

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 6 / 13.11.2023, версия 1

В тази презентация :

текст, който е **маркиран** в **сво** или

има поставена **сво** лента **отпред** се счита
за допълнителен материал

"Литомна" алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна $\ast$ -алгебра с 1
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1): $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$. $\dim \mathcal{A} = N^2$, ниво = N . Положителност?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{N1}} & \cdots & \overline{a_{NN}} \end{pmatrix}}^{A^*} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}}^X \Rightarrow x_{11} = \underbrace{|a_{11}|^2}_{0} + \cdots + \underbrace{|a_{N1}|^2}_{0} = 0$$

, ... ,

$$B^* B = Y$$

Извод: $A^* A + B^* B + \cdots + C^* C = 0 \Rightarrow A = B = \cdots = C = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\hat{1}$$

Пример за неположителна $\ast$ -алгебра: $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$, но $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$
 (за уравнение)

"Литомна" алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна $\ast$ -алгебра с I

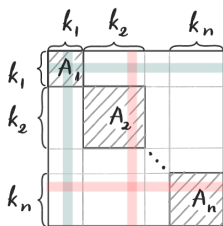
Упражнение $\left\{ \begin{array}{l} \exists C \in \mathcal{A}, A := \frac{1}{2}(C + C^*), B := \frac{1}{2i}(C - C^*) \\ \text{тогава } C = A + iB, \text{ за } A = A^*, B = B^*, \\ AB = BA \iff CC^* = C^*C \end{array} \right.$

наричат се нормални елементи

Забележка: а) $A \in \text{Observables} \iff A = A^*$

б) За $A, B \in \text{Observables}$: $AB \in \text{Observables} \iff AB = BA$ (Защо?)

Пример 2: Нека $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ - фиксирано наредено разбиване ($k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$)



$$\in \text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Упражнение

“питомна” подалгебра

$$\alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n)$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n)$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$$



за $A_j \in \text{Mat}_{k_j}$

блоково-диагонални матрици

Пример 2: Нека $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ - фиксирано наредено разбиване ($k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$)

Два гранични случая:

а) $n = 1$: $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б) $n = N$, $k_1 = \dots = k_N = 1$

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

“питомна” подалгебра

Упражнение

$$\begin{aligned} & \alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n) \end{aligned}$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

Пример 2: Нека $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ - фиксирано наредено разбиване ($k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$)

Два гранични случая:

а) $n = 1$: $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б) $n = N$, $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \mathbb{R} \in a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Следствие: (1) — е комутативна $\Leftrightarrow$ случай б)

$$\begin{aligned} & \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n) \end{aligned}$$

Пример 2: Нека $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ - фиксирано наредено разбиване ($k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$)

Два гранични случая:

а) $n = 1$: $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б) $n = N$, $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{c} \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

алгебратата на
функции $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Следствие: (1) $-|-$ е комутативна $\Leftrightarrow$ случай б)

(2) $\text{Mat}_{1,1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, за $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

основна
структурна

Теорема Всяка питонна алгебра е от вида / изоморфна на $\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C})$ за единствен набор $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ с точност до пренареждане (при $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ - единствен).

Определение Класическа система := такава с комутативна $\mathcal{A}$
= когато $\mathcal{A} \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$

Подсистема / надсистема, експеримент $\Leftarrow$ $\star$ -подалгебра с $\uparrow$ по
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ | линейно подпространство $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, $\Leftarrow$ определение
така че $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$ и $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

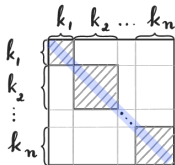
Експеримент := класическа подсистема = комутативна $\star$ -подалгебра с $\uparrow$

Максимален експеримент := максимална (неразширяема) — / — по
ниво на системата := нейната размерност $\Leftarrow$ определение

за $\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C})$

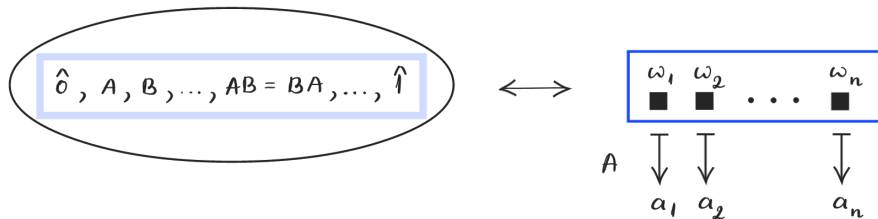
размерност $\nwarrow$ $\nearrow$ ниво

$$k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 > k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



$\Leftarrow$ чисто диагоналните
матрици задават една
максимална комутативна
подалгебра

Експеримент – класическа картина



Наблюдаемите, $A = A^*$ стават реално-значни функции

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$:
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални
собствени
стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упрощение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$,
 които са единствени с точност до пренареждане
 и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

$$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

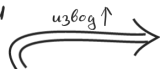
$$\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

разбиване на $\hat{1}$

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$$\text{Нека: } \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k_1}}_{\alpha_1} < \underbrace{\lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_1+2} = \dots = \lambda_{k_1+k_2}}_{\alpha_2} < \dots < \underbrace{\lambda_N}_{\alpha_n}$$

$$A = \underbrace{\alpha_1 (|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_{k_1}\rangle\langle f_{k_1}|)}_{Q_1} + \underbrace{\alpha_2 (|f_{k_1+1}\rangle\langle f_{k_1+1}| + \dots + |f_{k_1+k_2}\rangle\langle f_{k_1+k_2}|)}_{Q_2} + \dots$$



- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни

- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на $\hat{I}$

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

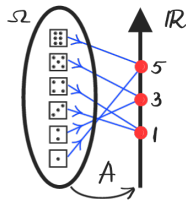
упростение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$
и използвайте равенство върху базис

Определение: $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ - спектр на наблюдаемата A

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - спектрални стойности, $Q_1, \dots, Q_n$ - съответни текторални събития

Интерпретация: • в класическа система, ако $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\begin{smallmatrix} \text{класическа наблюдаема} \\ = \text{функция} \end{smallmatrix}$)
тогава $\text{Spec } A = A(\Omega)$ ($\begin{smallmatrix} \text{стойностите на} \\ A \text{ като функция} \end{smallmatrix}$) за $\alpha_j \in \text{Spec } A: Q_j = \chi_{S_j}, S_j := A^{-1}(\alpha_j)$



$$A = 1 \cdot \chi_{\{3,4\}} + 3 \cdot \chi_{\{2,5\}} + 5 \cdot \chi_{\{1,6\}}$$

характеристична функция

$$\chi_S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in S \\ 0 & \text{при } \omega \notin S \end{cases}$$

За $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

$$\bullet Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$$

$$\bullet A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

$$\bullet \hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

разбиване на $\hat{1}$

Определение: $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ - спектр на наблюдаемата A
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - спектрални стойности, $Q_1, \dots, Q_n$ - съответни текторални събития

Интерпретация:

- в обща смислена това е разбиване по възможни стойности (при измерване) и събития съответстващи на измерването на тези стойности

$$\begin{aligned} \text{средна стойност } \rho(A) &= \underbrace{\alpha_1}_{\text{стойности}} \underbrace{\rho(Q_1)}_{\text{вероятности}} + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{\text{стойности}} \underbrace{\rho(Q_n)}_{\text{вероятности}} \\ &= \text{сума от } \text{стойности} \text{ по } \text{вероятности} \end{aligned}$$

Потвърждава се: самоспрегнат идентичен
 Q е събитие $\iff Q^* = Q = Q^2$
 ортогонален проектор

За $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

$$\bullet Q_j^* = Q_j = Q_j^2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\bullet A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

$$\bullet \hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

разбиване на $\hat{1}$

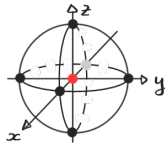
Квантов (q -) бит : $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a}, d = \bar{d} - \text{реални} \iff a = r+z, d = r-z, r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x+iy, \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{общо 4 реални}$$

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}, \det(A - \lambda \hat{I}) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A \text{ е } \overset{\text{сн.т.}}{\text{сбдитие}} \iff \lambda_{1,2} \in \{0, 1\} \iff A = \hat{0}, \hat{I} \text{ или } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \exists (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \text{т.е., } \exists x^2 + y^2 + z^2 = 1. \\ \text{сфера на Блох / Bloch} \end{array} \right.$$

Уникално съвпадение Множеството на елементарните сбдития (най-простата квантова логическа структура) има геометрията и симетрията на $\mathbb{S}^2$ (двумерната сфера).



Състояние: $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$ линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието ρ

Теорема ρ е състояние
(т.е., $\rho(\hat{I}) = 1$ и $\rho(A^*A) \geq 0$) $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{tr} \hat{\rho} = 1 \\ \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^* \\ \bullet \hat{\rho} \text{ е положително дефинитна} \end{array} \right.$

Теорема $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ - смес

$$\Leftrightarrow \hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$$

Следствие ρ - чисто $\Leftrightarrow \text{rank } \hat{\rho} = 1$
 $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$ квадратна

$\downarrow \text{trace}$
 $\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$

Основни свойства на следа

- $\bullet \text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA)$ $\leftarrow$ циклическост
- квадратна, но $A, B, \dots, C$ - по-общи
- $\bullet \text{tr} \hat{I}_N = N$ $N \times N$

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



Чисти състояния и вектори на състоянието

Ако $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$, то $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1\bar{\psi}_1 & \psi_1\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_1\bar{\psi}_N \\ \psi_2\bar{\psi}_1 & \psi_2\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_2\bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N\bar{\psi}_1 & \psi_N\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_N\bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \dots + |\psi_{NN}|^2}_{\| \Leftrightarrow \Psi\text{-единицен}}$

$\rho\text{-чисто} \Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ и $\text{tr } \hat{\rho} = 1$

$\hat{\rho}$ вектор на състоянието

При това: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Psi = e^{i\varphi}\Phi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$

Изводи: • векторите на състоянието са единични и са определени от състоянието с точност до фазов множител

• Само чистите състояния имат вектори

• Има 1-1 съответствие:

чисто състояние $\leftrightarrow$ елементарно събитие

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

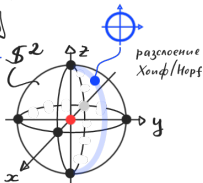
За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$\mathcal{S}^3$

$$\begin{cases} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$



Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме: $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_N(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$ за единичен $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

$\rho_{\Psi}(A) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$

$\text{tr}_1(\underbrace{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}_{1 \times 1\text{-матрица} = \text{число}}) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$

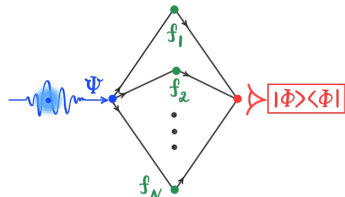
Вероятност и амплитуда на преход

Нека ρ -чисто състояние $\leftrightarrow$ P -елементарно събитие $\leftarrow \Psi \in \mathbb{C}^N$ -единичен
 σ -чисто състояние $\leftrightarrow$ Q -елементарно събитие $\leftarrow \Phi \in \mathbb{C}^N$ -единичен

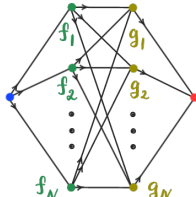
Тогава $\rho(Q) = \underbrace{\langle\Psi|\Phi\rangle}_{\substack{\text{вероятност} \\ \Psi \rightarrow \Phi}} \underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\substack{\text{амплитуди} \\ \Phi \rightarrow \Psi}} = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2 = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \underbrace{\sigma(P)}_{\substack{\text{вероятност} \\ \Phi \rightarrow \Psi}}$

Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

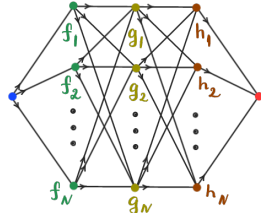
$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{\uparrow} | \Phi \rangle$$



$$= \langle \Psi | \hat{\uparrow} \hat{\uparrow} | \Phi \rangle$$



$$= \langle \Psi | \hat{\uparrow} \hat{\uparrow} \hat{\uparrow} | \Phi \rangle$$



$$= \sum_{j=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | \Phi \rangle = \sum_{j,k=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | g_k \rangle \langle g_k | \Phi \rangle$$

$$= \sum_{j,k,\ell=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | g_k \rangle \langle g_k | h_\ell \rangle \langle h_\ell | \Phi \rangle$$

Алгебричен подход с алгебри на Йордан

Алгебра на Йордан (Йорданова алгебра / Jordan algebra) е реална комутативна алгебра, възможно неасоциативна, но вместо това: "степенно асоциативна": т.е., такава че $A^k \bullet A^l = A^{k+l}$, където $A^{n+1} := A \bullet A^n$ и " $\bullet$ " е Йордановото произведение.

Предполага се, че *Observables* е Йорданова алгебра с единица, която е положителна в смисъл, че ако $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \hat{0}$, то $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \hat{0}$; също е крайно-мерна.

- $\Rightarrow$ - *Observables* се разлага в пряка сума прости (т.е., е хибридна система)
- Възможните прости компоненти на *Observables* са класифицирани: всеки те с изключение на една са "специални" (special): в тях $A \bullet B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ се реализира в асоциативна $\star$ -алгебра (но освен над $\mathbb{C}$, също и над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$). Albert algebra
 - Има единствена проста изключителна (exceptional) Йорданова алгебра (на Алберт, $\dim = 27$)