

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 5 / 06.11.2023, версия 1.1

В тази презентация :

текст, който е **маркиран** в **сво** или

има поставена **сво** лента **отпред** се счита
за допълнителен материал

Част 1: Ортогоналните проектори като квантови събития

Линейни оператори и матрици ако $A: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ е линеен, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \text{ където } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =: e_k \mapsto A(e_k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{Nk} \end{pmatrix} - k\text{-тият столб на } A.$$

В този курс: линеен оператор върху $\mathbb{C}^N =$ матрица $N \times N$

Теорема 1 $B = A^*$ за $A, B \in \text{Mat}_N(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \langle B\psi | \phi \rangle = \langle \psi | A\phi \rangle$ - за всеки $\psi, \phi \in \mathbb{C}^N$

Доказателство $\Rightarrow \langle \psi | A\phi \rangle = \psi^*(A\phi) = (\psi^* A^{**})\phi = (A^* \psi)^* \phi = \langle A^* \psi | \phi \rangle$

$\Leftarrow$ По обратния път: $\langle (B - A^*)\psi | \phi \rangle = 0$ за всеки $\psi, \phi \in \mathbb{C}^N$. Нека $\phi = (B - A^*)\psi$.

Тогава $\|(B - A^*)\psi\| = 0$ и следователно, $(B - A^*)\psi = 0$ за всеки $\psi \in \mathbb{C}^N$, т.е., $B = A^*$ $\square$

$$A\psi = |A\psi\rangle = A|\psi\rangle, \quad \langle \phi | A = \langle A^* \phi |, \quad \langle \phi | A\psi = \langle \phi | A | \psi \rangle = \langle A^* \phi | \psi \rangle$$

Ортогонални проектори Нека $V \subseteq \mathbb{C}^N$ е линейно подпространство
 също е линейно подпространство } $V^\perp := \{ \Psi \in \mathbb{C}^N \mid \underbrace{\langle \Psi | \Phi \rangle = 0}_{\Psi \perp \Phi} \text{ при всяко } \Phi \in V \}$
 $\Psi \perp V$

Тогави за всеки $\Theta \in \mathbb{C}^N$ съществува
 единствено разлагане $\Theta = \Phi + \Psi$, където $\Phi \in V$ и $\Psi \in V^\perp$

Следователно, добре определено е съответствието $\Theta \mapsto \Phi$ и то определя линейен
 оператор $\Pi_V : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^N$, $\Pi_V(\Theta) = \Phi$.

Този линейен оператор има свойствата • $\Pi_V^2 = \Pi_V$ (наистина, ако $\Theta \mapsto \Phi$, то $\Phi \mapsto \Phi$, понеже $\Phi = \Phi + 0$)
 • $\Pi_V^* = \Pi_V$ - наистина: ако в допълнение имаме и $\Theta_1 = \Phi_1 + \Psi_1$ за $\Phi_1 \in V$ и $\Psi_1 \in V^\perp$
 то $\langle \Pi_V \Theta | \Theta_1 \rangle = \langle \underbrace{\Phi | \Phi_1 + \Psi_1}_{\perp} \rangle = \langle \Phi | \Phi_1 \rangle = \langle \underbrace{\Phi + \Psi | \Phi_1}_{\perp} \rangle = \langle \Theta | \Pi_V \Theta_1 \rangle \square$

Ортогонални проектори Нека $V \subseteq \mathbb{C}^N$ е линейно подпространство
 също е линейно подпространство } $V^\perp := \{ \Phi \in \mathbb{C}^N \mid \underbrace{\langle \Phi | \Phi \rangle}_{\Phi \perp \Phi} = 0 \text{ при всяко } \Phi \in V \}$
 $\Phi \perp V$

Тогава за всеки $\Theta \in \mathbb{C}^N$ съществува
 единствено разлагане $\Theta = \Phi + \Psi$, където $\Phi \in V$ и $\Psi \in V^\perp$

Обратно, нека $P : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ е линеен оператор (т.е., $N \times N$ -матрица), такъв че

Тогава $P = \Pi_V$ за $V := \{ \Phi \in \mathbb{C}^N \mid P\Phi = \Phi \}$.

самоспрегат идемпотент

$$P^* = P = P^2$$

ортогонален проектор

Наистина: $P(\hat{I} - P) = \hat{0}$. Нека $\Theta \in \mathbb{C}^N$ и $\Theta = \Phi + \Psi$, за $\Phi := P\Theta$ и $\Psi := (\hat{I} - P)\Theta$.

Тогава: а) $\Phi \in V$ - понеже $P\Phi = P^2\Theta = P\Theta = \Phi$; б) за $\Phi_1 \in V$: $\langle \Phi_1 | \Psi \rangle = 0$ - понеже
 $\langle \Phi_1 | \Psi \rangle = \langle P\Phi_1 | (\hat{I} - P)\Theta \rangle = \langle \Phi_1 | P(\hat{I} - P)\Theta \rangle = 0$. $\square$

Следствие 2 $\Pi_{V^\perp} = \hat{I} - \Pi_V$. $(V^\perp)^\perp = V$.

Примери за ортогонални проектори: $\bullet \hat{I} = \Pi_{\mathbb{C}^N}$, $\hat{O} = \Pi_{\{0\}}$ (забележете: $\mathbb{C}^N = \{0\}^\perp$)

$\bullet$ За всеки единичен $\Psi \in \mathbb{C}^N$ (т.е., $\|\Psi\| = 1$): $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ е ортогонален проектор.

Наистина: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = |\Psi\rangle\langle\Psi| = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)^2$.

Така: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \Pi_V$. $V = ?$: твърдим, че $V = \mathbb{C}\Psi$ - едномерно, породено от Ψ .

Тоест: $\Phi \in V \Leftrightarrow \Phi = a\Psi$, за $a \in \mathbb{C}$. Наистина: $\Phi \in V \Leftrightarrow |\Phi\rangle = |\Psi\rangle\langle\Psi||\Phi\rangle$

И така: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \Pi_{\mathbb{C}\Psi}$ - "едномерен" ортогонален проектор
за всеки единичен Ψ

Следствие 3 Ако $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^N$ са единични, то $|\Phi\rangle\langle\Phi| = |\Psi\rangle\langle\Psi| \Leftrightarrow \Phi = e^{i\varphi}\Psi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$.

Доказателство: $\overset{\text{Left Hand Side}}{L.H.S.} \Leftrightarrow \Phi = a\Psi$, за $a \in \mathbb{C}$. Но $\|\Phi\| = \|\Psi\| = 1 \Rightarrow |a| = 1$ оду
виг $\square$

Теорема 4 Нека $P_1, P_2 \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са ортогонални проектори, $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства и нека $P_1 = \Pi_{V_1}$ и $P_2 = \Pi_{V_2}$. Тогава следните условия са еквивалентни

$$(1) \quad V_1 \subseteq V_2 \quad \Leftrightarrow \quad (2_a) \quad P_2 P_1 = P_1 \quad \Leftrightarrow \quad (2_b) \quad P_1 P_2 = P_1$$

Доказателство: $(1) \Rightarrow (2_a)$ Нека $\Theta \in \mathbb{C}^N$. Тогава $P_1 \Theta \in V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow P_2(P_1 \Theta) = P_1 \Theta$.

$(2_a) \Rightarrow (1)$ Нека $\Phi \in V_1$. Защо $\Phi \in V_2$? $\Leftrightarrow P_2 \Phi = \Phi$? Но: $P_2 \Phi = P_2(P_1 \Phi) = P_1 \Phi = \Phi$.

$$(2_a) \Rightarrow (2_b) \quad \underbrace{P_1 P_2}_{=} = \underbrace{P_1^* P_2^*}_{=} = \underbrace{(P_2 P_1)^*}_{(2_a)} = (P_1)^* = P_1.$$

$$(2_b) \Rightarrow (2_a) \quad \underbrace{P_2 P_1}_{=} = \underbrace{P_2^* P_1^*}_{=} = \underbrace{(P_1 P_2)^*}_{(2_b)} = (P_1)^* = P_1.$$

аналогични

□

Теорема 4 Нека $P_1, P_2 \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са ортогонални проектори, $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства и нека $P_1 = \Pi_{V_1}$ и $P_2 = \Pi_{V_2}$. Тогава следните условия са еквивалентни

$$\begin{array}{ccccc}
 (1) & V_1 \subseteq V_2 & \Leftrightarrow & (2_a) & (\underbrace{\hat{I} - P_2}_{\Pi_{V_2^\perp}}) P_1 = \hat{O} & \Leftrightarrow & (2_b) & P_1 (\underbrace{\hat{I} - P_2}_{\Pi_{V_2^\perp}}) = \hat{O} \\
 & \underbrace{\hspace{1cm}}_{(V_2^\perp)^\perp} & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & \\
 & V_2 & & & & & &
 \end{array}$$

Следствие 5 Нека $P_1, P_2 \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са ортогонални проектори, $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства и нека $P_1 = \Pi_{V_1}$ и $P_2 = \Pi_{V_2}$. Тогава следните условия са еквивалентни

$$(1) \underbrace{V_1 \perp V_2}_{V_1 \subseteq V_2^\perp} \iff (2_a) P_2 P_1 = \hat{0} \iff (2_b) P_1 P_2 = \hat{0}$$

ново

$$\iff P_1 + P_2 \text{ е ортогонален проектор.}$$

Доказателство: $\Rightarrow (P_1 + P_2)^2 = (P_1 + P_2)(P_1 + P_2) = \underbrace{P_1^2}_{P_1} + \underbrace{P_1 P_2}_{\hat{0}} + \underbrace{P_2 P_1}_{\hat{0}} + \underbrace{P_2^2}_{P_2} = P_1 + P_2$

$(P_1 + P_2)^* = P_1^* + P_2^* = P_1 + P_2$

$\Leftarrow$ Защо $P_1 P_2 = \hat{0}$? Аналогично на полускаваме $\cancel{P_1} + P_1 P_2 + P_2 P_1 + \cancel{P_2} = \cancel{P_1} + \cancel{P_2}$
 т.е., $P_1 P_2 + P_2 P_1 = \hat{0}$. $\Rightarrow \underbrace{P_1 P_2}_{(-)} = P_1 \underbrace{P_1 P_2}_{(-)} = -P_1 P_2 P_1 = -(P_1^* P_2^* P_1^*) = -(P_1 P_2 P_1)^* = -(-P_1 P_2)^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1 = \underbrace{P_2 P_1}_{(-)} = -P_1 P_2$, т.е., $P_1 P_2 = \hat{0}$. $\square$

Определение Ортонормирана система $f_1, \dots, f_M \in \mathbb{C}^N$ е такава, която се състои от единични и взаимно ортогонални вектори: $\langle f_j | f_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

Забележка: Всяка ортонормирана система е линейно независима, т.е., ако $a_1 f_1 + \dots + a_M f_M = \hat{0}$ (за $a_1, \dots, a_M \in \mathbb{C}$), то $a_1 = \dots = a_M = 0$. Наистина: след поглед $\langle f_k | \hat{0} \rangle \Rightarrow a_k = 0$.
В частност, $M \leq N$.

Следствие 6 Ако $f_1, \dots, f_M \in \mathbb{C}^N$ е ортонормирана система, то

$|f_1\rangle\langle f_1| + |f_2\rangle\langle f_2| + \dots + |f_M\rangle\langle f_M|$ е ортогонален проектор.

Доказателство: Прилагаме индукция по M и Следствие 5, понеже $|f_j\rangle\langle f_j| \cdot |f_k\rangle\langle f_k| = \underbrace{0}_{\text{при } j \neq k}$ при $j \neq k$. $\square$

Теорема 7 Нека $V \subseteq \mathbb{C}^N$ (линейно) и $f_1, \dots, f_M \in \mathbb{C}^N$ е ортонормирана система. Тогава $f_1, \dots, f_M$ е (ортонормиран) базис на $V \Leftrightarrow \Pi_V = |f_1\rangle\langle f_1| + |f_2\rangle\langle f_2| + \dots + |f_M\rangle\langle f_M|$

Доказателство: $\Psi = a_1 f_1 + \dots + a_M f_M \Leftrightarrow \Psi = (|f_1\rangle\langle f_1| + |f_2\rangle\langle f_2| + \dots + |f_M\rangle\langle f_M|) \Psi$
 както в миналата лекция $\xrightarrow{\quad} \Psi \in V \Leftrightarrow \Pi_V \Psi = \Psi$

Тогава, страна " $\Leftarrow$ " на Теорема 7 следва директно от горните еквивалентности.
 Страна " $\Rightarrow$ " на Теорема 7 следва от следствие 6. $\square$

$\mathcal{L}_N (= \mathcal{L}_N(\mathbb{C}))$ = множеството на всички линейни подпространства на $\mathbb{C}^N$
- като ортомодуларна решетка

Припомняме, че $Events = \mathcal{L}_N$ в една (неприводима/чисто) квантова система

Еквивалентно описание на $\mathcal{L}_N$:

$$\mathcal{L}_N \cong \{ P \in Mat_N(\mathbb{C}) \mid P^* = P = P^2 \}$$

Тоест $\mathcal{L}_N$ се състои от комплексните $N \times N$ матрици, които са ортогонални проектори.

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

- Наредбена структура: $V \subseteq W \iff PQ = P = QP$
- Ортоструктура: $V \mapsto V^\perp \iff P \mapsto \hat{1} - P$
 $V^{\perp\perp} = V, \quad \hat{1} - (\hat{1} - P) = P$

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

● Наредбена структура :

$$V \subseteq W \iff PQ = P = QP$$

$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow \text{ - проверете !}$$

$$W^\perp \subseteq V^\perp \iff (\hat{I} - P)(\hat{I} - Q) = \hat{I} - Q$$

● Ортоструктура :

$$V \mapsto V^\perp \iff P \mapsto \hat{I} - P$$

$$V^{\perp\perp} = V, \quad \hat{I} - (\hat{I} - P) = P$$

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектири

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

- Решетъчна структура: $V \wedge W = V \cap W$ - сечението $V \cap W$ е най-голямото линейно подпространство $L \subseteq \mathbb{C}^N$, за което $L \subseteq V$ и $L \subseteq W$

нула и единица

$$\{0\} \leftrightarrow \hat{0}$$

$$\mathbb{C}^N = \{0\}^\perp \leftrightarrow \hat{1}$$

$$V \vee W = V + W := \{\Phi + \Psi \mid \Phi \in V, \Psi \in W\}$$

В общия случай $\wedge$ и $\vee$ нямат алгебричен израз с ортогонални проектири!

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

● Теорема от линейната алгебра (без доказателство):

$$V \vee V^\perp = \mathbb{C}^N, \quad V \wedge V^\perp = \{0\}$$

$$(V \wedge W)^\perp = V^\perp \vee W^\perp, \quad (V \vee W)^\perp = V^\perp \wedge W^\perp$$

Следствие 8 $\mathcal{L}_N$ е орторешетка.

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

- Ортомодуларност на $\mathcal{L}_N$

Теорема 9 $V \subseteq W \iff Q - P$ е ортогонален проектор

В този случай, ако $L := W \wedge V^\perp (= "W \setminus V")$, то $\Pi_L = Q - P$



това не е допълнението от теорията на множествата

Доказателство: за упражнение; указание: използвайте например, ортонормирани базиси.

Следствие 10 Ако $V \subseteq W$, то $W = V \vee (W \wedge V^\perp)$, т.е., $\mathcal{L}_N$ е ортомодуларна решетка
Съответно: $Q = P + (Q - P)$

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

- Комутируемост в $\mathcal{L}_N$

Теорема 10 $V \mathbf{C} W$ (т.е., V и W "комутират" в смисъл на орторешетки)

$$\Leftrightarrow PQ = QP \quad (\text{т.е., когато } P \text{ и } Q \text{ комутират алгебрично})$$

Теорема 11 Ако $V \mathbf{C} W$ тогава

$$V \wedge W = L \Leftrightarrow PQ = R$$

$$V \vee W = M \Leftrightarrow P + Q - PQ = S$$



логическите операции имат
алгебричен израз **само** за
комутирани събития

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

● Дизюнктивност в $\mathcal{L}_N$

Теорема 12 V, W са дизюнктивни $\Leftrightarrow V \perp W \Leftrightarrow PQ = \hat{0} = QP$

По-общо: $V, W, \dots, L$ са дизюнктивни $\Leftrightarrow V, W, \dots, L$ са взаимно ортогонални

В този случай, сумата на всички ортогонални проектори $S := P + Q + \dots + R$ е отново ортогонален проектор и е върху $M := V \dot{\vee} W \dot{\vee} \dots \dot{\vee} L$ - дизюнктивно решетъчно обединение, което съответства на ортогоналната пряка сума $M = V \oplus W \oplus \dots \oplus L$.

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

● Експерименти над $\mathcal{L}_N$

Следствие 13 **Експеримент**, когато $\text{Events} = \mathcal{L}_N$, с елементарни алтернативи $V, W, \dots, L$ отговаря на **ортогонално разбиване** $\mathbb{C}^N = V \oplus W \oplus \dots \oplus L$, което на свой ред е равносилно на **разбиване на единицата** $\hat{I} = P + Q + \dots + R$

Експериментът е **максимален** $\Leftrightarrow$ елементарните му алтернативи $V, W, \dots, L$ са **еднородни** линейни подпространства на $\mathbb{C}^N$.

$\mathcal{L}_N$ като ортомодуларна решетка

Нека $V, W, L, M \subseteq \mathbb{C}^N$ са линейни подпространства

$P, Q, R, S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ са съответните им ортогонални проектори

$$P = \Pi_V, \quad Q = \Pi_W, \quad R = \Pi_L, \quad S = \Pi_M$$

● Максимални експерименти над $\mathcal{L}_N$

Следствие 14 **Максимален** експеримент (за $\text{Events} = \mathcal{L}_N$) отговаря на **ортонормиран** базис $f_1, \dots, f_N$ на $\mathbb{C}^N$ като съответствието е 1-1 с точност до преназидане на базиса $f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(N)}$ (σ -пермутация) и прескалиране: $e^{i\varphi_1} f_1, \dots, e^{i\varphi_N} f_N$ за $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathbb{R}$. В този случай, разбиването на единицата е

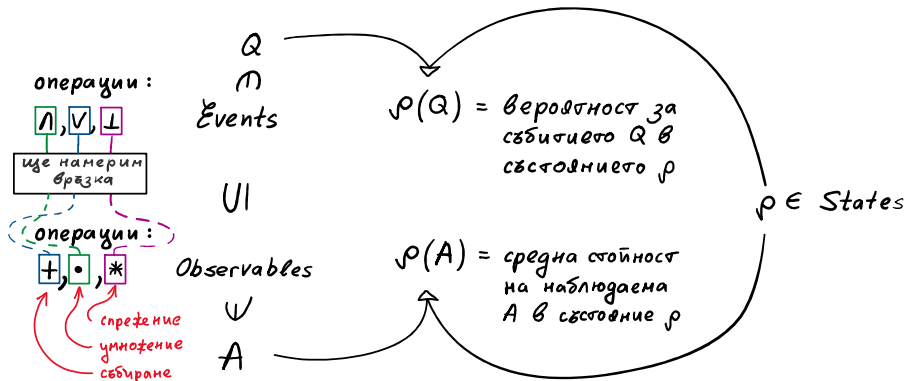
$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + |f_2\rangle\langle f_2| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

Част 2: Алгебричен подход: квантовото произведение

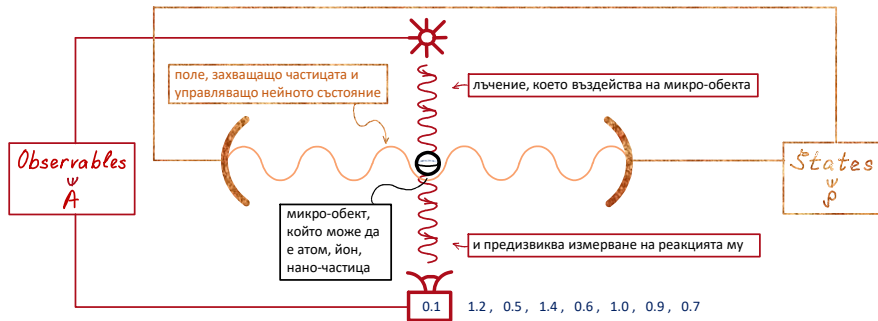
1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти

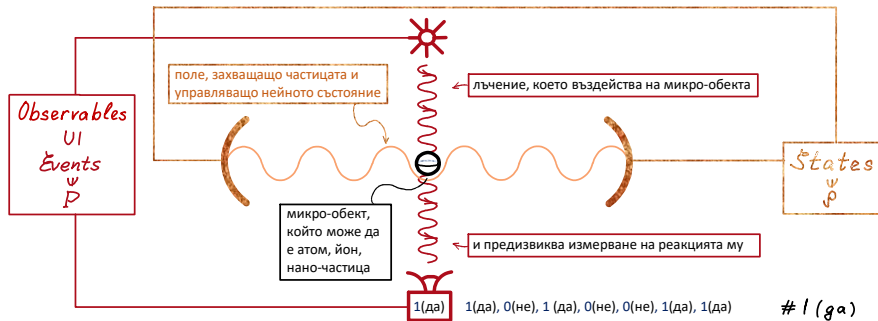


2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Наблюдаемата е експеримент, чиито резултати са числа.



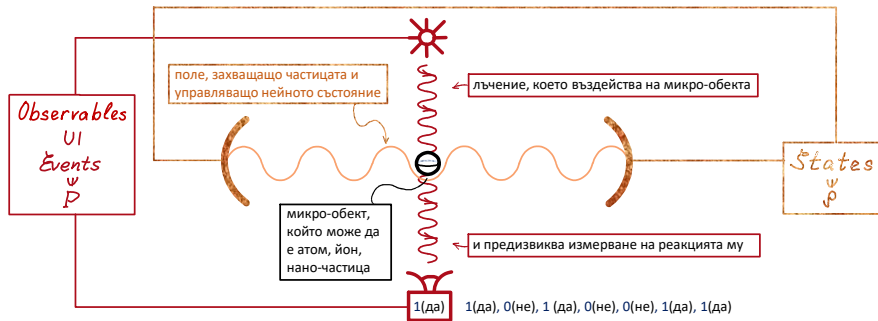
$$\text{Средна стойност на } A \text{ в } \rho =: \langle A \rangle_\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).



Средна стойност на P в $\rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_N}^{\# 1(ga)}}{N}$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).



Средна стойност на P в $\rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) \equiv \text{Prob}_\rho P$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми

- Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).
- Средната стойност на едно събитие, разглеждано, като наблюдаема е равна на неговата вероятност:

$$\text{Средна стойност на } P \text{ в } \rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_N}^{\#1(\rho a)}}{N} \equiv \text{Prob}_\rho P$$

тоест, $\rho: \text{Events} \longrightarrow [0, 1]$ се продължава, като функция

$\begin{array}{ccc} \text{Events} & \longrightarrow & [0, 1] \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ \text{Observables} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$

("диаграмата се затваря до комутативна")

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми

В алгебрения подход състоянието ρ се разширяват, като функции не само в изходната (дефиниционната) им област:

$$\text{Events} \subseteq \text{Observables},$$

разширява се и областта на стойностите им: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Това е така, понеже средните стойности, за разлика от вероятностите, могат да бъдат произволни реални числа.

$$\begin{array}{ccc} \rho: \text{Events} & \longrightarrow & [0, 1] \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ \text{Observables} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

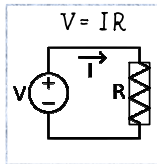
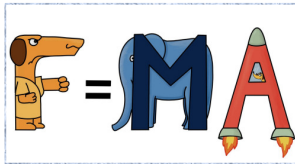
се продължава, като функция

(“диаграмата се затваря до комутативна”)

3. Исторически бележки

- Ние описваме света и неговите закономерности във физиката посредством физическите величини – това са именно наблюдаемите
- Физическите закони се формулират, като алгебрични соотношения между наблюдаемите

Например:



1900



Max Planck
1858 – 1947

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

1925



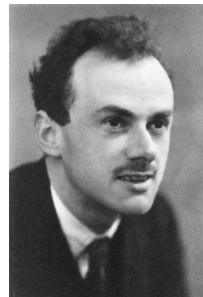
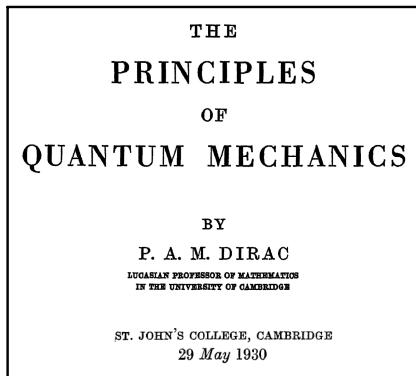
Werner Heisenberg
1901 – 1976

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar$$

1925



1930



Paul Dirac
1902 - 1984

1932

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN
DER QUANTENMECHANIK

VON

JOHANN v. NEUMANN

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1932



John von Neumann
1903 – 1957

1934



Pascual Jordan
1902 – 1980



John von Neumann
1903 – 1957



Eugene Wigner
1902 – 1995

**ON AN ALGEBRAIC GENERALIZATION OF THE QUANTUM
MECHANICAL FORMALISM**

BY P. JORDAN, J. V. NEUMANN, AND E. WIGNER

(Received November 10, 1933)

ANNALS OF MATHEMATICS

Vol. 35, No. 1, January, 1934

1936



Garrett Birkhoff
1911 – 1996



John von Neumann
1903 – 1957

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

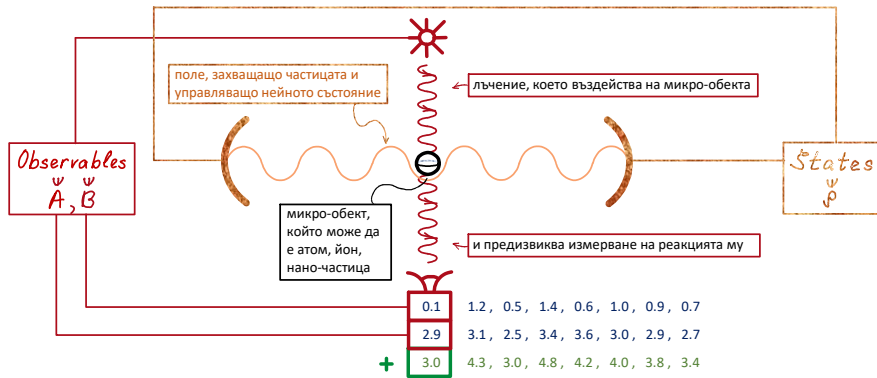
BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чи йто резултати са няколко числа



съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n -торки от числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се ползват заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите:

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^2 \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \cdot B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$

съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- Всяка наблюдаема сама по себе си е съвместна и можем да определим функции от нея. В частност, можем да постулираме (т.е., да въведем аксиома), че в *Observables* има операции $A \mapsto A^n$ - възване на произволна степен $n=1,2,\dots$.

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
A^n	a_1^n	a_2^n	a_3^n	a_4^n	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^n \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_N^n}{N}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle \lambda A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\lambda a_1) + \dots + (\lambda a_N)}{N} = \lambda \langle A \rangle_{\varrho}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\varrho} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\varrho} + \langle B \rangle_{\varrho} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдавани

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle \lambda A \rangle_{\varrho} = \lambda \langle A \rangle_{\varrho}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\varrho} = \langle A \rangle_{\varrho} + \langle B \rangle_{\varrho}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома: $Observables$ е линейно пространство над числовата система ^{поле}, в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ става линейен функционал върху $Observables$ (т.е., линейна функция, чийто стойности са числа):

$$\rho(\lambda A + \mu B) = \lambda \rho(A) + \mu \rho(B)$$

числа
↑ ↑ ↑ ↑
наблюдаеми

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
A.B	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A.B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$\begin{aligned} A \bullet B &= \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2}((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B) \\ &= \frac{1}{2}(\cancel{A \cdot A} + A \cdot B + B \cdot A + \cancel{B \cdot B} - \cancel{A \cdot A} - \cancel{B \cdot B}) = \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A) \end{aligned}$$

$$\text{В частност: } A \cdot B = B \cdot A \iff A \bullet B = A \cdot B$$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е следното

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \text{ , където: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

комутатор

$$2 A \bullet B = A \cdot B + B \cdot A$$

антикомутатор

Проверка:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A}) \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(A \cdot (\cancel{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) + (\underline{B \cdot C} + \cancel{C \cdot B}) \cdot A \right) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} (B \cdot (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) - (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) \cdot B)$$

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение $A \cdot B$, което порожда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно, т.е. комутатора $A \cdot B - B \cdot A =: [A, B] \neq 0$ и Дирак е първия, който го свързва с формулата $[A, B] = i\hbar \{A, B\}$, където $\{A, B\}$ според Дирак $\{A, B\}$ е наблюдаема отразяваща инфинитезималния ефект от измерването на наблюдаемата A върху B . Тя пренася т.нар. "скобка на Пуасон" (Poisson's bracket) от класическата механика в квантовата теория и носи името "скобка на Дирак".

6. Проблемът с производението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i\hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото
произведение

Йордановото
произведение

имагинерна динамична
квантова добавка

- Дирак нарича наблюдаемите "q-числа" (q-quantum), а класическите наблюдаеми "c-числа" (c-classical/commuting). Така, Дирак първи въвежда "q-терминологията" от където по-късно идва и q-битът.

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека $\mathbb{K}$ е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето $\mathbb{K}$ или още, $\mathbb{K}$ -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K}$, което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": " $\cdot$ ". Произведението " $\cdot$ " е дисоригинивно:

за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$

- т.е., можем да разкриваме скоби и да изнасяме числата отпред; нарича се също билинейност (т.е., разделна линейност по двата аргумента).

- $\mathbb{R}$ -алгебрите се наричат още реални алгебри.
- $\mathbb{C}$ -алгебрите се наричат още комплексни алгебри.

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:
 - комутативни и асоциативни алгебри;
 - асоциативни алгебри с единица;
 - комутативни и асоциативни алгебри с единица.
- Отделно, изброените до тук алгебри могат да се реални или комплексни.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)

- $\mathcal{A}$ е антикомутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.

- $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n \cdot A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).

- $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.

- $\mathcal{A}$ е Ли алгебра, ако е антикомутативна и изпълнява т.нар. тождество на Якоби
 $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$, където в този случай е
прието дистрибутивната операция да се бележи с " $[\cdot, \cdot]$ " и да се нарича скобка на Ли.

7. Математическото понятие за алгебра

- Конвенция :

Оттук нататък в курса , когато имаме асоциативна алгебра ще изпускаме точката "." за произведение :

$$A.B \equiv AB$$

Елементите на алгебрата обикновено ще бележим с големи "печатни" латински букви, а алгебрата: $\mathcal{A}$.

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че тогава ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема. Така, асоциативната алгебра $\mathcal{A}$, в която се умножават наблюдаемите е по-широка от Observables: $\mathcal{A} \not\subseteq \text{Observables}$
- Възниква проблем: как да се отделят наблюдаемите. За тази цел се постулира, че в $\mathcal{A}$ има допълнителна операция, спре~~ж~~ение:

$$A \in \mathcal{A} \mapsto A^* \in \mathcal{A}$$

$$\text{т.е.}: A^{**} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A}), \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}) \quad \text{и}$$

$$A \in \text{Observables} \iff A = A^* \quad (\text{самоспрежнатост})$$

selfadjoint

8. Спрежение

- Така, $Observables$ се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \overline{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).
- Също така, ако $A, B \in Observables$ (наблюдаеми), то $(AB)^* = B^* A^* = BA$.
Следователно, ако A и B са наблюдаеми ($A, B \in Observables$), то:
 - $(A \bullet B)^* = A \bullet B$ (Йордановото произведение на наблюдаеми е пак наблюдаемо)
 - $(i[A, B])^* = i[A, B]$ (скобката на Дирак на наблюдаеми е пак наблюдаема)
 - AB е наблюдаема $\iff AB = BA$ (A и B комутират)

9. $\ast$ -Алгебри (Star algebras / involutive algebras).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е :
 - (инволютивна / involutive) $A^{\ast\ast} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A})$;
 - (антилинейна / antilinear) $(\alpha A + \beta B)^{\ast} = \bar{\alpha} A^{\ast} + \bar{\beta} B^{\ast} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{A})$;
 - (антиморфизъм / antimorphism) $(AB)^{\ast} = B^{\ast} A^{\ast} \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$.
- $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$ се нарича положителна (още, формално положителна / formally real или също, евклидова / Euclidean), ако $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$:

$$A_1^{\ast} A_1 + \dots + A_n^{\ast} A_n = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \dots = A_n = 0.$$

10. Аксиоми на алгебричния подход

- Съществува комплексна, асоциативна, $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица, която е положителна, така, че $A \in \text{Observables} \iff A \in \mathcal{A}$ и $A = A^\ast$.
 $\mathcal{A}$ се нарича алгебра на наблюдаемите (макар, че не всички нейни елементи са наблюдаеми).
 - Крайност: $\mathcal{A}$ е крайно-мерно линейно пространство.
 - $\rho \in \text{States} \iff \rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линейен функционал, който изпълнява свойствата:
(нормираност) $\rho(\hat{1}) = 1$;
(положителност) $\rho(A^\ast A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.
 - За наблюдаема A : $\rho(A) =: \langle A \rangle_\rho$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ .
-