

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 4 / 30.10.2023, версия 1

В тази презентация :

текст, който е **маркиран** в сво или

има поставена сво лента **отпред** се счита
за допълнителен материал

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

Приведените аксиоми по-долу съответстват на предадените до тук, но са дадени в променен ред.

При това, някои от тях (напр., аксиомата за смесването) ще се окажат следствия.

Приведената система от аксиоми няма претенции за независимост.

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

- това са аксиоми за "статистически системи" включват
{

 класически
квантови

}

задава се от (в общия случай - хибридни)

$Events, States, Prob : Events \times States \rightarrow [0,1] : (P, \rho) \mapsto Prob_{\rho}(P) = :$
↔ ↗
две множества и функция

вероятност за P в ρ

→

$\rho(P)$

A1. (Статистическо отъждесняване на събития)

За $P, Q \in Events$: ако $\rho(P) = \rho(Q)$ за всяко $\rho \in States$, то $P = Q$

(Това беше едната от аксиомите за отделимост, а другата е заложена в $Prob_{\rho}(P) =: \rho(P)$)

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

A2. Закони на квантовата логика сумарно

В Events имаме бинарни операции " $\wedge$ " = "и", " $\vee$ " = "или"
и унарна операция " $\perp$ " = "не", такива че

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, P \vee P = P,$$

$$P \wedge \hat{0} = \hat{0}, P \vee \hat{0} = P, P \wedge \hat{1} = P, P \vee \hat{1} = \hat{1},$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \vee P^\perp = \hat{1}, P \wedge P^\perp = \hat{0},$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

~~$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$~~

аксиоми на решетка

единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

аксиоми на отрицанието $\perp$

} дистрибутивност

Events е орторешетка

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

A2. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции " $\wedge$ " = "и", " $\vee$ " = "или"
и унарна операция " $\perp$ " = "не", такива че

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

НАКРАТКО:

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, \quad P \vee P = P,$$

$$P \wedge \hat{0} = \hat{0}, \quad P \vee \hat{0} = P, \quad P \wedge \hat{1} = P, \quad P \vee \hat{1} = \hat{1}$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

дистрибутивност

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, \quad (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

~~$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$~~

аксиоми на решетка

единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

аксиоми на отрицанието $\perp$

ортотрикула

} дистрибутивност

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

A2. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции " $\wedge$ " = "и", " $\vee$ " = "или"
и унарна операция " $\perp$ " = "не", такива че

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R,$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, P \vee P = P,$$

$$P \wedge \hat{0} = \hat{0}, P \vee \hat{0} = P, P \wedge \hat{1} = P, P \vee \hat{1} = \hat{1},$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \vee P^\perp = \hat{1}, P \wedge P^\perp = \hat{0},$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$



Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

A2. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции " $\wedge$ " = "и", " $\vee$ " = "или"
и унарна операция " $\perp$ " = "не", такива че

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &= (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R, \\ P \wedge Q &= Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P, \\ P \vee (P \wedge Q) &= P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P, \\ P \wedge P &= P, \quad P \vee P = P, \end{aligned}$$

аксиоми на решетка

алтернативно

Events е частично наредено множество спрямо $\leq$, в което всеки два елемента P и Q имат точна долна граница $=: P \wedge Q$ и точна горна граница $=: P \vee Q$

$$\left. \begin{aligned} P \wedge Q &= P \Leftrightarrow P \leq Q, \\ P \vee Q &= Q \Leftrightarrow P \leq Q, \end{aligned} \right\} \text{ задават връзките } \wedge \leftrightarrow \leq \leftrightarrow \vee$$

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

A2. Закопи на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции " $\wedge$ " = "и", " $\vee$ " = "или"
и унарна операция " $\perp$ " = "не", такива че

Events е орторешетка (ortholattice),

в която още се изпълнява т.нар. закон за ортомодуларност : *orthomodularity*

(OL) за всеки $P, Q \in \text{Events}$, за които $P \leq Q$ имаме

$$P \vee (Q \setminus P) = Q, \text{ където } Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$$

(Забележка: такива орторешетки се наричат ортомодуларни решетки.)

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

Аксиоми завершващи структурата на $\mathcal{E}vents$

A3. Закон за покриването :

Ако $\hat{0} \preceq P$ и $P \wedge Q = 0$ тогава $Q \preceq P \vee Q$

A4. Аксиома за крайност:

$\exists N \in \mathbb{N} : \hat{0} \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \dots \preceq P_{N-1} \preceq 1$

където по определение:

 в последствие ще го наречем
"ниво на системата"

■ $P \preceq Q \iff_{\text{опр.}} P \preceq Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва,
"Q покрива P" че $P = R$ или $R = Q$.

■ P е елементарно събитие $\iff_{\text{опр.}} \hat{0} \preceq P$

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

A5. Множеството States се определя от Events :

$$\text{States} := \{ \rho : \text{Events} \rightarrow [0,1] \mid \rho \text{ е } \underline{\text{вероятностно разпределение върху Events}} \}$$

↓
 това е такава функция $\rho : \text{Events} \rightarrow [0,1]$, която изпълнява условията:
 (където по определение)

- **адитивност:** ако $P, Q \in \text{Events}$ и $P \leq Q$, то $\rho(P) + \rho(Q \setminus P) = \rho(Q)$
 (където $Q \setminus P := Q \wedge P^\perp$)
- **нормираност:** $\rho(\hat{1}) = 1$

Аксиоми на квантово-логическия подход за общи системи

А6. Зависимост на логическата наредба $\preceq$ между събитията от състоянията:

ако $P, Q \in \text{Events}$ са такива, че

- за всяко $\rho \in \text{States}$: от $\rho(P) = 1 \Rightarrow \rho(Q) = 1$;

- за всяко $\rho \in \text{States}$: от $\rho(Q) = 0 \Rightarrow \rho(P) = 0$;

тогава $P \preceq Q$.



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Някои първи следствия

Твърдение 1. За всеки $P, Q \in \text{Events}$:

$$P \preceq Q \iff \text{за всяко } \rho \in \text{States} : \rho(P) \leq \rho(Q).$$

Доказателство $\Rightarrow$) Това следва от условието "адитивност" в A5 (защо?)

$\Leftarrow$) Това следва от A6 (защо?)



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Някои първи следствия

Твърдение 2. За всеки $P, Q \in \text{Events}$:

$$P = Q^\perp \iff \text{за всяко } \rho \in \text{States} : \rho(P) = 1 - \rho(Q).$$

Доказателство $\implies$) Това следва от условието "адитивност" в A5 (защо?)

$\impliedby$) Това следва от A1 (защо?)



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Някои първи следствия

Твърдение 3. $States$ е извекнало подмножество на реалното (т.е., над $\mathbb{R}$) линейно пространство на всички функции $\rho: Events \rightarrow \mathbb{R}$. С групи суми, ако $\rho_1, \rho_2 \in States$ и $q_1, q_2 \in [0, 1]$ са такива че $q_1 + q_2 = 1$, то и $\rho := q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 \in States$.

Забележка Това твърдение показва, че "аксиомата за несъзнателно" следва от приведените сега аксиоми.

Доказателство Функцията $\rho := q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ по определение е:

$$\rho(P) = q_1 \rho_1(P) + q_2 \rho_2(P) \text{ за всяко } P \in Events.$$

Проверете, че тя изпълнява условията в A5. $\square$

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Класически системи : по определение сега това са такива статистически системи, за които Events е булева алгебра.

Това съответства на досегащото понятие за класическа система съгласно следната:

Теорема За всяка класическа система от ниво N : Events има N на брой различни елементарни събития.

Да означим последните с $\omega_1, \dots, \omega_N$ и нека $\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

За всяко $P \in \text{Events}$ полагаме $\text{Support}(P) := \{\omega_j \in \Omega \mid \omega_j \preceq P\}$.

Тогава: $\text{Supp}(\hat{1}) = \Omega$, $\text{Supp}(\hat{0}) = \emptyset$ и за всеки $P, Q \in \text{Events}$ имаме
 $\text{Supp}(P \wedge Q) = \text{Supp}(P) \cap \text{Supp}(Q)$, $\text{Supp}(P \vee Q) = \text{Supp}(P) \cup \text{Supp}(Q)$,
 $\text{Supp}(P^\perp) = \Omega \setminus \text{Supp}(P)$.

С други думи: Supp задава изоморфизъм $\text{Events} \cong \mathcal{P}(\Omega)$ на булеви алгебри.

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

По-долу сме привели някои твърдения, в които на мястото на $Events$ е поставена по-обща орто- или ортомодуларна решетка T .

В една такава решетка T е прието да се казва също, че $P \in T$ е атом на T $\Leftrightarrow \hat{0} \leq P$ (т.е., това е което нарекохме "елементарно събитие" в $Events$).

Лема 5 Ако $P, Q \in T$ -решетка и P е атом на T , то $P \leq Q$ или $P \wedge Q = \hat{0}$.

Упътване: Разгледайте $\hat{0} \leq P \wedge Q \leq P$. $\square$

Лема 6 Нека T е ортомодуларна решетка, в която $\hat{0} = P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{N-1} \leq P_N = \hat{1}$, (т.е., " T е от ниво N "). Тогава $\omega_1 := P_1$, $\omega_2 := P_2 \setminus P_1$, $\dots$, $\omega_N := P_N \setminus P_{N-1}$ са различни по междy си атоми и $\hat{1} = \omega_1 \vee \omega_2 \vee \dots \vee \omega_N$.

Упътване: $(OM) \Rightarrow P_k = P_{k-1} \vee \omega_k = \dots = \omega_1 \vee \dots \vee \omega_k$;

за $j < k$: $\omega_j \wedge \omega_k = (P_j \setminus P_{j-1}) \wedge (P_k \setminus P_{k-1}) \leq P_{k-1} \wedge (P_k \setminus P_{k-1}) = \hat{0}$. $\square$

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Лема 7. При условията на Лема 6, нека T е булева алгебра. Тогава определенията в Лема 6 $\omega_1, \dots, \omega_N$ са всички атоми на T .

Упътване: Нека $Q \in T$ е атом. Тогава от дистрибутивността $Q = Q \wedge \hat{1} = Q \wedge (\omega_1 \vee \dots \vee \omega_N)$
 $= (Q \wedge \omega_1) \vee \dots \vee (Q \wedge \omega_N)$ и Лема 5 ще следва, че $Q = \omega_j$ за някое j . $\square$

Лема 8. В условията на Лема 7, ако $P \in T$ е произволен елемент, то
 $\text{Supp}(P) = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_p}\} \Leftrightarrow P = \omega_{j_1} \vee \dots \vee \omega_{j_p}$, където $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq N$. $\square$

Упътване: $\Rightarrow$) Очевидно $\omega_{j_1} \vee \dots \vee \omega_{j_p} \preceq P$ (защо - и очевидно трябва да може да се доказва). Ако $P \setminus (\omega_{j_1} \vee \dots \vee \omega_{j_p}) \neq \hat{0}$, то $P \succ \omega_k \notin \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_p}\}$ - противоречие
 $\Leftarrow$) Ако $P = \omega_{j_1} \vee \dots \vee \omega_{j_p}$ и $P \succ \omega_k$, $\omega_k \in T$ е атом, то от $\omega_k = \omega_k \wedge P = \omega_k \wedge (\omega_{j_1} \vee \dots \vee \omega_{j_p})$ следва, че $\omega_k =$ на някое от $\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_p}$ (както в Лема 7). $\square$

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Лема 9. При условията на Лема 7, за всеки $P, Q \in \mathcal{T}$

$$P \leq Q \Leftrightarrow \text{Supp}(P) \subseteq \text{Supp}(Q)$$

Упътване: $\Rightarrow$) Това е очевидно. $\Leftarrow$) От Лема 8. $\square$

Доказателство на Теорема 4. Съгласно Лема 8 (за $\mathcal{T} = \text{Events}$) имаме биекция между Events и $\mathcal{P}(\Omega)$ посредством Supp . Съгласно Лема 9 тази биекция пренася $\leq$ в $\subseteq$, т.е., е наредбен изоморфизъм. $\square$

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

И така, **класическа система**, абстрактно определена, е статистическа система, в която орторешетката на събитията **Events** е **булева алгебра**, което на свой ред (за крайни системи, каквито само разглеждаме в курса) е

$\Longleftrightarrow$ **Теорема 4** $\left\{ \begin{array}{l} \text{Events е изоморфна на } \mathcal{P}(\Omega) \text{ (= степенно множество на } \Omega) \\ \text{за } \Omega = \text{множеството (крайно!)} \text{ на елементарните събития.} \end{array} \right.$

В частност, за класически (крайни) системи **Events** е винаги **крайно**.

Проблем: има ли по-обща статистически системи от класическите, за които **Events** е крайно множество?

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Ниво на система (за крайни системи, това е естествено число $N \in \{1, 2, \dots\}$)

Някои сведения за ортомодуларни решетки : нека T е ортомодуларна решетка .

Твърдение 10. (а) Ако $P \in T$ и съществува верига $\hat{0} = P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \dots \preceq P_{M-1} \preceq P_M = P$, то числото M е едно и също за всяка такава верига

M е наречено ниво на P и казваме, че P е от крайно ниво.

(б) Ако $\hat{1} \in T$ е от крайно ниво, то всеки елемент $P \in T$ е от крайно ниво.

Нивото на $\hat{1}$ е наречено ниво на T и казваме, че T е от крайно ниво (всичко го използваме)

Забележка: Ключовият термин тук е "верижно свойство на Жордан-Холдер" (the Jordan-Hoelder Chain Condition).

Сведения за Твърдение 10 може да се потърсят в

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Gratzer.pdf

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Ниво на система (за крайни системи, това е естествено число $N \in \{1, 2, \dots\}$)

И така, понятието "ниво на системата" е вече точно определено като нивото на Events

В допълнение: имаме и понятие за ниво на събитие: Events придобива "етажи".

В частност: ● ниво 0 има само $\hat{0}$;

● ниво 1 имат елементарните събития и само те;

ако $P \preceq Q$, то нивото на $Q = 1 +$ нивото на P ;

за класическа система: ■ нивото на системата = $\#$ на Σ

■ нивото на събитие $P = \#$ на $\text{Supp}(P)$.

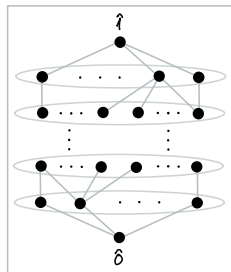
Теория на квантово-логическия подход за общи системи

етап N :етап $N-1$:етап $N-2$: $\vdots$

етап 2:

етап 1:

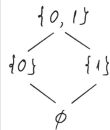
етап 0:

Нивото на $\hat{i}$ се нарича ранг на системата

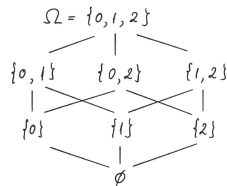
Диаграма на Хасе / Hasse: два елемента са свързани с вертикална черта, ако горният покрива долния

елементарни събития = атоми на Events

класически бит:

квантов бит (над $\mathbb{R}$):

класическа система от ниво 3



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Подсистема / надсистема. Експерименти

Определения (В теория на решетките)

- Под(орто)решетка T' на (орто)решетка T това е подмножество $T' \subseteq T$, такова че $\hat{0}, \hat{1} \in T'$ и ако $P, Q \in T'$, то и $P \wedge Q, P \vee Q \in T'$ (както и $P^\perp \in T'$ в случая на орторешетки).
- Булева подалгебра B на орторешетка T е такава подорторешетка $B \subseteq T$, която е булева алгебра сама по себе си.

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Подсистема / надсистема. Експерименти

Определение (В теорията на статистическите системи)

- Подсистема отговаря на подорореждане $\text{Events}' \subseteq \text{Events}$.

При надсистема включването е на обратно $\text{Events} \subseteq \text{Events}'$.

- Експеримент е подсистема, която е класическа сама по себе си.

Следователно, експеримент (в статистическа система) отговаря на булева подалгебра

$\mathcal{B} \subseteq \text{Events}$.

С други думи, това е подмножество от събития, което е затворено спрямо логическите операции $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\perp$ ("не") и в което е валидна класическата логика.

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Подсистема / надсистема. Експерименти

- Интерпретация: ● Подсистема може да отговори на част от изследвания обект (напр., един бит на квантовия компютър) и тогава Events' отговаря за експерименталните тестове отнасящи се до подобекта.
- Надсистема може да се получи при обединяване на няколко микрообекта в обща система (напр., обединяване на няколко бита в компютър).
 - Надсистема може да отговаря и за прецизиране на наблюденията.

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Експерименти. Съвместна измеримост. Център

За две събития $P, Q \in \text{Events}$ определяне следната бинарна релация

$$\boxed{P \mathbf{C} Q} \equiv \mathbf{C}(P, Q) \equiv \begin{array}{l} P \text{ и } Q \text{ комутират} \\ / \text{са съвместими} / \\ / \text{са съвместно} \\ \text{измерими} / \end{array} \Leftrightarrow_{\text{свр.}} \left\{ \begin{array}{l} P \text{ и } Q \text{ се съдържат в} \\ \text{обща булева подалгебра} \end{array} \right.$$

Интерпретация

Триггера:
наблюдението
(измерването)
е активен
процес



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Експерименти. **Съвместна измеримост. Център**

Център на орто-решетка $\mathcal{T} \equiv \mathcal{Z}(\mathcal{T}) := \{P \in \mathcal{T} \mid P \mathbf{C} A \text{ за } \forall A \in \mathcal{T}\}$

- това е булева подалгебра на $\mathcal{T}$.

Тривиален център : $\mathcal{Z}(\mathcal{T}) = \{\hat{0}, \hat{1}\}$

Неприводими системи: такива с тривиален център на орто-решетката на събитията

Нетривиално следствие: Орто-решетката на събитията на всяка квантова система е пряко произведение на орто-решетки на неприводими системи.

↪ само ще илюстрираме понятието

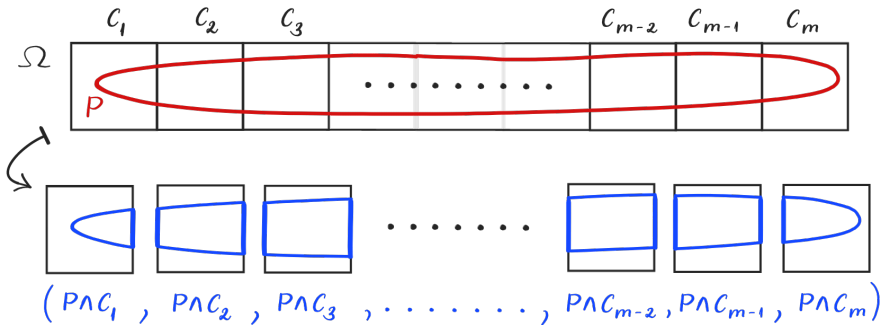
нарича се **централно разбиване**

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Централно разбиване

Това обобщава комбинаторният изоморфизъм на степенните множества

$$\mathcal{P}(\Omega) \cong \mathcal{P}(C_1) \times \dots \times \mathcal{P}(C_m)$$



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Централно разбиране

Events се разбива в произведение на неприводими блокове

$$Events \cong Events_1 \times \dots \times Events_m$$



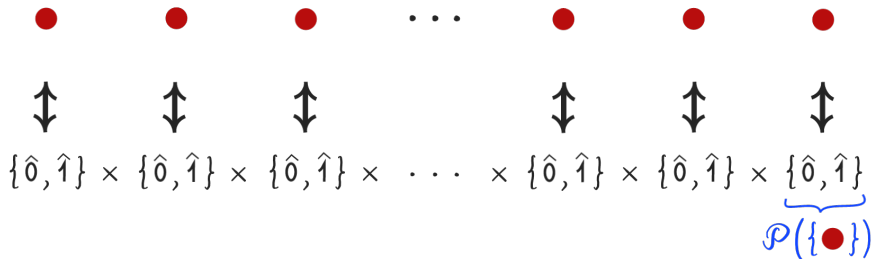
Това е общия случай на статистическа система: хибридна

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Централно разбиране

Класическите неприводими системи са точките

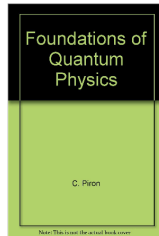
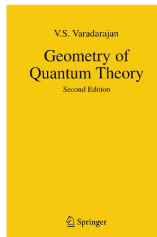
$$\mathcal{P}(\Omega) \cong \mathcal{P}(\{\bullet\}) \times \dots \times \mathcal{P}(\{\bullet\})$$



Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Абстрактната характеристика на "чисто квантовите" системи е като неприводимите статистически системи

Те се строят геометрично.



http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Varadarajan.pdf

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Piron.pdf

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Комутируемост = съвместна измеримост. Дизъюнктивност

Теорема II За $P_1, \dots, P_n \in \text{Events}$:

$\mathbf{C}(P_1, \dots, P_n)$ (т.е., $P_1, \dots, P_n$ са съдържащи в обща булева подалгебра



$\equiv P_1, \dots, P_n$ са съвместно измерими / съвместно комутират)

$P_j \mathbf{C} P_k$ за всеки $j, k \in \{1, \dots, n\}$

Доказателство $\Rightarrow$) Очевидно. $\Leftarrow$) Нетривиално - използва (ОМ).

Забележка Доказва се, че ортомодуларността (ОМ) $\Leftrightarrow$ за $P \leq Q$: $P \mathbf{C} Q$

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Комутируемост = съвместна измеримост. Дизъюнктивност

Определение За $P, Q \in \text{Events}$: P, Q -дизъюнктивни $\Leftrightarrow \begin{cases} P \wedge Q = \hat{0}, \\ P \mathbf{c} Q \end{cases}$
 (първото още: $P \perp Q$)
 - взаимна ортогоналност

Теорема 12 P, Q -дизъюнктивни $\Leftrightarrow P \preceq Q^\perp \Leftrightarrow Q \preceq P^\perp$

Упътване: $\Rightarrow$) $P = P \wedge \hat{1} = P \wedge (Q \vee Q^\perp) = \dots = P \wedge Q^\perp$
 (дистрибутивност)

$\Leftarrow$) $P \wedge Q \preceq P \wedge P^\perp = \hat{0};$

$P, Q \in \mathcal{B}$ -булева. $\Rightarrow$ разгледайте $\text{Supp}(P)$ и $\text{Supp}(Q)$. $\square$

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Комутируемост = съвместна измеримост. Дизюнктивност

Определение По-общо : $P_1, \dots, P_n$ - дизюнктивни $\Leftrightarrow \begin{cases} P_j \wedge P_k = \hat{0}, \\ P_j \mathbf{C} P_k, \text{ за } j \neq k \end{cases}$
 (взаимно ортогонални)

Теорема 13 $P_1, \dots, P_n$ - дизюнктивни $\Leftrightarrow P_j, P_k$ - дизюнктивни, за $j \neq k$
 (без доказателство)

Забележка $\mathbf{C}$ е рефлексивна и симетрична, но в общия случай - не транзитивна.
 Дизюнктивността не е рефлексивна, симетрична е, не е транзитивна.

Контрапримери : по-нататък

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Комутируемост = съвместна измеримост. Дизюнктивност

Означение $A = P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = P_1 \vee \dots \vee P_n \\ P_1, \dots, P_n \text{ - дизюнктивни} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{дизюнктивно} \\ \text{обединение} \end{array}$

В $\mathcal{P}(\Omega)$ това е непресичащото $\vee$ /дизюнктивно обединение: $\dot{\vee} \equiv \dot{\cup}$

Когато $\hat{1} = P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_n$ казваме, че имаме **разбиване на единицата**.

Теорема 14 Експеримент $\Leftrightarrow$ разбиване на единицата $\hat{1} = P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_n$

При това $P_1, \dots, P_n$ са елементарните ^{алтернативи} събития на експеримента.

(без доказателство)

Внимание: $P_1, \dots, P_n$ може да не са елементарни събития в Events.

Когато е така имаме **максимален експеримент**

Теория на квантово-логическия подход за общи системи

Максимални експерименти : основни факти

- $P_1, \dots, P_n$ са елементарни събития на максимален експеримент

$$\Leftrightarrow \hat{0} \leq P_1 \leq P_1 \dot{\vee} P_2 \leq \dots \leq P_1 \dot{\vee} P_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_n = \hat{1}$$

Следователно $n = N$ - нивото на системата

= броя елементарни алтернативи в максимален експеримент.

- В класически системи и само там има единствен максимален експеримент.

Следователно : в неклассически системи никога не можем да получим пълна информация при измерване (за състоянието до измерването).