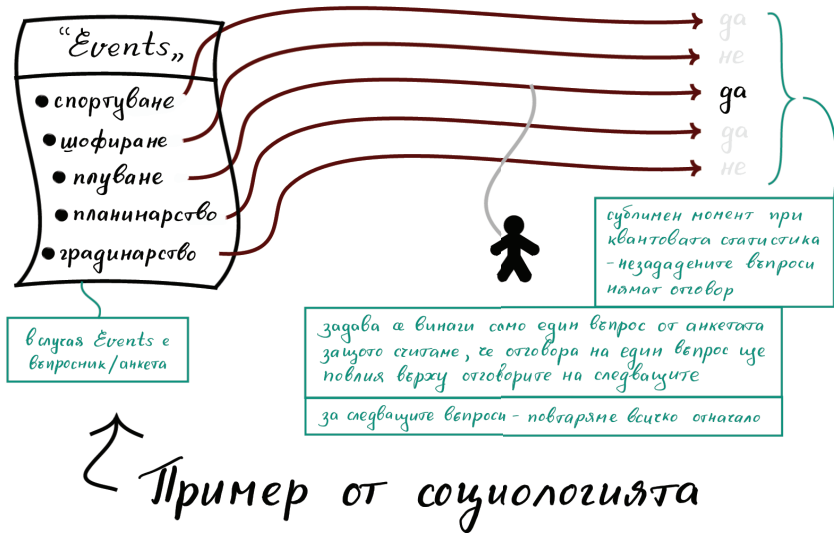


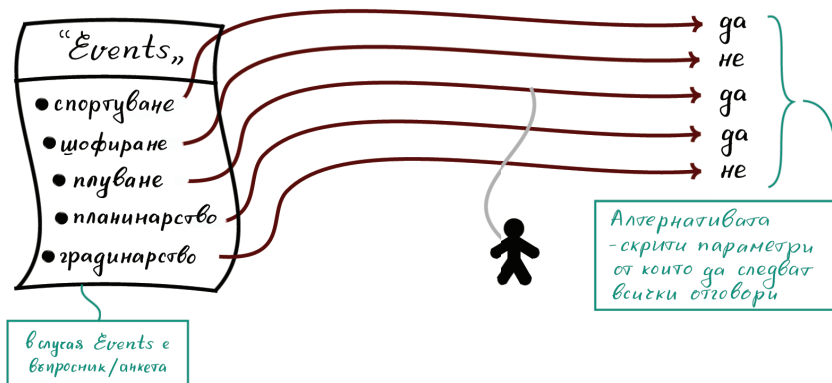
в случая Events е
въпросник / анкета

задава се винаги само един въпрос от анкетата
защото смятаме, че отговора на един въпрос ще
повлияе върху отговорите на следващите

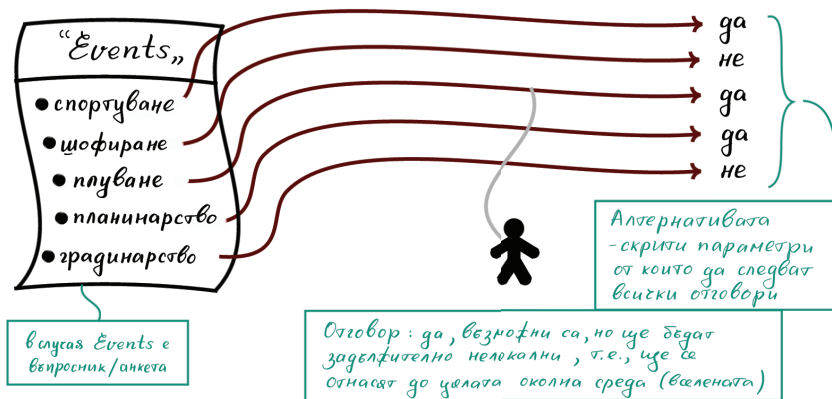
за следващите въпроси - повтаряме всичко отначало

↑ Пример от социологията

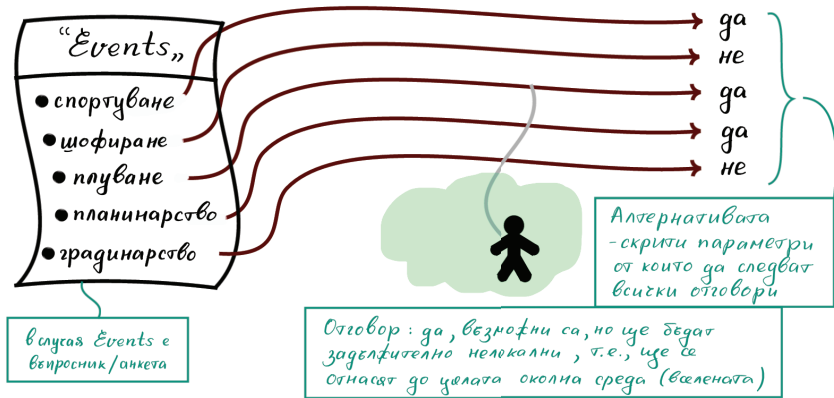




↑
Пример от социологията

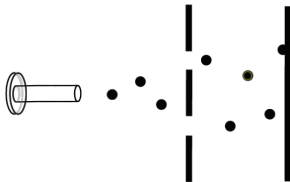


↑
Пример от социологията

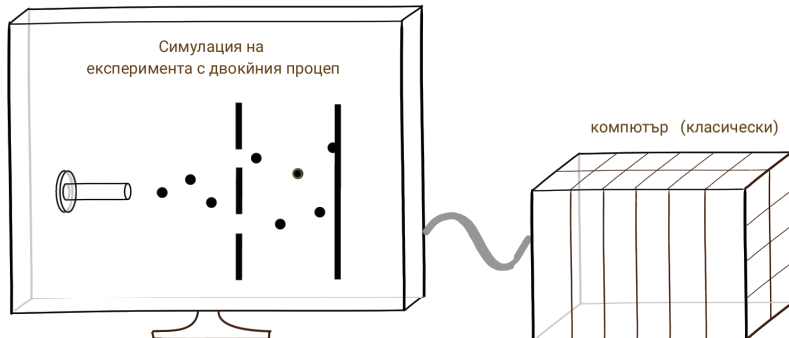


↑ Пример от социологията

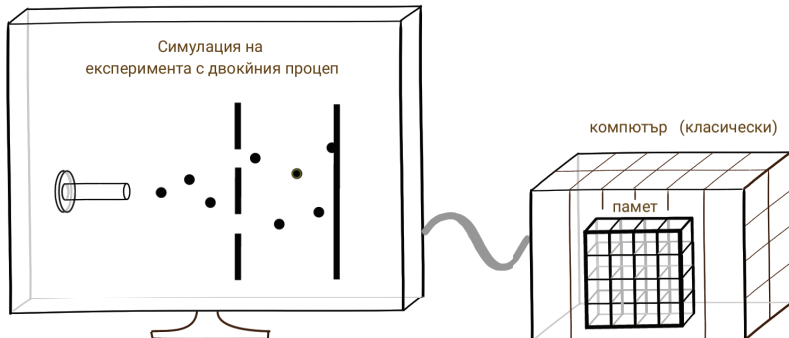
Скрыти параметры и нелокальность



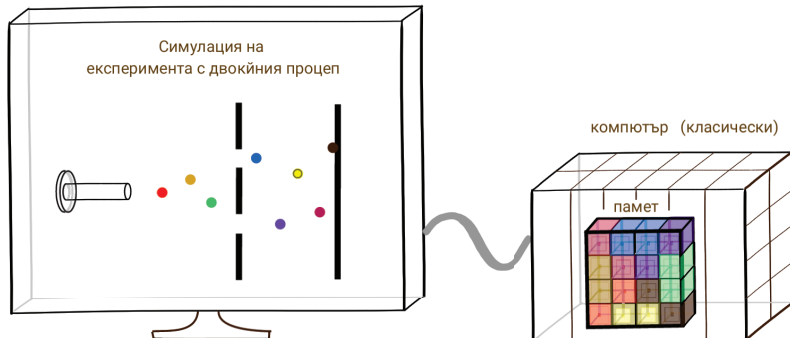
Скрити параметри и нелокалност



Скрити параметри и нелокалност

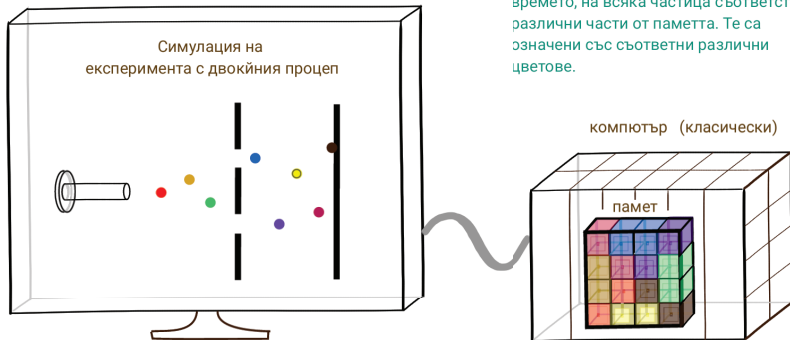


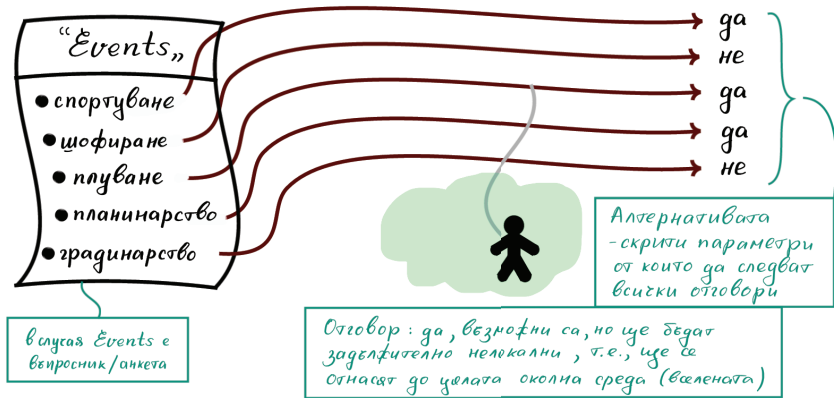
Скрити параметри и нелокалност



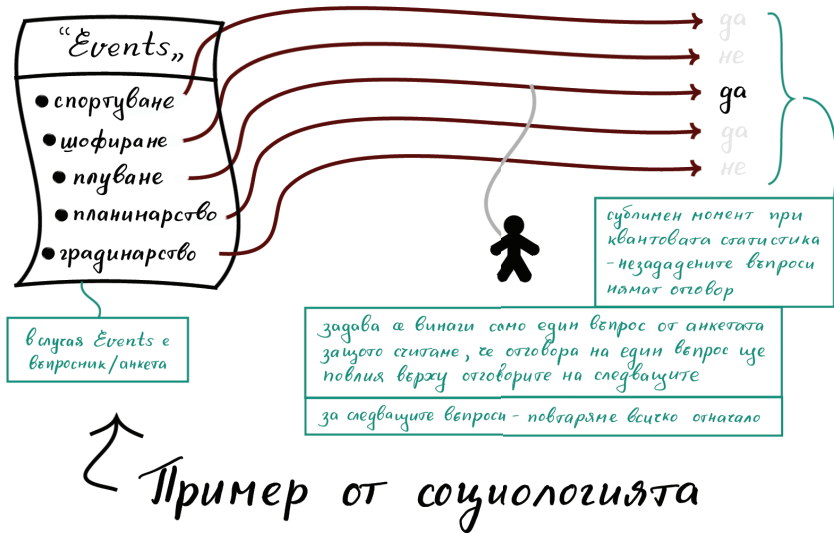
Скрити параметри и нелокалност

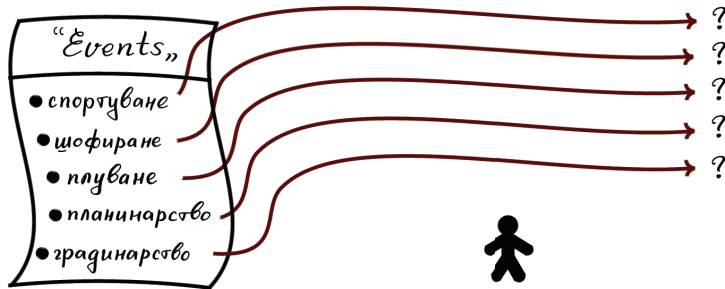
При локалност на симулацията (локални скрити параметри) във всеки момент от времето, на всяка частица съответстват различни части от паметта. Те са означени със съответни различни цветове.

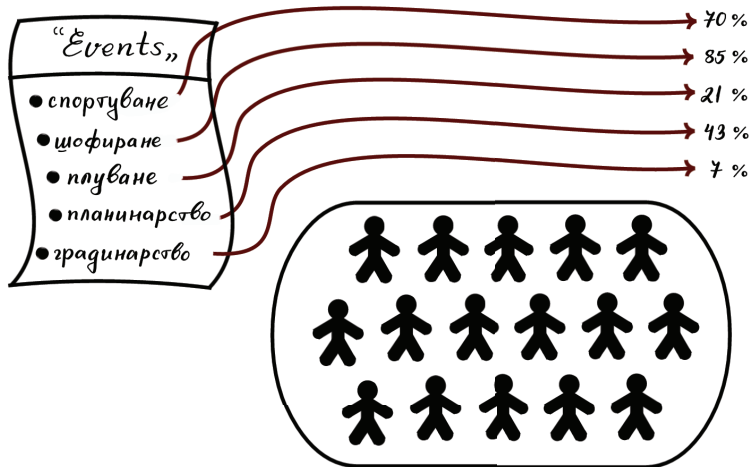


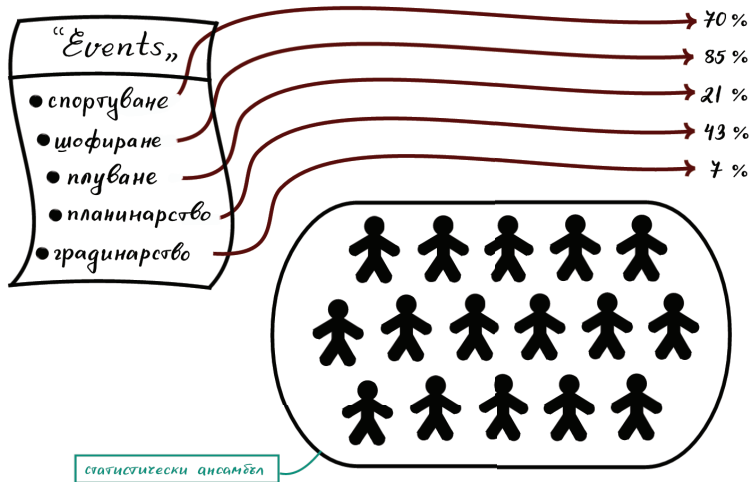


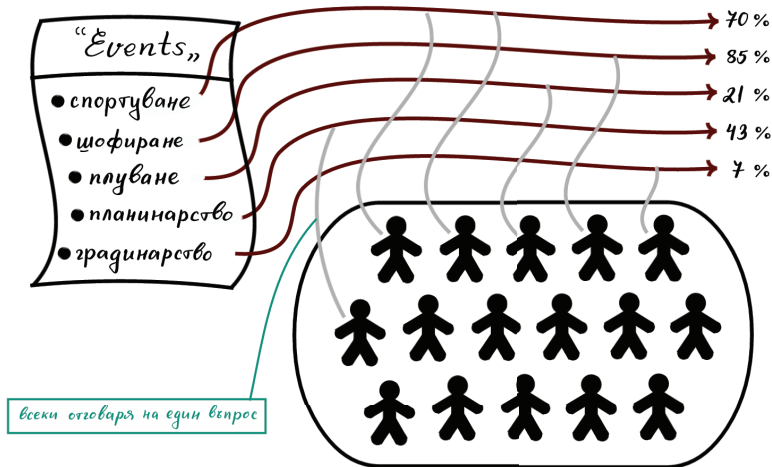
↑
Пример от социологията

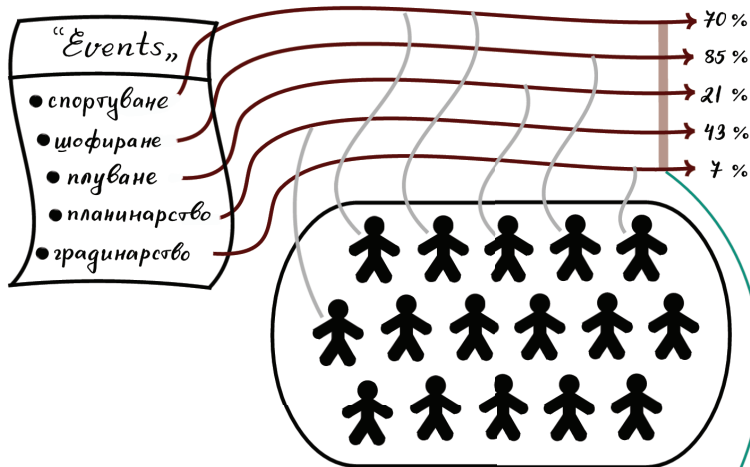




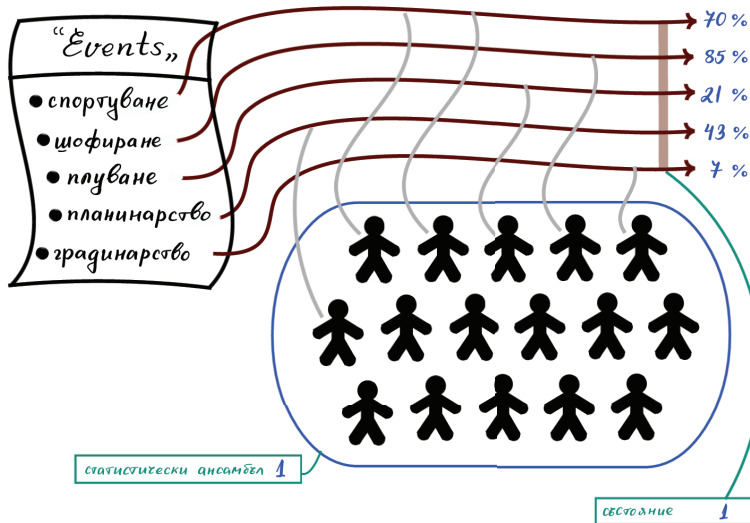


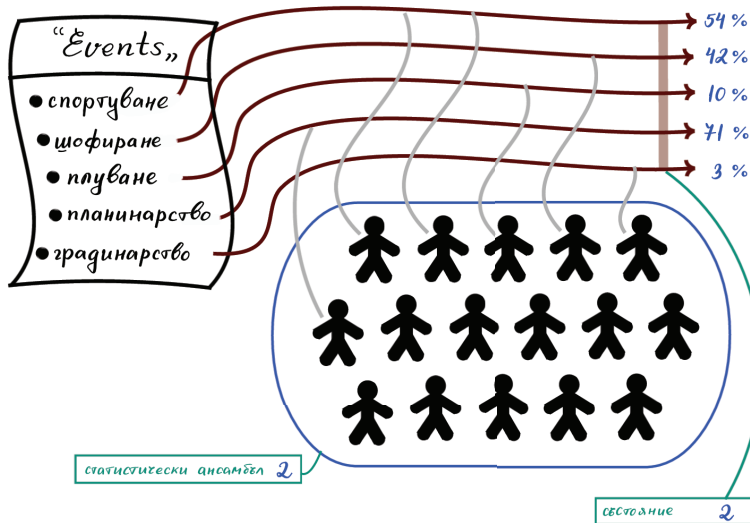


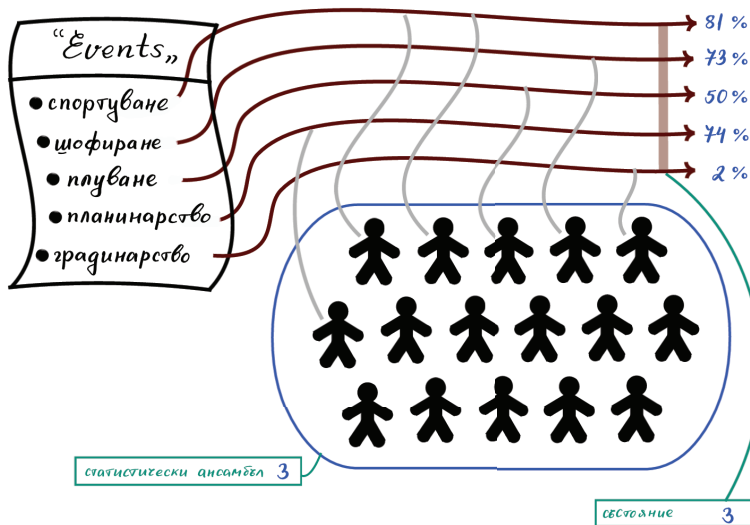


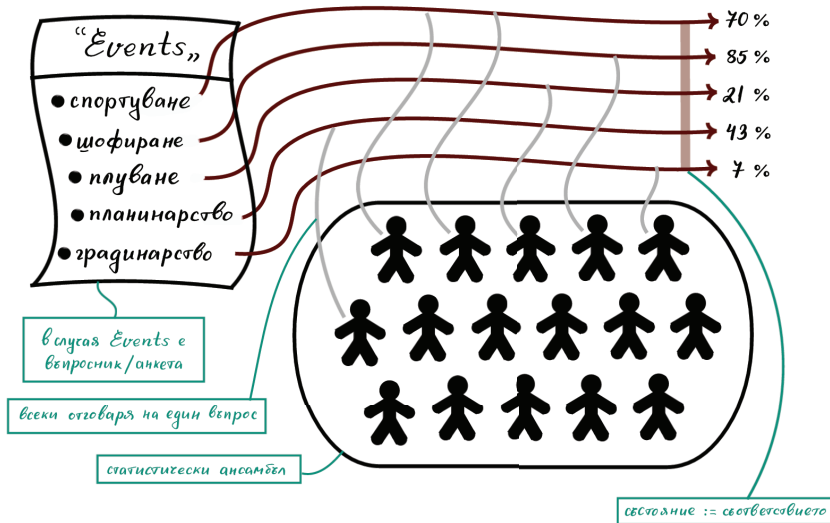


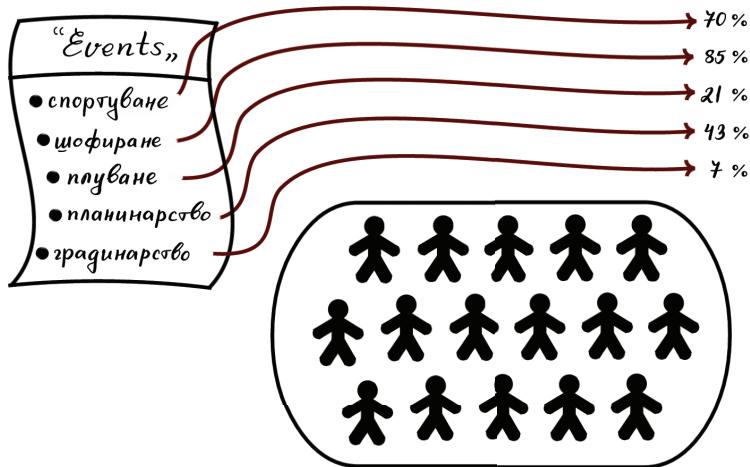
состояние := съответствието

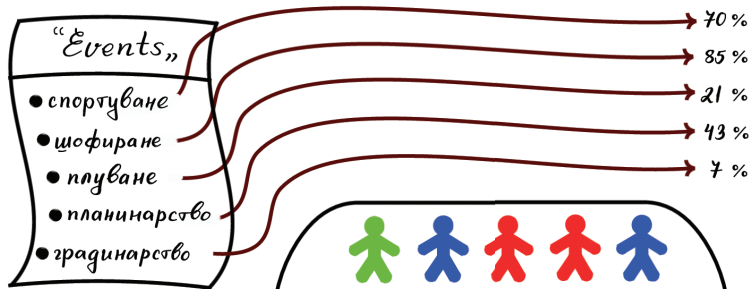




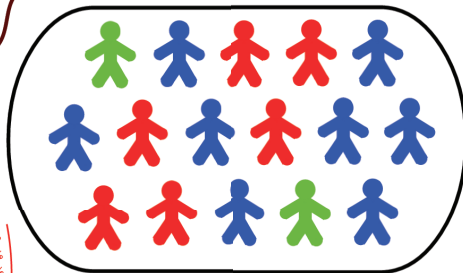




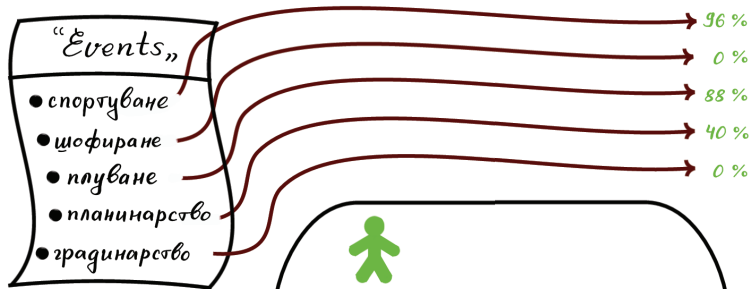




$$\text{Смесване: } 1 = \frac{2}{16} + \frac{8}{16} + \frac{6}{16}$$

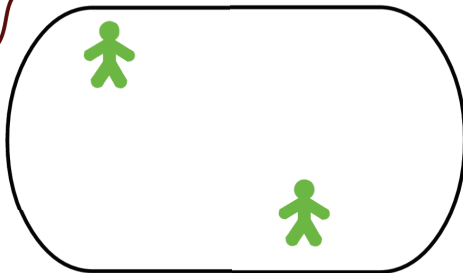


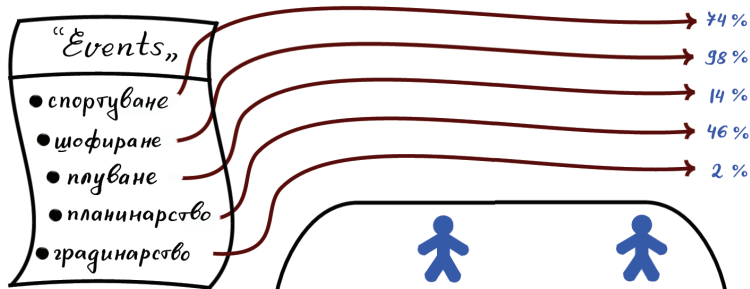
$$\begin{pmatrix} 70\% \\ 85\% \\ 21\% \\ 43\% \\ 7\% \end{pmatrix} = \frac{2}{16} \begin{pmatrix} 96\% \\ 0\% \\ 88\% \\ 40\% \\ 0\% \end{pmatrix} + \frac{8}{16} \begin{pmatrix} 74\% \\ 98\% \\ 14\% \\ 46\% \\ 2\% \end{pmatrix} + \frac{6}{16} \begin{pmatrix} 56\% \\ 96\% \\ 8\% \\ 40\% \\ 16\% \end{pmatrix}$$



Изхистване: $\frac{2}{16}$

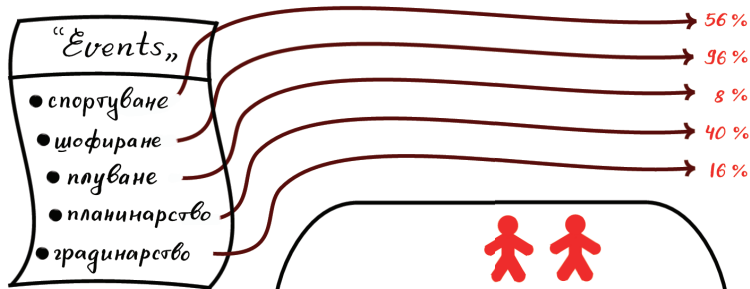
$\begin{pmatrix} 96\% \\ 0\% \\ 88\% \\ 40\% \\ 0\% \end{pmatrix}$





Изхистване: $\frac{8}{16}$

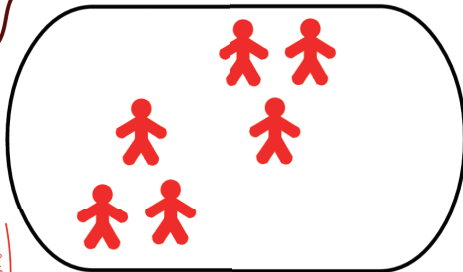
$\begin{pmatrix} 74 \% \\ 98 \% \\ 14 \% \\ 46 \% \\ 2 \% \end{pmatrix}$

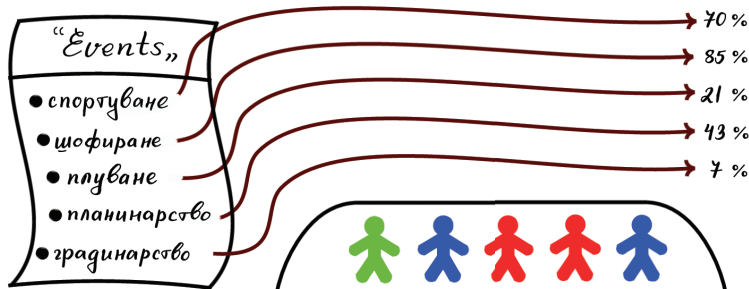


Изхистване:

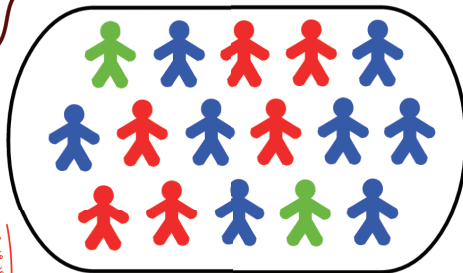
$$\frac{6}{16}$$

$\left(\begin{array}{c} 56\% \\ 96\% \\ 8\% \\ 40\% \\ 16\% \end{array} \right)$

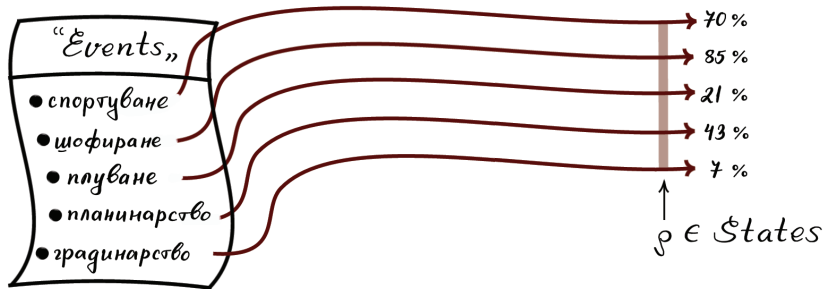




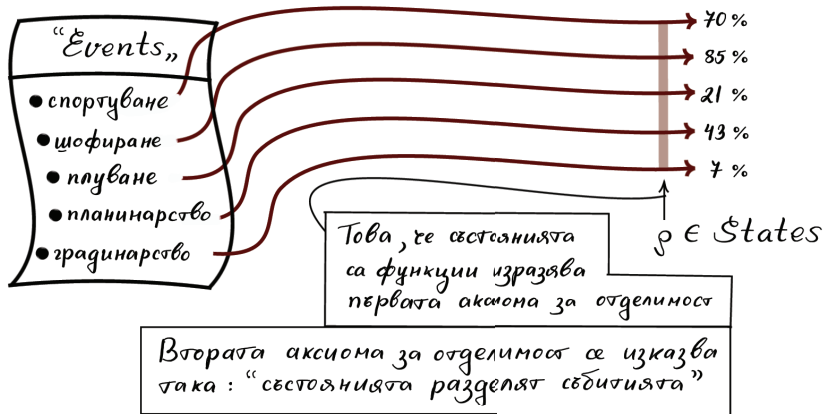
$$\text{Смесване: } 1 = \frac{2}{16} + \frac{8}{16} + \frac{6}{16}$$

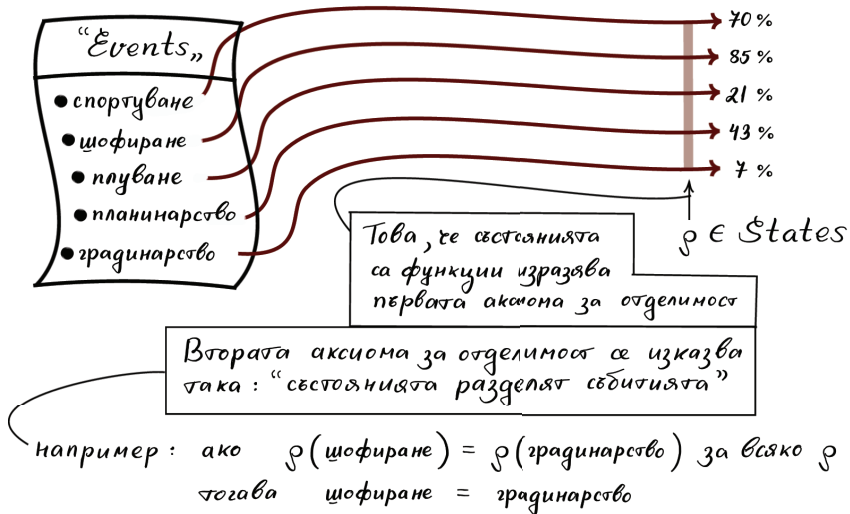


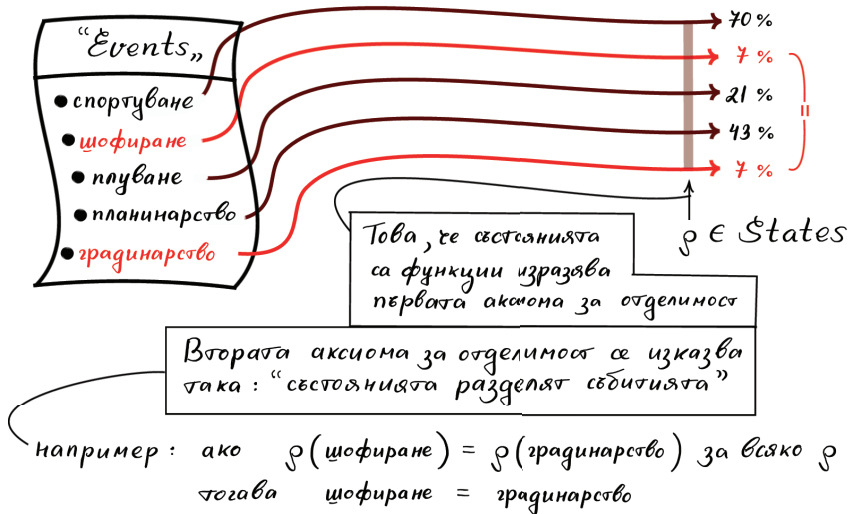
$$\begin{pmatrix} 70\% \\ 85\% \\ 21\% \\ 43\% \\ 7\% \end{pmatrix} = \frac{2}{16} \begin{pmatrix} 96\% \\ 0\% \\ 88\% \\ 40\% \\ 0\% \end{pmatrix} + \frac{8}{16} \begin{pmatrix} 74\% \\ 98\% \\ 14\% \\ 46\% \\ 2\% \end{pmatrix} + \frac{6}{16} \begin{pmatrix} 56\% \\ 96\% \\ 8\% \\ 40\% \\ 16\% \end{pmatrix}$$

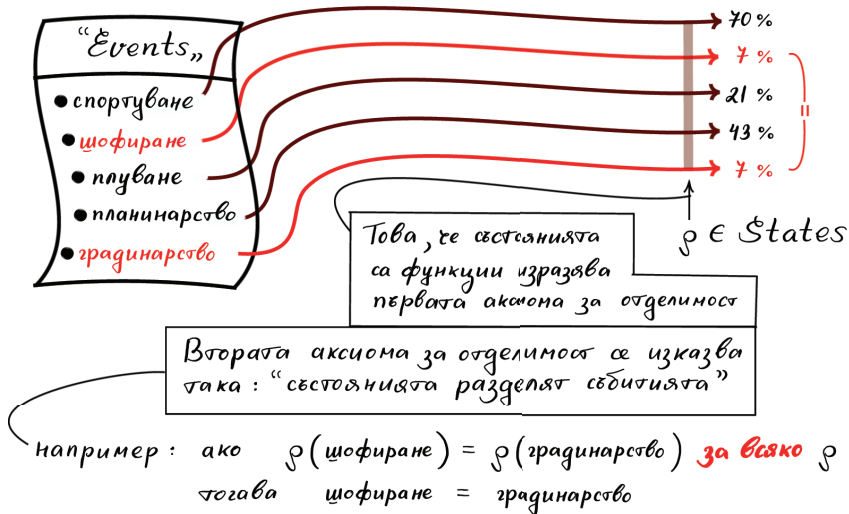


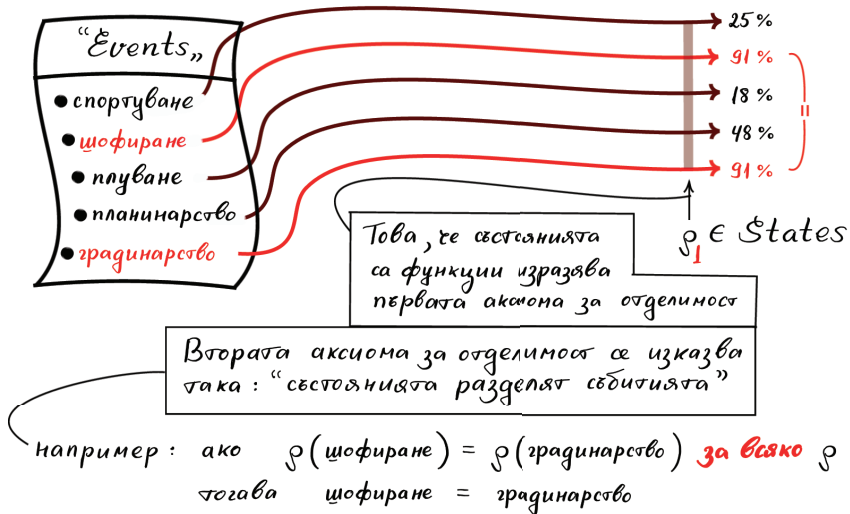


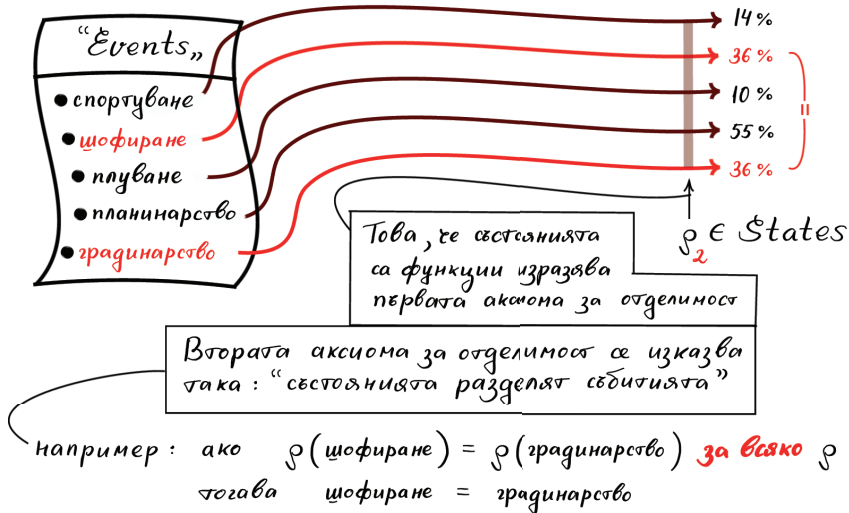


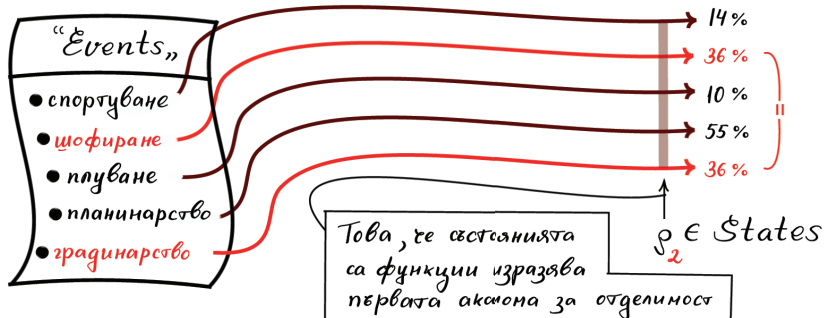








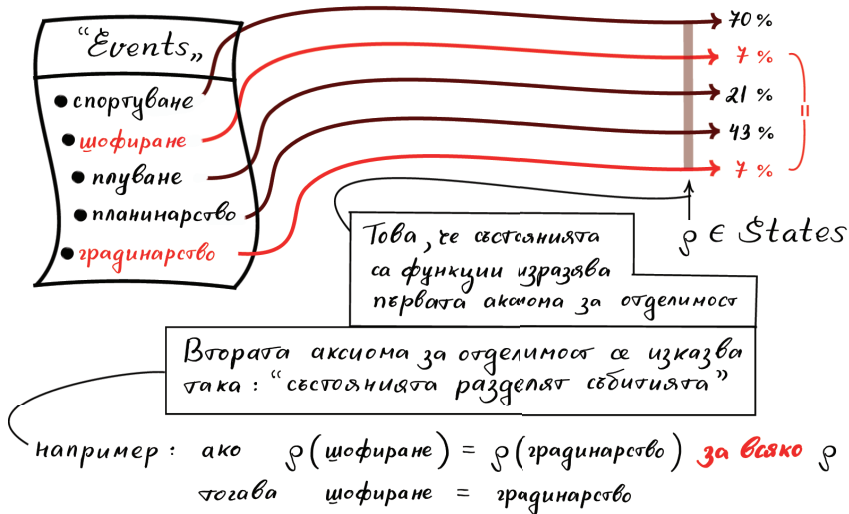


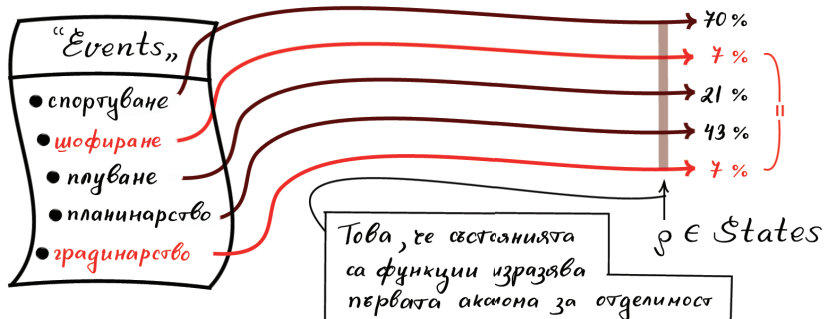


Втората аксиома за отделимост се изказва така: “състоянията разделят събитията”

и т.н.

например: ако $r(\text{шофиране}) = r(\text{градинарство})$ за всяко r
тогава шофиране = градинарство

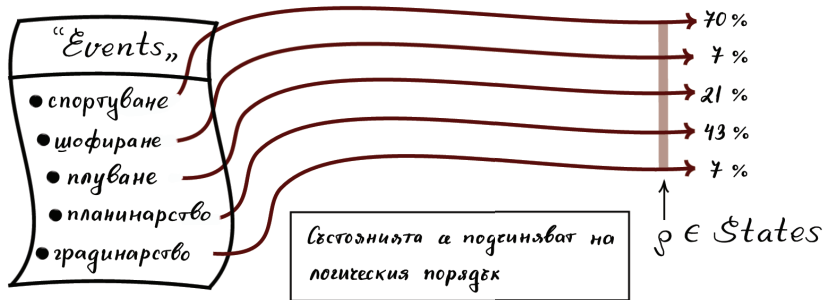


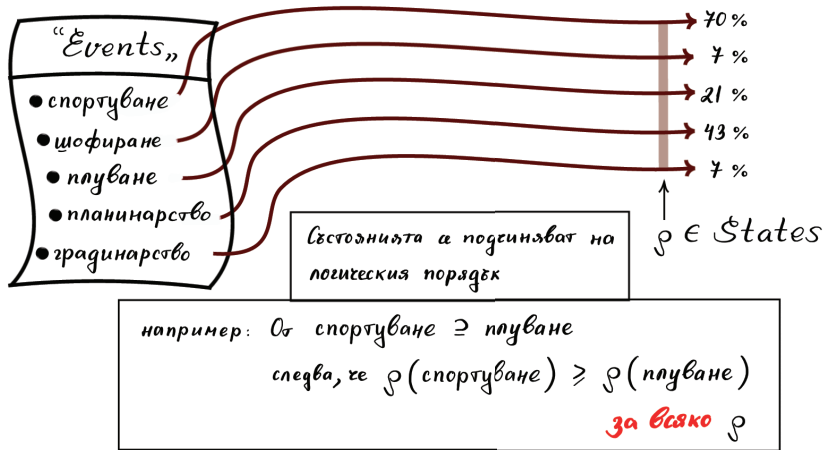


Втората аксиома за отделимост се изказва така: “състоянията разделят събитията”

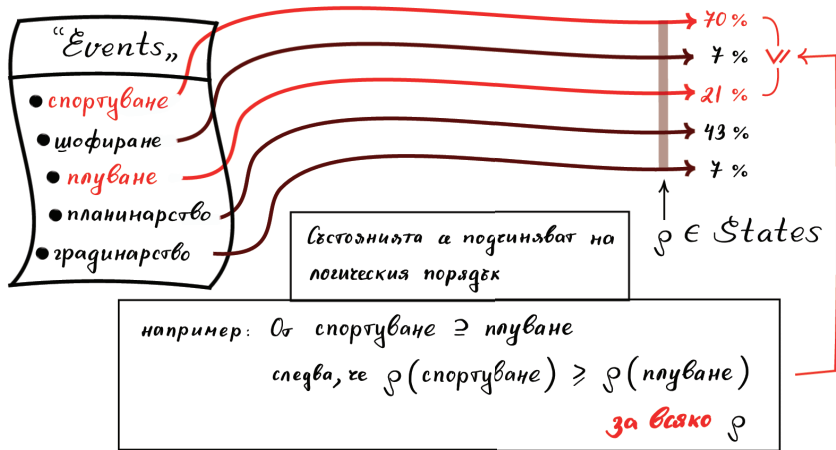
например: ако $r(\text{шофиране}) = r(\text{градинарство})$ за всяко r
 тогава шофиране = градинарство

статистическо отъждествяване





Забележка: От аксиомите ще следва твърдението и в обратната посока.



Забележка: От аксиомите ще следва твърдението и в обратната посока.

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Водеща роля в теоретичния модел ще играе множеството на събитията *Events*

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Водеща роля в теоретичния модел ще играе множеството на събитията *Events*

То ще изразява нашата "сетивност"
(способностите на наблюдателя за изпърване).

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Водеща роля в теоретичния модел ще играе множеството на събитията *Events*

То ще изразява нашата "сетивност"
(способностите на наблюдателя за изчерпване).

По такъв начин *Events* ще трябва еднозначно да определи *States*

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Водеща роля в теоретичния модел ще играе множеството на събитията *Events*

То ще изразява нашата "сетивност" (способностите на наблюдателя за измерване).

По такъв начин *Events* ще трябва еднозначно да определи *States*: състоянията на изследваните обекти не са им "вътрешно присъщи", а изразяват отклика на обектите на нашите измервания.

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Водеща роля в теоретичния модел ще играе множеството на събитията *Events*

То ще изразява нашата "сетивност" (способностите на наблюдателя за измерване).

По такъв начин *Events* ще трябва еднозначно да определи *States*: състоянията на изследваните обекти не са им "вътрешно присъщи", а изразяват отклика на обектите на нашите измервания.

Формално-аксиоматично, ние ще определим *States* като всевъзможните "вероятностни разпределения" върху *Events*.

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Водеща роля в теоретичния модел ще играе множеството на събитията *Events*

То ще изразява нашата "сетивност"
(способностите на наблюдателя за измерване).

По такъв начин *Events* ще трябва еднозначно да определи *States*: състоянията на изследваните обекти не са им "вътрешно присъщи", а изразяват отклика на обектите на нашите измервания.

Формално-аксиоматично, ние ще определим *States* като всевъзможните "вероятностни разпределения" върху *Events*. От тук ще следва, че *States* е изпъкнало подмножество на линейното пространство от функции върху *Events*. Така, аксиомата за смесването ще бъде автоматично изпълнена.

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Възможно е разширение на Events

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

Възможно е разширение на Events

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

Възможно е разширение на Events.

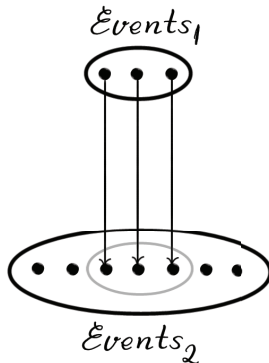
Това ще наричаме "надсистема", а в обратната посока: "подсистема".

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Възможно е разширение на Events.

Това ще наричаме "надсистема", а в обратната посока: "подсистема".

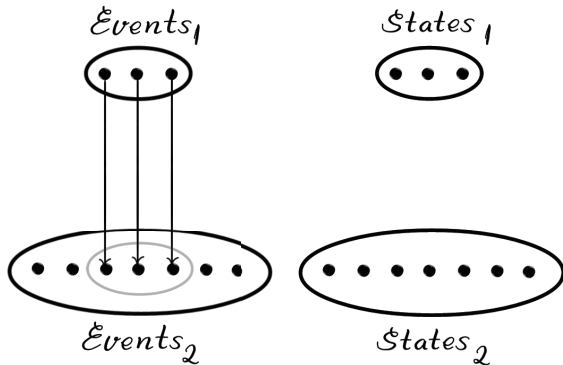


Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Възможно е разширение на Events.

Това ще наричаме "надсистема", а в обратната посока: "подсистема".

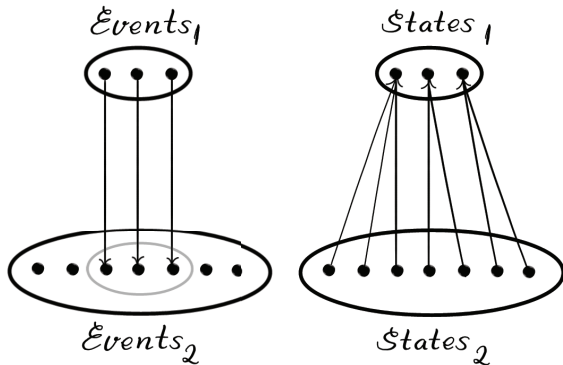


Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Възможно е разширение на Events.

Това ще наричаме "надсистема", а в обратната посока: "подсистема".

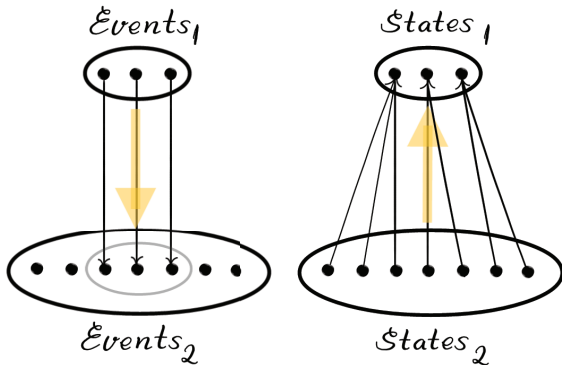


Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



Възможно е разширение на Events.

Това ще наричаме "надсистема", а в обратната посока: "подсистема".



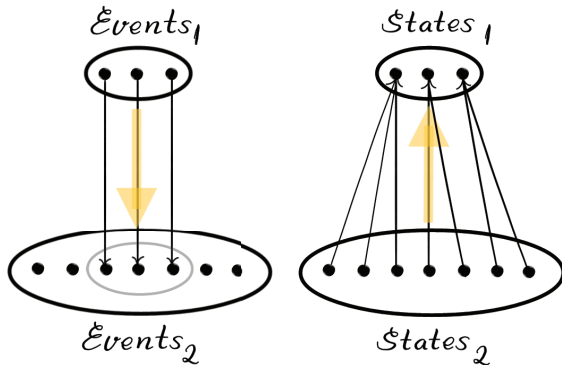
Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията



повече
подробности
- аксиоми !!!

Възможно е разширение на Events.

Това ще наричаме "надсистема", а в обратната посока: "подсистема".



Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

В Events ще имаме логическа структура
- квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

В Events ще имаме логическа структура
- квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

Ще имаме:

Установяването на
събитие "P и Q"

=

Установяването на
събитие "Q и P"

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

В Events ще имаме логическа структура
- квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

Ще имаме:

Установяването на
събитие "P и Q"

=

Установяването на
събитие "Q и P"

~~II~~

1. Установяване на P
2. Установяване на Q

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

В Events ще имаме логическа структура
- квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

Ще имаме:

Установяването на
събитие "P и Q"

=

Установяването на
събитие "Q и P"

~~||~~

1. Установяване на P
2. Установяване на Q

~~≠~~

1. Установяване на Q
2. Установяване на P

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

В Events ще имаме логическа структура
- квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

Ще имаме:

Установяването на
събитие "P и Q"

=

Установяването на
събитие "Q и P"

~~||~~

~~||~~

1. Установяване на P
2. Установяване на Q

$\neq$

1. Установяване на Q
2. Установяване на P

Някои общи водещи принципи в изграждането на теорията

"Events,"

- спортуване
- шофиране
- плуване
- планинарство
- градинарство
- пчеларство
- колоездене
- риболов

В Events ще имаме логическа структура
- квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

Ще имаме:

плуване и риболов ?

=

риболов и плуване ?

~~||~~

~~||~~

1. плуване ?

2. риболов ?

$\neq$

1. риболов ?

2. плуване ?

Пример от социологията



Квантова социология ?



Квантова { социология
психология ?
икономика



Квантова { социология
психология ?
икономика

Защо не , но ...

нужна е сериозна експериментална обосновка



Квантова { социология
психология ?
икономика

Защо не , но ...

нужна е сериозна експериментална обосновка
и ... линейна алгебра ...

Бърз преглед на квантово-логическия подход до края

а) Квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/BVN1936.pdf

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936



(1911 – 1996)



(1903 – 1957)

Бърз преглед на квантово-логическия подход до края

а) Квантовата логика на Биркхоф и фон Нойман

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/BVN1936.pdf

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936



(1911 – 1996)



(1903 – 1957)

1. Introduction. One of the aspects of quantum theory which has attracted the most general attention, is the novelty of the logical notions which it presupposes. It asserts that even a complete mathematical description of a physi-

Основен обект за математическо моделиране са "експерименталните твърдения / съждения" ("experimental propositions"), за които можем да си мислим като за експериментални тестове, чийто резултати са "да" ("1") или "не" ("0").

Наричаме ги също (експериментални) "събития" и ще ги бележим с $P, Q, R, \dots$
Казваме: "събитието P е (респ., не е) установено" и пишем " $P = 1$ " (респ., " $P = 0$ ").

Събитията формират множеството $Events$

Основен обект за математическо моделиране са "експерименталните твърдения / съждения" ("experimental propositions"), за които можем да си мислим като за експериментални тестове, чийто резултати са "да" ("1") или "не" ("0").

Наричаме ги също (експериментални) "събития" и ще ги бележим с $P, Q, R, \dots$
Казваме: "събитието P е (респ., не е) установено" и пишем " $P=1$ " (респ., " $P=0$ ").

Събитията формират множеството *Events*

Изходната математическа структура върху множеството на всички събития е на гастична наредба. Тя изразява елементарното логическо следствие между събития

$$P \preceq Q \Leftrightarrow \begin{cases} "P=1" \Rightarrow "Q=1" \\ "Q=0" \Rightarrow "P=0" \end{cases}$$

The experimental propositions concerning any system in classical mechanics, correspond to a “field” of subsets of its phase-space. More precisely: To the “quotient” of such a field by an ideal in it. At any rate they form a “Boolean Algebra.”⁹

The experimental propositions concerning any system in classical mechanics, correspond to a “field” of subsets of its phase-space. More precisely: To the “quotient” of such a field by an ideal in it. At any rate they form a “Boolean Algebra.”⁹

p.826

DEFINITION: A partially ordered system L will be called a “lattice” if and only if to any pair x and y of its elements there correspond

S5: A “meet” or “greatest lower bound” $x \cap y$ such that (5a) $x \cap y \subset x$, (5b) $x \cap y \subset y$, (5c) $z \subset x$ and $z \subset y$ imply $z \subset x \cap y$.

S6: A “join” or “least upper bound” $x \cup y$ satisfying (6a) $x \cup y \supset x$, (6b) $x \cup y \supset y$, (6c) $w \supset x$ and $w \supset y$ imply $w \supset x \cup y$.

p.829

The experimental propositions concerning any system in classical mechanics, correspond to a “field” of subsets of its phase-space. More precisely: To the “quotient” of such a field by an ideal in it. At any rate they form a “Boolean Algebra.”⁹

p.826

DEFINITION: A partially ordered system L will be called a “lattice” if and only if to any pair x and y of its elements there correspond

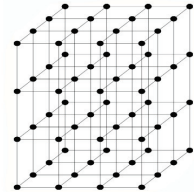
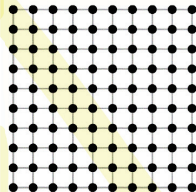
S5: A “meet” or “greatest lower bound” $x \cap y$ such that (5a) $x \cap y \subset x$, (5b) $x \cap y \subset y$, (5c) $z \subset x$ and $z \subset y$ imply $z \subset x \cap y$.

S6: A “join” or “least upper bound” $x \cup y$ satisfying (6a) $x \cup y \supset x$, (6b) $x \cup y \supset y$, (6c) $w \supset x$ and $w \supset y$ imply $w \supset x \cup y$.

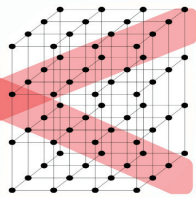
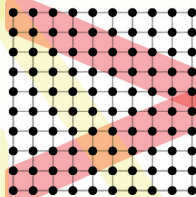
В решетке : $P \wedge Q = P \Leftrightarrow P \preceq Q$ (пишем $\wedge$ вместо $\cap$) ,
 $P \vee Q = Q \Leftrightarrow P \preceq Q$ (пишем $\vee$ вместо $\cup$) .

p.829

Внимание: тук термина
“решетка” / “lattice” няма
нищо общо с решетките в
геометрията

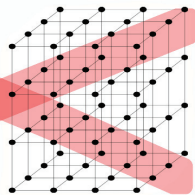
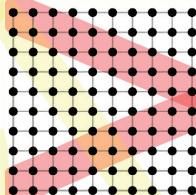
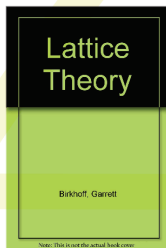


Внимание: тук термина
“решетка” / “lattice” няма
нищо общо с решетките в
геометрията



Внимание: тук термина
“решетка” / “lattice” няма
нищо общо с решетките в
геометрията

Допълнителна
литература :



...

Закони на квантовата логика

$$\left. \begin{aligned} P \wedge Q &= P \Leftrightarrow P \preceq Q, \\ P \vee Q &= Q \Leftrightarrow P \preceq Q, \end{aligned} \right\} \text{ задават връзките } \wedge \leftrightarrow \preceq \leftrightarrow \vee$$

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, \quad P \vee P = P,$$

$$P \wedge 0 = 0, \quad P \vee 0 = P, \quad P \wedge 1 = P, \quad P \vee 1 = 1,$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \vee P^\perp = 1, \quad P \wedge P^\perp = 0,$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

аксиоми на решетка

единица 1 и нула 0

аксиоми на отрицанието $\perp$

орторешетка

Закони на **класическата** логика

$$\left. \begin{aligned} P \wedge Q &= P \Leftrightarrow P \preceq Q, \\ P \vee Q &= Q \Leftrightarrow P \preceq Q, \end{aligned} \right\} \text{ задават връзките } \wedge \leftrightarrow \preceq \leftrightarrow \vee$$

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, \quad P \vee P = P,$$

$$P \wedge 0 = 0, \quad P \vee 0 = P, \quad P \wedge 1 = P, \quad P \vee 1 = 1,$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \vee P^\perp = 1, \quad P \wedge P^\perp = 0,$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R), \quad \left. \begin{aligned} & \end{aligned} \right\} \text{ дистрибутивност}$$

аксиоми на решетка

единица 1 и нула 0

аксиоми на отрицанието $\perp$

орторешетка

Закони на **класическата** логика

$$P \wedge Q = P \Leftrightarrow P \leq Q,$$

$$P \vee Q = Q \Leftrightarrow P \leq Q,$$

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, \quad P \vee P = P,$$

$$P \wedge 0 = 0, \quad P \vee 0 = P, \quad P \wedge 1 = P, \quad P \vee 1 = 1,$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \vee P^\perp = 1, \quad P \wedge P^\perp = 0,$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$

задават връзките $\wedge \leftrightarrow \leq \leftrightarrow \vee$ БУЛЕВА
АЛГЕБРА

аксиоми на решетка

единица 1 и нула 0

аксиоми на отрицанието $\perp$

дистрибутивност

ортотрешетка

Закони на **класическата** логика

$$\left. \begin{aligned} P \wedge Q &= P \Leftrightarrow P \preceq Q, \\ P \vee Q &= Q \Leftrightarrow P \preceq Q, \end{aligned} \right\} \text{ задават връзките } \wedge \leftrightarrow \preceq \leftrightarrow \vee$$

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, \quad P \vee P = P,$$

$$P \wedge 0 = 0, \quad P \vee 0 = P, \quad P \wedge 1 = P, \quad P \vee 1 = 1,$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \vee P^\perp = 1, \quad P \wedge P^\perp = 0,$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R), \quad \left. \begin{aligned} & \end{aligned} \right\} \text{ дистрибутивност}$$

аксиоми на решетка

единица 1 и нула 0

аксиоми на отрицанието $\perp$

орторешетка

Закони на квантовата логика

$$\left. \begin{aligned} P \wedge Q &= P \Leftrightarrow P \preceq Q, \\ P \vee Q &= Q \Leftrightarrow P \preceq Q, \end{aligned} \right\} \text{ задават връзките } \wedge \leftrightarrow \preceq \leftrightarrow \vee$$

$$\left. \begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &= (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R, \\ P \wedge Q &= Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P, \\ P \vee (P \wedge Q) &= P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P, \\ P \wedge P &= P, \quad P \vee P = P, \\ P \wedge 0 &= 0, \quad P \vee 0 = P, \quad P \wedge 1 = P, \quad P \vee 1 = 1, \\ (P^\perp)^\perp &= P, \\ P \vee P^\perp &= 1, \quad P \wedge P^\perp = 0, \\ (P \wedge Q)^\perp &= P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{аксиоми на решетка} \\ \text{единица 1 и нула 0} \\ \text{аксиоми на отрицанието } \perp \end{array}$$

орторешетка

$$\cancel{P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}, \quad \} \text{ дистрибутивност}$$

Закони на квантовата логика

$$P \wedge Q = P \Leftrightarrow P \leq Q,$$

} задават връзките $\wedge \leftrightarrow \leq \leftrightarrow \vee$

НАКРАТКО:

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

Законите на квантовата логика включват тези на аксиоми на решетка

$$P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P,$$

класическата логика, с изключение на законите на единица 1 и нула 0

$$P \wedge 0 = 0, P \vee 0 = P, P \wedge 1 = P, P \vee 1 = 1,$$

дистрибутивност

$$P \vee P^\perp = 1, P \wedge P^\perp = 0,$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

~~$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$~~ } дистрибутивност

на решетка

б) Геометрия на квантовата логика

б) Геометрия на квантовата логика

Определения ■ $P \preceq Q$ $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $P \preceq Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва,
"Q покрива P" $\neq$ че $P = R$ или $R = Q$.

б) Геометрия на квантовата логика

Определения ■ $P \preceq Q$ $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $P \preceq Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва,
 “Q покрива P” $\neq$ че $P = R$ или $R = Q$.

■ P е елементарно събитие $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $0 \preceq P$

б) Геометрия на квантовата логика

Определения ■ $P \preceq Q$ $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $P \preceq Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва,
 “Q покрива P” $\neq$ че $P = R$ или $R = Q$.

■ P е елементарно събитие $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $0 \preceq P$

■ Обявяване елементарните събития P за “точки на геометрия”

б) Геометрия на квантовата логика

Определения ■ $P \preceq Q$ $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $P \preceq Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва,
 “Q покрива P” $\neq$ че $P = R$ или $R = Q$.

■ P е елементарно събитие $\xLeftrightarrow[\text{опр.}]$ $0 \preceq P$

■ Обявяване елементарните събития P за “точки на геометрия”, а събитията L , които покриват елементарни събития обявяване за “прави на геометрия”

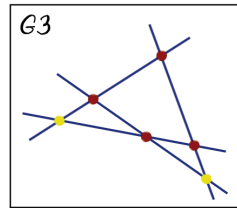
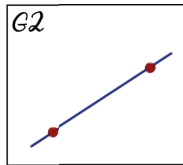
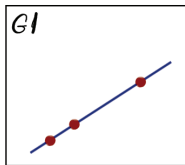
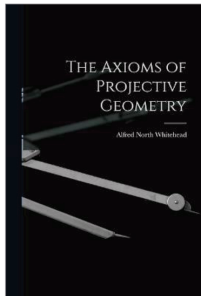
б) Геометрия на квантовата логика

Определения ■ $P \preceq Q \iff_{\text{опр.}} P \preceq Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва,
 “ Q покрива P ” $\neq$ че $P = R$ или $R = Q$.

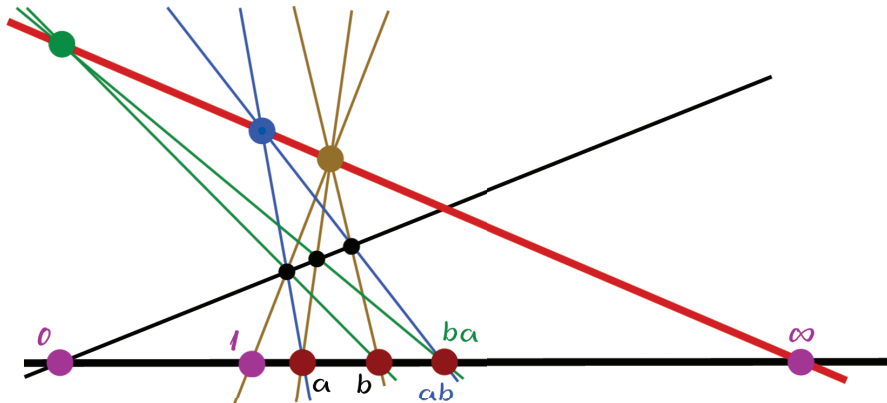
■ P е елементарно събитие $\iff_{\text{опр.}} 0 \preceq P$

■ Обявяваме елементарните събития P за “точки на геометрия”, а събитията L , които покриват елементарни събития обявяваме за “прави на геометрия” и казваме, че: “ P лежи на L ” $\iff_{\text{опр.}} P \preceq L$.

Тогава, при определени допълнителни аксиоматични предположения за орторешетката на събитията следва, че полученото геометрично пространство ще изпълнява т.нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) на проективната геометрия

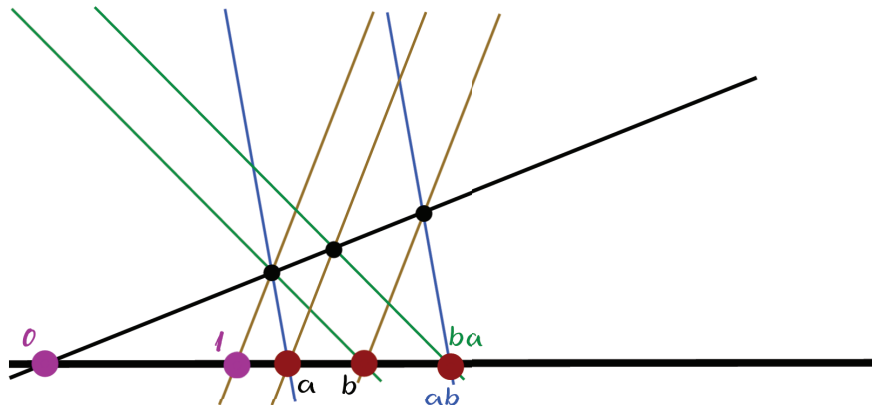


Аритметика в проективната геометрия: произведение



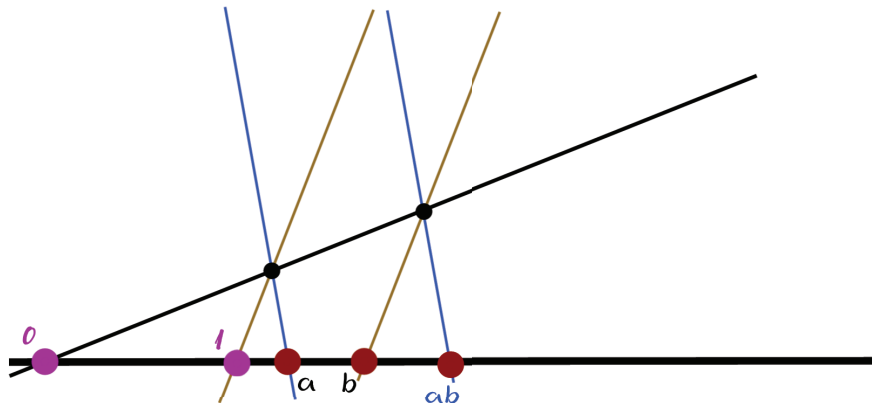
Всяка права с безкрайни три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

Аритметика в проективната геометрия: произведение



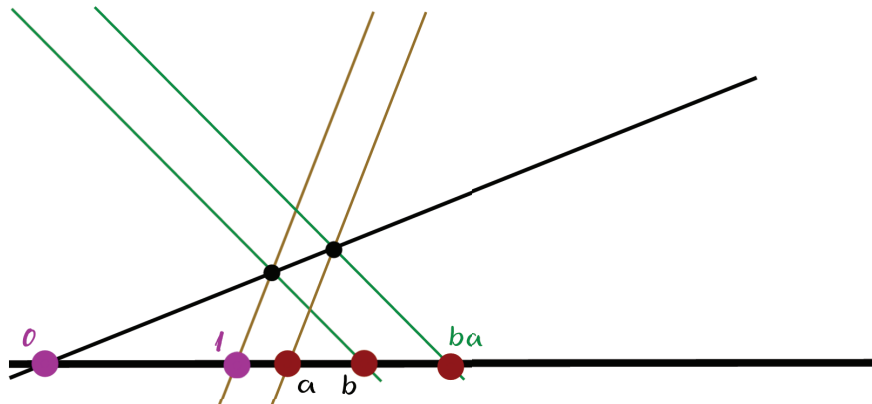
Всяка права с безизлишни три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

Аритметика в проективната геометрия: произведение



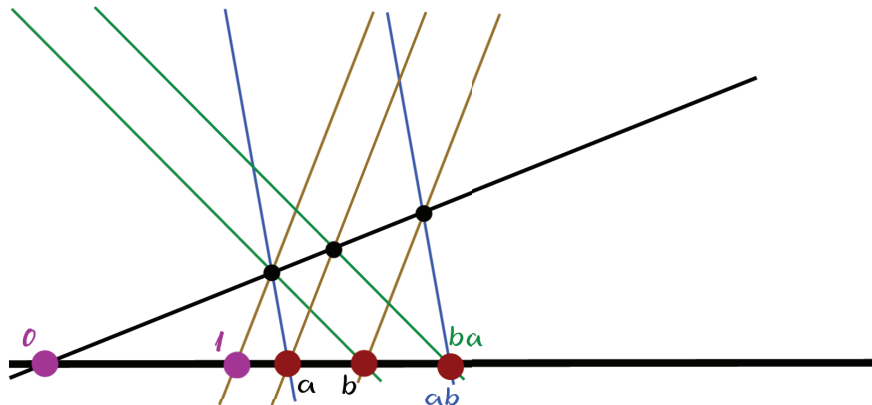
Всяка права с безкрайни три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

Аритметика в проективната геометрия: произведение



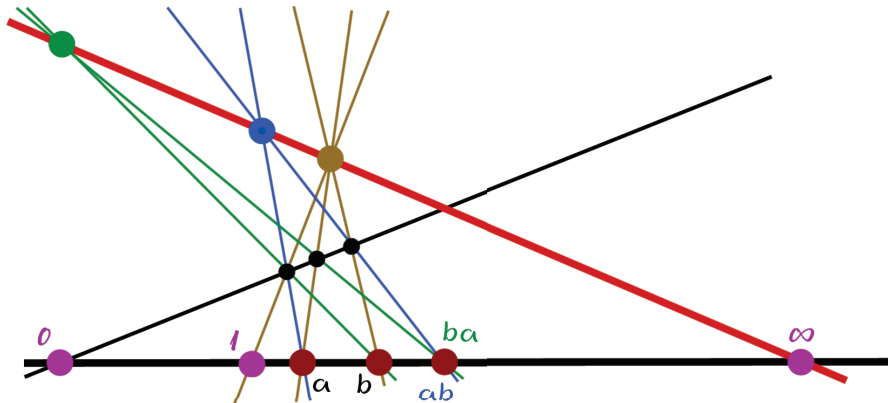
Всяка права с безкрайни три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

Аритметика в проективната геометрия: произведение



Всяка права с безкрайни три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

Аритметика в проективната геометрия: произведение



Всяка права с безизлишни три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

Основните модели на орторешетките "Events" на квантовите събития са от вида:

$\text{Events} := \mathcal{G}(\mathcal{H}) :=$ множеството на всички (затворени) линейни подпространства на (комплексно) хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с естествена наредба на включване $\subseteq$ и $\perp :=$ ортогоналното допълнение



алтернативно
означение

Основните модели на орторешетките "Events" на квантовите събития са от вида:

$\text{Events} := \mathcal{G}(\mathcal{H}) :=$ множеството на всички (затворени) линейни подпространства на (комплексно) хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с естествена наредба на включване $\subseteq$ и $\perp :=$ ортогоналното допълнение



алтернативно
означение

"хилбертово пространство на състоянията"

Основните модели на орторешетките "Events" на квантовите събития са от вида:

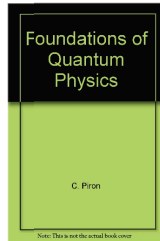
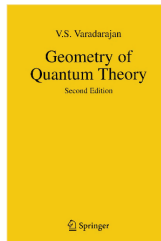
$\text{Events} := \mathcal{G}(\mathcal{H}) :=$ множеството на всички (затворени) линейни подпространства на (комплексно) хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с естествата наредба на включване $\subseteq$ и $\perp :=$ ортогоналното допълнение

$\mathcal{L}$

алтернативно
означение

"хилбертово пространство на състоянията"

Възможни са
и по-обща
модели



http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Varadarajan.pdf

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Piron.pdf

в) Заключителни аксиоми за квантовите събития

Аксиома за орто-модуларност : Ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (Q \wedge P^\perp) = Q$

Закон за покриването : Ако $0 \preceq P$ и $P \wedge Q = 0$ тогава $Q \preceq P \vee Q$

Аксиома за крайност : $\exists N \in \mathbb{N} : 0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \dots \preceq P_{N-1} \preceq 1$

в) Заключителни аксиоми за квантовите събития

Аксиома за орто-модуларност : Ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (Q \wedge P^\perp) = Q$

Закон за покриването : Ако $0 \preceq P$ и $P \wedge Q = 0$ тогава $Q \preceq P \vee Q$

Аксиома за крайност : $\exists N \in \mathbb{N} : 0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \dots \preceq P_{N-1} \preceq 1$

Това са всички структуро-определящи аксиоми на квантовата теория.
Останалите аксиоми са по-скоро определения на допълнителни понятия
(с изключение на постулата за измерването)

Формална част

Аксиоми на квантово-логическия подход – продължение

Аксиоми на квантово-логическия подход – продължение

Логическата наредба между събитията

Аксиоми на квантово-логическия подход – продължение

Логическата наредба между събитията

Въвеждаме бинарна релация в множеството на събитията *Events*:

Аксиоми на квантово-логическия подход – продължение

Логическата наредба между събитията

Въвеждаме бинарна релация в множеството на събитията *Events*:
за $P, Q \in \mathbf{Events}$ нека

$P \preceq Q$ се определя чрез условието,
че за всички състояния $\rho, \sigma \in \mathbf{States}$,
от $\text{Prob}_\rho(P) = 1$ следва, че $\text{Prob}_\rho(Q) = 1$,
от $\text{Prob}_\sigma(Q) = 0$ следва, че $\text{Prob}_\sigma(P) = 0$.

Аксиоми на квантово-логическия подход – продължение

Логическата наредба между събитията

Въвеждаме бинарна релация в множеството на събитията *Events*:
за $P, Q \in \mathbf{Events}$ нека

$P \preceq Q$ се определя чрез условието,
че за всички състояния $\rho, \sigma \in \mathbf{States}$,
от $\text{Prob}_\rho(P) = 1$ следва, че $\text{Prob}_\rho(Q) = 1$,
от $\text{Prob}_\sigma(Q) = 0$ следва, че $\text{Prob}_\sigma(P) = 0$.

Когато $P \preceq Q$ ще казваме, че

събитието P се мажорира от събитието Q .

Аксиоми на квантово-логическия подход – продължение

Логическата наредба между събитията

Въвеждаме бинарна релация в множеството на събитията *Events*:
за $P, Q \in \text{Events}$ нека

$P \preceq Q$ се определя чрез условието,
че за всички състояния $\rho, \sigma \in \text{States}$,
от $\text{Prob}_\rho(P) = 1$ следва, че $\text{Prob}_\rho(Q) = 1$,
от $\text{Prob}_\sigma(Q) = 0$ следва, че $\text{Prob}_\sigma(P) = 0$.

Когато $P \preceq Q$ ще казваме, че

събитието P **се мажорира** от събитието Q .

Синоними:

$Q \succcurlyeq P$, “ Q мажорира P ”, “ P се съдържа в Q ”,
“ Q съдържа P ”, “от P следва Q ”, “ Q следва от P ”.

Непосредствени следствия (чисто логически):

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност)

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

(транзитивност)

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

(транзитивност) за всеки три събития P , Q и R имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$ следва $P \preceq R$.

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

(транзитивност) за всеки три събития P , Q и R имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$ следва $P \preceq R$.

Като поредна *аксиома* налагаме следното свойство:

■ (антисиметрия)

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

(транзитивност) за всеки три събития P , Q и R имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$ следва $P \preceq R$.

Като поредна *аксиома* налагаме следното свойство:

■ (антисиметрия) за всеки две събития P и Q имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq P$ следва $P = Q$.

Непосредствени следствия (чисто логически):

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

(транзитивност) за всеки три събития P , Q и R имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$ следва $P \preceq R$.

Като поредна *аксиома* налагаме следното свойство:

■ (антисиметрия) за всеки две събития P и Q имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq P$ следва $P = Q$.

Еквивалентно, $P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} Prob_{\rho}(P) = 1 \Leftrightarrow Prob_{\rho}(Q) = 1 \quad (\forall \rho), \\ Prob_{\sigma}(P) = 0 \Leftrightarrow Prob_{\sigma}(Q) = 0 \quad (\forall \sigma). \end{cases}$

Издадена с думи горната аксиома гласи, че ако P , респективно, настъпва или не настъпва, тогава и само тогава, когато Q настъпва или не настъпва, то тогава P и Q са едно и също събитие. Новата аксиомата засилва втората аксиома за отделимост, както непосредствено се вижда от еквивалентната формулировка.

И така, свойствата на релацията $\preceq$ са:

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме: $P \preceq P$;

(транзитивност) за всеки три събития P , Q и R имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$ следва $P \preceq R$;

(антисиметрия) за всеки две събития P и Q имаме че:
от $P \preceq Q$ и $Q \preceq P$ следва $P = Q$.

По такъв начин, множеството *Events*, снабдено с релацията $\preceq$, се превръща в *частично наредено множество* (partially ordered set = poset), тъй като (нека припомним, че) горните три свойства се явяват дефиниционни за това.

В следствие на допълнителни аксиоми ще получим усилването:

$P \preceq Q$ тогава и само тогава, когато

за всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$: $Prob_{\rho}(P) \leq Prob_{\rho}(Q)$

За класическите системи, когато $\mathcal{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$, релацията $\preceq$ е просто релацията на включване на едно подмножество в друго:

$$P \preceq Q \iff P \subseteq Q$$

за всеки $P, Q \subseteq \Omega$ (т.е., $P, Q \in \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{Events}$).

За квантовите системи, когато $\mathcal{Events} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, релацията $\preceq$ е отново релацията на включване, но едно линейно подпространство в друго:

$$V \preceq W \iff V \subseteq W$$

за всеки $V, W \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$ (т.е., $V, W \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{Events}$).

Аксиома за нулата и единицата:

■ в частично нареденото множество на всички събития съществуват *най-голям* *най-малък* елемент.

Последните ще означаваме с **0 (нула)** и **1 (единица)**, съответно.

невъзможното събитие

винаги изпълненото събитие

Аксиома за нулата и единицата:

в частично нареденото множество на всички събития съществуват *най-голям* *най-малък* елемент.

Последните ще означаваме с **0** (нула) и **1** (единица), съответно.

невъзможното събитие

винаги изпълненото събитие

Написано с формули: за всяко събитие $P \in \mathcal{Events}$ имаме:

$$0 \preceq P \preceq 1.$$

Аксиома за нулата и единицата:

в частично нареденото множество на всички събития съществуват *най-голям* *най-малък* елемент.

Последните ще означаваме с **0** (нула) и **1** (единица), съответно.
невъзможното събитие винаги изпълненото събитие

Написано с формули: за всяко събитие $P \in \mathcal{Events}$ имаме:

$$0 \preceq P \preceq 1.$$

От допълнителните аксиоми по-нататък ще следва, че:

$P = 0$ тогава и само тогава, когато
за всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$: $Prob_{\rho}(P) = 0$.

и също $P = 1$ тогава и само тогава, когато
за всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$: $Prob_{\rho}(P) = 1$.

За класическите системи (когато $\mathcal{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$):

$$0 = \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega) (= \mathcal{Events}),$$

$$1 = \Omega \in \mathcal{P}(\Omega) (= \mathcal{Events}).$$

За класическите системи (когато $\mathcal{E}vents = \mathcal{P}(\Omega)$):

$$\mathbf{0} = \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega) (= \mathcal{E}vents),$$

$$\mathbf{1} = \Omega \in \mathcal{P}(\Omega) (= \mathcal{E}vents).$$

За квантовите системи (когато $\mathcal{E}vents = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$):

$$\mathbf{0} = \{0\} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) (= \mathcal{E}vents),$$

$$\mathbf{1} = \mathbb{C}^n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) (= \mathcal{E}vents).$$

Логическите операции “и” и “или” за събития

Всяко частично наредено множество допуска формулирането на логическите операции “и” и “или” посредством понятията за *инфимум* (или още, *точна долна граница*) и *супремум* (*точна горна граница*), съответно.

Логическите операции “и” и “или” за събития

Всяко частично наредено множество допуска формулирането на логическите операции “и” и “или” посредством понятията за *инфимум* (или още, *точна долна граница*) и *супремум* (*точна горна граница*), съответно.

Нашата следваща *аксиома* е, че

в множеството на всички събития съществуват инфимумите и супремумите на произволни подмножества от събития.

Припомняне: ако $(\mathcal{T}, \preccurlyeq)$ е едно частично наредено множество и $S \subseteq \mathcal{T}$, то **инфимум** на S се определя като:

$$\wedge S (\equiv \inf S) := a \iff \begin{cases} \forall x \in S : a \preccurlyeq x \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : y \preccurlyeq x) \Rightarrow y \preccurlyeq a. \end{cases}$$

Изказано с думи, a е най-големия елемент в множеството на всички елементи y , които са по-малки от всеки елемент x на S .

Припомняне: ако $(\mathcal{T}, \preceq)$ е едно частично наредено множество и $S \subseteq \mathcal{T}$, то **инфимум** на S се определя като:

$$\bigwedge S (\equiv \inf S) := a \iff \begin{cases} \forall x \in S : a \preceq x \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : y \preceq x) \Rightarrow y \preceq a. \end{cases}$$

Изказано с думи, a е най-големия елемент в множеството на всички елементи y , които са по-малки от всеки елемент x на S .

Дуално понятие е **супремум**:

$$\bigvee S (\equiv \sup S) := a \iff \begin{cases} \forall x \in S : x \preceq a \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : x \preceq y) \Rightarrow a \preceq y. \end{cases}$$

Изказано с думи, a е най-малкия елемент в множеството на всички елементи y , които са по-големи от всеки елемент x на S .

Подчертаваме, че елементите $\bigwedge S$ и $\bigvee S$ не винаги съществуват.

Доказва се обаче, че ако съществуват $\bigwedge S$ или $\bigvee S$, то определенията по-горе ги дефинират еднозначно.

Забележка: Нека отбележим, че ако частично нареденото множество $(\mathcal{T}, \preceq)$ има нула и единица, то

- $\wedge \emptyset = \mathbf{1}, \quad \vee \emptyset = \mathbf{0}, \quad \wedge \mathcal{T} = \mathbf{0}, \quad \vee \mathcal{T} = \mathbf{1}.$
- $\vee S = \wedge \{y \in \mathcal{T} \mid \forall x \in S : x \preceq y\}.$
- $\wedge S = \vee \{y \in \mathcal{T} \mid \forall x \in S : y \preceq x\}.$

В математиката, частично наредени множества, в които произволни, непразни, крайни подмножества от елементи имат супремум и инфимум, се наричат *решетки* (наредбени)(**lattice**).

В математиката, частично наредени множества, в които произволни, непразни, крайни подмножества от елементи имат супремум и инфимум, се наричат *решетки* (наредбени)(**lattice**).

Ако в решетка съществуват супремумите и инфимумите на произволни подмножества, тогава решетката се нарича *пълна* (**complete lattice**).

В математиката, частично наредени множества, в които произволни, непразни, крайни подмножества от елементи имат супремум и инфимум, се наричат *решетки* (наредбени)(**lattice**).

Ако в решетка съществуват супремумите и инфимумите на произволни подмножества, тогава решетката се нарича *пълна* (**complete lattice**).

По такъв начин, аксиомите формулирани до тук могат да се свият просто до формулировката, че *множеството на събитията **Events** е пълна решетка с нула и единица, спрямо операцията “ $\preceq$ ”, в качеството на частична наредба.*

Особено важен случай е, когато имаме инфимум и супремум на множество от два елемента. За $P, Q \in \mathcal{Events}$ полагаме:

$$P \wedge Q \quad (\equiv \quad P \text{ и } Q \quad) := \wedge \{P, Q\},$$

$$P \vee Q \quad (\equiv \quad P \text{ или } Q \quad) := \vee \{P, Q\}$$

Особено важен случай е, когато имаме инфимум и супремум на множество от два елемента. За $P, Q \in \mathcal{Events}$ полагаме:

$$P \wedge Q \quad (\equiv \quad P \text{ и } Q \quad) := \wedge \{P, Q\},$$

$$P \vee Q \quad (\equiv \quad P \text{ или } Q \quad) := \vee \{P, Q\}$$

и по-нататък ние основно ще използваме означения “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” за обозначаване на логическите операции “и” и “или” между събитията, съответно.

Особено важен случай е, когато имаме инфимум и супремум на множество от два елемента. За $P, Q \in \mathcal{Events}$ полагаме:

$$P \wedge Q \quad (\equiv \quad P \text{ и } Q \quad) := \wedge \{P, Q\},$$

$$P \vee Q \quad (\equiv \quad P \text{ или } Q \quad) := \vee \{P, Q\}$$

и по-нататък ние основно ще използваме означения “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” за обозначаване на логическите операции “и” и “или” между събитията, съответно.

По-нататък, операциите “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” ще наричаме също **решетъчни операции**.

“ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” могат да се разглеждат, като бинарни операции..

За класическите системи множеството на събитията, което е степенното множество, е пълна решетка.

За класическите системи множеството на събитията, което е степенното множество, е пълна решетка.

В този случай решетъчните операции “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” съвпадат с теоретико-множествените операции сечение “ $\cap$ ” и обединение “ $\cup$ ”, съответно:

$$P \wedge Q = P \cap Q, \quad P \vee Q = P \cup Q$$

за всеки $P, Q \in \mathcal{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

Аксиома за отрицанието:

за всяко събитие P съществува събитие Q такова, че Q се случва (наблюдава) тогава и само тогава, когато P не се случва, както и P се случва тогава и само тогава, когато Q не се случва.

Аксиома за отрицанието:

за всяко събитие P съществува събитие Q такова, че Q се случва (наблюдава) тогава и само тогава, когато P не се случва, както и P се случва тогава и само тогава, когато Q не се случва.

Написано с формула това условие изглежда така: за всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{\rho}(P) = 1 & \iff \text{Prob}_{\rho}(Q) = 0, \\ \text{Prob}_{\rho}(P) = 0 & \iff \text{Prob}_{\rho}(Q) = 1 \end{aligned}$$

От аксиомата за наредбата следва, че събитието Q е еднозначно определено от събитието P .

Аксиома за отрицанието:

за всяко събитие P съществува събитие Q такова, че Q се случва (наблюдава) тогава и само тогава, когато P не се случва, както и P се случва тогава и само тогава, когато Q не се случва.

Написано с формула това условие изглежда така: за всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} Prob_{\rho}(P) = 1 & \iff Prob_{\rho}(Q) = 0, \\ Prob_{\rho}(P) = 0 & \iff Prob_{\rho}(Q) = 1 \end{aligned}$$

От аксиомата за наредбата следва, че събитието Q е еднозначно определено от събитието P .

Ще казваме, че Q е **отрицание на събитието P** и ще пишем:

$$Q =: P^{\perp} (\equiv \text{не } P).$$

Следствие: $P_1 \preceq P_2 \implies P_2^\perp = P_1^\perp.$

От останалите аксиоми по-нататък ще покажем, че:

$$\text{Prob}_\rho(P^\perp) = 1 - \text{Prob}_\rho(P)$$

за всички $P \in \mathcal{Events}$ и $\rho \in \mathcal{States}$.

За класическите системи отрицанието е теоретико-множественото допълнение:

$$P^\perp = \Omega \setminus P$$

за всеки $P, Q \in \mathcal{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

Общи закони на съжителното (пропозиционалното) смятане за събития

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

твърдения за асоциативност;

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

твърдения за комутативност;

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

твърдения за “поглъщането”;

$$P \wedge P = P = P \vee P,$$

твърдения за идемпотентност;

$$P \wedge Q = P \Leftrightarrow Q \preceq P, \quad P \vee Q = Q \Leftrightarrow P \preceq Q,$$

обратна характеристика на релацията на частична наредба $\preceq$
посредством операциите $\wedge$ или $\vee$;

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

идемпотентността на отрицанието;

$$P \vee P^\perp = \mathbf{1}, \quad P \wedge P^\perp = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}^\perp = \mathbf{0},$$

закон за изключеното трето и др.;

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

законите на де Морган.

(за всеки $P, Q, R \in \mathcal{Events}$).

Това са законите за класическото съждително смятане, от които са изпуснати само законите за *дистрибутивност*:

$$\begin{aligned}P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R).\end{aligned}$$

Това са законите за класическото съждително смятане, от които са изпуснати само *законите за дистрибутивност*:

$$\begin{aligned}P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R).\end{aligned}$$

В общия случай, това което следва вместо тъждествата за дистрибутивност, са неравенства:

$$\begin{aligned}P \wedge (Q \vee R) &\succcurlyeq (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\P \vee (Q \wedge R) &\preccurlyeq (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\end{aligned}$$

Това са законите за класическото съжително смятане, от които са изпуснати само законите за дистрибутивност:

$$\begin{aligned}P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R).\end{aligned}$$

В общия случай, това което следва вместо тъждествата за дистрибутивност, са неравенства:

$$\begin{aligned}P \wedge (Q \vee R) &\succcurlyeq (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\P \vee (Q \wedge R) &\preccurlyeq (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\end{aligned}$$

В алгебрата, множество с бинарни операции “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” и едномесна операция “ $\perp$ ”, в което изпълняват тъждествата от предната страница, се нарича **орто-решетка**.

Така, аксиомите до тук могат на кратко да се изкажат така:

множеството *Events* на квантовите събития е орто-решетка (спрямо релацията “ $\preccurlyeq$ ” и операциите “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ”).

Аксиома за орто-модуларност

(закон за орто-модуларност)

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q$

за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{E}vents$.

Аксиома за орто-модуларност

(закон за орто-модуларност)

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q$

за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{E}vents$.

Може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже:

$$P \vee (P^\perp \wedge Q) = (P \vee P^\perp) \wedge (P \vee Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q.$$

Аксиома за орто-модуларност

(закон за орто-модуларност)

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q$

за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{E}vents$.

Може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже:

$$P \vee (P^\perp \wedge Q) = (P \vee P^\perp) \wedge (P \vee Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q.$$

В алгебрата: ... това са **орто-модуларни решетки**.

Аксиома за орто-модуларност

(закон за орто-модуларност)

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q$

за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{E}vents$.

Може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже:

$$P \vee (P^\perp \wedge Q) = (P \vee P^\perp) \wedge (P \vee Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q.$$

В алгебрата: ... това са **орто-модуларни решетки**.

В една класическа система:

за събития P, Q , ако $P \preceq Q$, то $Q \wedge P^\perp$ е допълнението на P в Q ,
 $Q \setminus P := P^\perp \wedge Q$.

Аксиома за орто-модуларност

(закон за орто-модуларност)

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q$

за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{E}vents$.

Може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже:

$$P \vee (P^\perp \wedge Q) = (P \vee P^\perp) \wedge (P \vee Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q.$$

В алгебрата: ... това са **орто-модуларни решетки**.

В една класическа система:

за събития P, Q , ако $P \preceq Q$, то $Q \wedge P^\perp$ е допълнението на P в Q ,
 $Q \setminus P := P^\perp \wedge Q$. Пренесяме това и в общи орто-модуларни решетки.

Аксиома за орто-модуларност

(закон за орто-модуларност)

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q$

за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{E}vents$.

Може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже:

$$P \vee (P^\perp \wedge Q) = (P \vee P^\perp) \wedge (P \wedge Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q.$$

В алгебрата: ... това са **орто-модуларни решетки**.

В една класическа система:

за събития P, Q , ако $P \preceq Q$, то $Q \wedge P^\perp$ е допълнението на P в Q ,
 $Q \setminus P := P^\perp \wedge Q$. Пренесяме това и в общи орто-модуларни решетки.
Така, закона за орто-модуларност приема вида:

ако $P \preceq Q$ тогава $P \vee (Q \setminus P) = Q$.

Състоянията като вероятности върху орто-решетката на събитията

Състоянията като вероятности върху орто-решетката на събитията

Завършващи аксиоми за състоянията в общите системи:

Всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$ изпълнява свойствата:

адитивност $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{Events}$, за които $P \preceq Q$;

нормираност $\rho(1) = 1$.

→ Вероятност върху орто-решетка.

Множеството на всички вероятности върху орто-решетка е изпъкнало.

Състоянията като вероятности върху орто-решетката на събитията

Завършващи аксиоми за състоянията в общите системи:

Всяко състояние $\rho \in \mathcal{States}$ изпълнява свойствата:

адитивност $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за всеки две събития $P, Q \in \mathcal{Events}$, за които $P \preceq Q$;

нормираност $\rho(1) = 1$.

→ Вероятност върху орто-решетка.

Множеството на всички вероятности върху орто-решетка е изпъкнало.

За всяко ненулево събитие $P \in \mathcal{Events}$ съществува състояние $\rho \in \sigma$, в което P настъпва почти сигурно, т.е., $\text{Prob}_\rho(P) = 1$.

По-нататък ще покажем, че от аксиомите следва, че $\mathcal{States}$ съвпада с множеството на всички вероятности върху орто-решетката $\mathcal{Events}$.

Така, структуро-определяща е именно орто-решетката на събитията $\mathcal{Events}$

Определение. Елементарно събитие е събитие $P \in \mathcal{Events}$,
такова, че за всяко друго събитие $Q \in \mathcal{Events}$ следва, че:

$$Q \preceq P \implies Q = \mathbf{0} \text{ или } Q = P.$$

В теорията на частично наредените множества с най-малък елемент (и в частност, решетките с $\hat{0}$ и $\hat{1}$) горното свойство определя понятието **атом в частично наредено множество**.
Така, елементарните събития – това са атомите на решетката на събитията.

Определение. Елементарно събитие е събитие $P \in \mathcal{E}vents$,
такова, че за всяко друго събитие $Q \in \mathcal{E}vents$ следва, че:

$$Q \preceq P \implies Q = \mathbf{0} \text{ или } Q = P.$$

В теорията на частично наредените множества с най-малък елемент (и в частност, решетките с $\hat{0}$ и $\hat{1}$) горното свойство определя понятието **атом в частично наредено множество**.
Така, елементарните събития – това са атомите на решетката на събитията.

Аксиома за атомарност:

■ всяко ненулево събитие мажорира поне едно елементарно събитие.

Определение на ниво на събитие.

Нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P , казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{aligned}0 &= P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \cdots \preceq P_r = P \\ P_0 &\neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r\end{aligned}$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r .

Определение на ниво на събитие.

Нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P , казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{aligned} 0 = P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \cdots \preceq P_r = P \\ P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \end{aligned}$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r .

Числото $r \geq 1$ се нарича **ниво на ненулевото събитие** P .

Определение на ниво на събитие.

Нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P , казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{aligned} 0 = P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \cdots \preceq P_r = P \\ P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \end{aligned}$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r .

Числото $r \geq 1$ се нарича **ниво на ненулевото събитие** P .

Ясно е, че *елементарните събития са тези и само тези събития, които са от ниво 1*.

Определение на ниво на събитие.

Нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P , казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{aligned} 0 = P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \cdots \preceq P_r = P \\ P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \end{aligned}$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r .

Числото $r \geq 1$ се нарича **ниво на ненулевото събитие** P .

Ясно е, че *елементарните събития са тези и само тези събития, които са от ниво 1*.

Системата наричаме от **система от крайно ниво** или още **крайна система**, ако *единицата 1 има крайно ниво*.

Определение на ниво на събитие.

Нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P , казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{aligned} 0 = P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \cdots \preceq P_r = P \\ P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \end{aligned}$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r .

Числото $r \geq 1$ се нарича **ниво на ненулевото събитие** P .

Ясно е, че *елементарните събития са тези и само тези събития, които са от ниво 1*.

Системата наричаме от **система от крайно ниво** или още **крайна система**, ако *единицата 1 има крайно ниво*.

Тогава нивото на единицата ще наричаме **ранг на системата**.

Аксиома за крайност:

■ Всички системи на квантовата информатика са крайни.

Това е равносилно на твърдението, че *всички събития имат крайно ниво*.

Аксиома за крайност:

■ Всички системи на квантовата информатика са крайни.

Това е равносилно на твърдението, че всички събития имат крайно ниво.

Едни от най-фундаменталните системи на квантовата информатика са системите от ниво 2: това е **системата на един бит**.

Аксиома за крайност:

■ Всички системи на квантовата информатика са крайни.

Това е равносилно на твърдението, че всички събития имат крайно ниво.

Едни от най-фундаменталните системи на квантовата информатика са системите от ниво 2: това е **системата на един бит**.

По-нататък в този курс ще покажем, че *в следствие на аксиомите ни, има по същество точно две системи от ниво две: това са класическия и квантовия бит.*

Аксиома за крайност:

■ Всички системи на квантовата информатика са крайни.

Това е равносилно на твърдението, че всички събития имат крайно ниво.

Едни от най-фундаменталните системи на квантовата информатика са системите от ниво 2: това е **системата на един бит**.

По-нататък в този курс ще покажем, че *в следствие на аксиомите ни, има по същество точно две системи от ниво две: това са класическия и квантовия бит.*

Последния се нарича също **q -бит**

Определение. В едно частично наредено множество $\mathcal{T}$ и два негови елемента $a, b \in \mathcal{T}$ казваме, че

$$b \text{ покрива } a, \text{ ако } a \preceq b, a \neq b \text{ и за всеки елемент } c \in \mathcal{T}, \\ a \preceq c \preceq b \implies a = c \text{ или } b = c.$$

Така, твърдението, че a е атом на частично наредено множество $\mathcal{T}$ с най-малък елемент $0 \in \mathcal{T}$ е равносилно на изказването, че a покрива 0 .

Определение. В едно частично наредено множество $\mathcal{T}$ и два негови елемента $a, b \in \mathcal{T}$ казваме, че

$$b \text{ покрива } a, \text{ ако } a \preceq b, a \neq b \text{ и за всеки елемент } c \in \mathcal{T}, \\ a \preceq c \preceq b \implies a = c \text{ или } b = c.$$

Така, твърдението, че a е атом на частично наредено множество $\mathcal{T}$ с най-малък елемент $0 \in \mathcal{T}$ е равносилно на изказването, че a покрива 0 .

Последната аксиома е известна също, като **закон за покриването**:

Ако P е елементарно събитие, а Q е събитие, такова че $P \wedge Q = 0$,
тогава $P \vee Q$ покрива Q .

Определение. В едно частично наредено множество $\mathcal{T}$ и два негови елемента $a, b \in \mathcal{T}$ казваме, че

$$b \text{ покрива } a, \text{ ако } a \preceq b, a \neq b \text{ и за всеки елемент } c \in \mathcal{T}, \\ a \preceq c \preceq b \implies a = c \text{ или } b = c.$$

Така, твърдението, че a е атом на частично наредено множество $\mathcal{T}$ с най-малък елемент $0 \in \mathcal{T}$ е равносилно на изказването, че a покрива 0 .

Последната аксиома е известна също, като **закон за покриването**:

Ако P е елементарно събитие, а Q е събитие, такова че $P \wedge Q = 0$, тогава $P \vee Q$ покрива Q .

Еквивалентно, ако P е елементарно събитие, а Q е събитие, такова че $P \wedge Q = 0$, тогава $(P \vee Q) \wedge P^\perp$ е елементарно събитие.

Последната еквивалентност оставяме без доказателство.