

# *КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА*

Николай М. Николов

Лекция 6 / 13.11.2023, версия 1

В тази презентация :

текст, който е **маркиран** в **сво** или

има поставена **сво** лента **отпред** се счита  
за допълнителен материал

“Питомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $\downarrow$

“Питомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $\downarrow$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

“Литомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $\downarrow$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1):  $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ .  $\dim \mathcal{A} = N^2$ , ниво =  $N$ . Положителност?

“Литомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $1$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1):  $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ .  $\dim \mathcal{A} = N^2$ , ниво =  $N$ . Положителност?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{N1}} & \cdots & \overline{a_{NN}} \end{pmatrix}}^{A^*} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}}^X \Rightarrow x_{11} = \underbrace{|a_{11}|^2}_{0} + \cdots + \underbrace{|a_{N1}|^2}_{0} = 0$$

, ... ,

“Литомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $1$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1):  $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ .  $\dim \mathcal{A} = N^2$ , ниво =  $N$ . Положителност?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{N1}} & \cdots & \overline{a_{NN}} \end{pmatrix}}^{A^*} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}}^X \Rightarrow x_{11} = \underbrace{|a_{11}|^2}_{0} + \cdots + \underbrace{|a_{N1}|^2}_{0} = 0$$

$B^* B = Y$

“Питомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с 1  
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1):  $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ .  $\dim \mathcal{A} = N^2$ , ниво =  $N$ . Положителност?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{N1}} & \cdots & \overline{a_{NN}} \end{pmatrix}}^{A^*} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}}^X \Rightarrow x_{11} = \underbrace{|a_{11}|^2 + \cdots + |a_{N1}|^2}_0 = 0$$

$$B^* B = Y$$

$$\text{Извод: } A^* A + B^* B + \cdots + C^* C = 0 \Rightarrow A = B = \cdots = C = 0$$

“Питомна” алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\star$ -алгебра с  $1$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1):  $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ .  $\dim \mathcal{A} = N^2$ , ниво =  $N$ . Положителност?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{N1}} & \cdots & \overline{a_{NN}} \end{pmatrix}}^{A^*} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}}^X \Rightarrow x_{11} = \underbrace{|a_{11}|^2}_{0} + \cdots + \underbrace{|a_{N1}|^2}_{0} = 0$$

, ... ,

$$B^* B = Y$$

Извод:  $A^* A + B^* B + \cdots + C^* C = 0 \Rightarrow A = B = \cdots = C = 0$

Пример за неположителна  $\star$ -алгебра:  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ , но  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\star := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$   
 (за уравнение)

"Литомна" алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $1$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ni A, B, C$

Основен пример (1):  $\mathcal{A} = \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ .  $\dim \mathcal{A} = N^2$ , ниво =  $N$ . Положителност?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{N1}} & \cdots & \overline{a_{NN}} \end{pmatrix}}^{A^*} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}}^X \Rightarrow x_{11} = \underbrace{|a_{11}|^2}_{=0} + \cdots + \underbrace{|a_{N1}|^2}_{=0} = 0$$

$$B^* B = Y$$

Извод:  $A^* A + B^* B + \cdots + C^* C = 0 \Rightarrow A = B = \cdots = C = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\hat{1}$$

Пример за неположителна  $\ast$ -алгебра:  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ , но  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$   
 (за уравнение)

“Питомна” алгебра  $\coloneqq$  крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $\downarrow$   
 $\hookrightarrow \mathcal{A} \ni C$

“Питомна” алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $*$ -алгебра с  $I$

$$\hookrightarrow \exists C \in \mathcal{A} \text{ , } A := \frac{1}{2}(C + C^*), \quad B := \frac{1}{2i}(C - C^*)$$

Упражнение

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{тогава } C = A + iB, \text{ за } A = A^*, B = B^* \\ AB = BA \iff CC^* = C^*C \end{array} \right.$$

“Питомна” алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $*$ -алгебра с  $I$

Упражнение  $\left\{ \begin{array}{l} \exists C, A := \frac{1}{2}(C + C^*), B := \frac{1}{2i}(C - C^*) \\ \text{тогава } C = A + iB, \text{ за } A = A^*, B = B^*, \\ AB = BA \iff CC^* = C^*C \end{array} \right.$

наричат се  
нормални  
елементи

"Литомна" алгебра := крайно-мерна, положителна, асоциативна, комплексна  $\ast$ -алгебра с  $I$

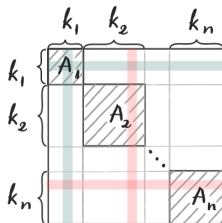
Упражнение  $\left\{ \begin{array}{l} \exists C \in \mathcal{A} \text{ , } A := \frac{1}{2}(C + C^*), B := \frac{1}{2i}(C - C^*) \\ \text{тогава } C = A + iB \text{ , за } A = A^*, B = B^*, \\ AB = BA \iff CC^* = C^*C \end{array} \right.$  наричат се нормални елементи

Забележка: а)  $A \in \text{Observables} \iff A = A^*$

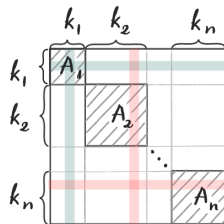
б) За  $A, B \in \text{Observables}$ :  $AB \in \text{Observables} \iff AB = BA$  (Защо?)

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )



Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

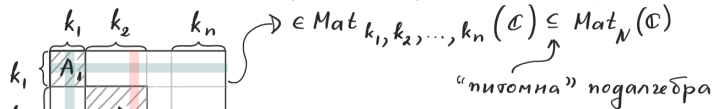


$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

↑  
за  $A_j \in \text{Mat}_{k_j}$

блочно-диагонални матрици

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )



$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

↑  
за  $A_j \in \text{Mat}_{k_j}$   
блочно-диагонални матрици

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиение ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

$$\in \text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

“питомна” подалгебра

$$\alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n)$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n)$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

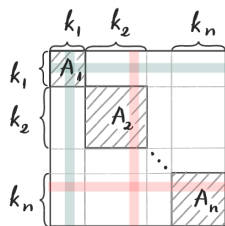
$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$\uparrow \quad \text{за } A_j \in \text{Mat}_{k_j}$$

блоково-диагонални матрици

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )



$$\in \text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Упражнение

“питомна” подалгебра

$$\alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n)$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n)$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

$$=: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$$



за  $A_j \in \text{Mat}_{k_j}$

блоково-диагонални матрици

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Упражнение

“питомна” подалгебра

$$\alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n)$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n)$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

“питомна” подалгебра

Упражнение

$$\alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n)$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n)$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

“питомна” подалгебра

Упражнение

$$\alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n)$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n)$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

“питомна” подалгебра

Упражнение

$$\begin{aligned} & \alpha \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) + \beta \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n) \end{aligned}$$

$$\text{diag}(\hat{1}, \hat{1}, \dots, \hat{1}) = \hat{1}$$

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)^* = \text{diag}(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{R} \in a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

“питомна” подалгебра

$$\begin{aligned} & \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n) \end{aligned}$$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{R} \in a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Следствие: (1) — е комутативна  $\Leftrightarrow$  случай б)

$$\begin{aligned} & \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n) \end{aligned}$$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Следствие: (1) — е комутативна  $\Leftrightarrow$  случай б)

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$



$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$   
 $A \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $\mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

Следствия: (1)  $-|-$  е комутативна  $\Leftrightarrow$  случай б)

(2)  $\text{Mat}_{1,1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ , за  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$



$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$   
 $A \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $\mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N$

$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$

алгебратата на  
функции  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Следствия: (1)  $-|-$  е комутативна  $\Leftrightarrow$  случай б)

(2)  $\text{Mat}_{1,1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ , за  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \} \\ A \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

алгебрата на  
функции  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Следствие: (1)  $-|-$  е комутативна  $\Leftrightarrow$  случай б)

(2)  $\text{Mat}_{1,1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ , за  $\Omega = \{ \omega_1, \dots, \omega_N \}$

основна  
структурна

Теорема Всяка питонна алгебра е от вида / изоморфна на  $\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C})$  за единсовен набор  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  с точност до пренареждане (при  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$  - единсовен).

Пример 2: Нека  $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  - фиксирано наредено разбиване ( $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ )

Два гранични случая:

а)  $n = 1$ :  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$

- (чисто) квантови системи

б)  $n = N$ ,  $k_1 = \dots = k_N = 1$

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



$$\begin{array}{c} \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{C} \ni a_1, a_2, \dots, a_N \end{array}$$

$$\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

алгебратата на  
функции  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Следствие: (1)  $-|-$  е комутативна  $\Leftrightarrow$  случай б)

(2)  $\text{Mat}_{1,1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ , за  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

основна  
структурна

Теорема Всяка питонна алгебра е от вида / изоморфна на  $\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C})$  за единствен набор  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  с точност до пренареждане (при  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$  - единствен).

Определение Класическа система := такава с комутативна  $\mathcal{A}$   
= когато  $\mathcal{A} \cong \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$

Подсистема / надсистема, эксперимент  $\Leftarrow$   $\star$ -подалгебра с  $\uparrow$

Подсистема / надсистема, эксперимент  $\Leftarrow$   $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$  по  
линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
така се  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

Подсистема / надсистема, эксперимент  $\Leftarrow$   $\star$ -подалгебра с  $\hat{1}$  по  
линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
также  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

Подсистема / надсистема, експеримент  $\Leftarrow$   $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$  по  
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$  | линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
 така че  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

Експеримент := класическа подсистема = комутативна  $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$

Подсистема / надсистема, експеримент  $\Leftarrow$   $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$  по  
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$  | линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
 така че  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

Експеримент := класическа подсистема = комутативна  $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$

Максимален експеримент := максимална (неразширяема) — / —

Подсистема / надсистема, експеримент  $\Leftarrow$   $\star$ -подалгебра с  $\hat{1}$  по  
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$  | линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
 така че  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

Експеримент := класическа подсистема = комутативна  $\star$ -подалгебра с  $\hat{1}$

Максимален експеримент := максимална (неразширяема) — / — по  
ниво на системата := нейната размерност  $\Leftarrow$  определение

Подсистема / надсистема, експеримент  $\Leftarrow$   $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$  по  
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$  линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
така че  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

Експеримент := класическа подсистема = комутативна  $\ast$ -подалгебра с  $\hat{1}$

Максимален експеримент := максимална (неразширяема) — / — по  
ниво на системата := нейната размерност  $\Leftarrow$  определение

за  $\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C})$   
размерност  $\searrow$   $\swarrow$  ниво  
 $k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 > k_1 + k_2 + \dots + k_n$

Подсистема / надсистема, експеримент  $\Leftarrow$   $\ast$ -подалгебра с  $\uparrow$  по  
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$  | линейно подпространство  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Leftarrow$  определение  
 така че  $\hat{1} \in \mathcal{A}_1$  и  $A, B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow AB \in \mathcal{A}_1, A^* \in \mathcal{A}_1$

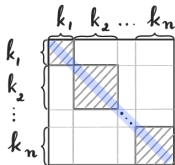
Експеримент := класическа подсистема = комутативна  $\ast$ -подалгебра с  $\uparrow$

Максимален експеримент := максимална (неразширяема) — / — по  
ниво на системата := нейната размерност  $\Leftarrow$  определение

за  $\text{Mat}_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbb{C})$

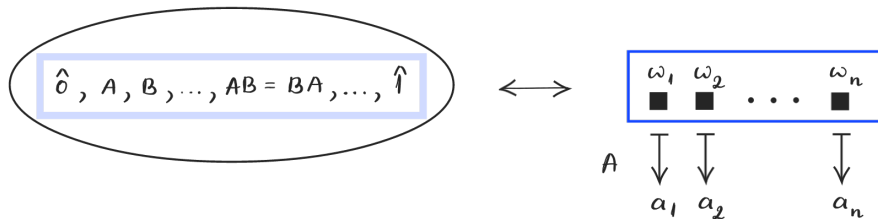
размерност  $\nwarrow$   $\nearrow$  ниво

$$k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 > k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



$\Leftarrow$  чисто диагоналните  
 матрици задават една  
 максимална комутативна  
 подалгебра

Експеримент – класическа картина



Наблюдаемите,  $A = A^*$  стават реално-значни функции

Спектрална теорема    Нека  $A = A^*$  (самопръжен)

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самопрезнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

$A \in \mathcal{A}$  - нормална алгебра

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова  
Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрезнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова  
 Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N \quad \begin{array}{l} \text{реални} \\ \text{собствени} \\ \text{стойности} \end{array}$$

При това :

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle \langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + |f_N\rangle \langle f_N|$$

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрезнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова  
 Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това :

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle \langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + |f_N\rangle \langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това :

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle \langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + |f_N\rangle \langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Съществуват двойки  $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$ ,  
 които са единствени с точност до пренареждане

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това :

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle \langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + |f_N\rangle \langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Съществуват двойки  $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$ ,  
 които са единствени с точност до пренареждане  
 и са такива, че :

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питома алгебра

Съществуват двойки  $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$ ,  
 които са единствени с точност до пренареждане  
 и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това:

$$\begin{cases} A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N| \\ \hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N| \end{cases}$$

упражнение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Съществуват двойки  $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$ ,  
 които са единствени с точност до пренареждане  
 и са такива, че:

•  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни

•  $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

•  $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle \langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle \langle f_1| + \dots + |f_N\rangle \langle f_N|$$

упрощение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Съществуват двойки  $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$ ,  
 които са единствени с точност до пренареждане  
 и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни

- $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ , т.е.,  $A$  е  $N \times N$ , ермитова

Съществува ортонормиран базис на  $\mathbb{C}^N$ :  
 $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$ , от собствени вектори за  $A$

$$A f_j = \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, N$$

реални  
собствени  
стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упростение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
 и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$  - питомна алгебра

Съществуват двойки  $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$ ,  
 които са единствени с точност до пренареждане  
 и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

$$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

$$\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

разбиване на  $\hat{1}$

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упростение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
и използвайте равенство върху базис

извод  $\uparrow$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{I}$

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$$\text{Нека: } \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k_1}}_{\alpha_1} < \underbrace{\lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_1+2} = \dots = \lambda_{k_1+k_2}}_{\alpha_2} < \dots < \underbrace{\lambda_N}_{\alpha_n}$$

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N| \\ \hat{I} &= |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N| \end{aligned}$$

упростение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
и използвайте равенство върху базис

извод  $\uparrow$

•  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни

•  $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

•  $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

•  $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{I}$

Спектрална теорема Нека  $A = A^*$  (самоспрегнат)

$$\text{Нека: } \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k_1}}_{\alpha_1} < \underbrace{\lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_1+2} = \dots = \lambda_{k_1+k_2}}_{\alpha_2} < \dots < \underbrace{\lambda_N}_{\alpha_n}$$

$$A = \underbrace{\alpha_1 (|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_{k_1}\rangle\langle f_{k_1}|)}_{Q_1} + \underbrace{\alpha_2 (|f_{k_1+1}\rangle\langle f_{k_1+1}| + \dots + |f_{k_1+k_2}\rangle\langle f_{k_1+k_2}|)}_{Q_2} + \dots$$

извод  $\uparrow$

$$\begin{cases} A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N| \\ \hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N| \end{cases}$$

упростение

- приложете двете страни върху  $|f_j\rangle$   
и използвайте равенство върху базис

•  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са реални и са две по две различни

•  $Q_1, \dots, Q_n$  са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \stackrel{\downarrow}{=} Q_j \stackrel{\downarrow}{=} Q_j^2$$

•  $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

•  $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_n, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{I}$

За  $A = A^*$   $\exists!$   $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ,  $Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2$ ,  $j = 1, \dots, n$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n$ ,  $Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни текторални събития

За  $A = A^*$   $\exists!$   $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ,  $Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2$ ,  $j = 1, \dots, n$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n$ ,  $Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни проекторни събития

Интерпретация: • в класическа система, ако  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\begin{smallmatrix} \text{класическа наблюдаема} \\ = \text{функция} \end{smallmatrix}$ )  
 тогава  $\text{Spec } A = A(\Omega)$  ( $\begin{smallmatrix} \text{стойностите на} \\ A \text{ като функция} \end{smallmatrix}$ ) за  $\alpha_j \in \text{Spec } A: Q_j = \chi_{S_j}, S_j := A^{-1}(\alpha_j)$

За  $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни текторални събития

Интерпретация: • в класическа система, ако  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\begin{smallmatrix} \text{класическа наблюдаема} \\ = \text{функция} \end{smallmatrix}$ )  
 тогава  $\text{Spec } A = A(\Omega)$  ( $\begin{smallmatrix} \text{стойностите на} \\ A \text{ като функция} \end{smallmatrix}$ ) за  $\alpha_j \in \text{Spec } A: Q_j = \chi_{S_j}, S_j := A^{-1}(\alpha_j)$

характеристична функция

$\chi_S(\omega)$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in S \\ 0 & \text{при } \omega \notin S \end{cases}$$

За  $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

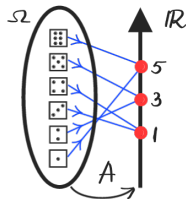
- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни текторални събития

Интерпретация: • в класическа система, ако  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\begin{smallmatrix} \text{класическа наблюдаема} \\ = \text{функция} \end{smallmatrix}$ )  
тогава  $\text{Spec } A = A(\Omega)$  ( $\begin{smallmatrix} \text{стойностите на} \\ A \text{ като функция} \end{smallmatrix}$ ) за  $\alpha_j \in \text{Spec } A: Q_j = \chi_{S_j}, S_j := A^{-1}(\alpha_j)$



$$A = 1 \cdot \chi_{\{3,4\}} + 3 \cdot \chi_{\{2,5\}} + 5 \cdot \chi_{\{1,6\}}$$

характеристична функция

$$\chi_S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in S \\ 0 & \text{при } \omega \notin S \end{cases}$$

За  $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

$$\bullet Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$$

$$\bullet A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

$$\bullet \hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни текторални събития

Интерпретация:

- в обща мясена това е разбиване по възможни стойности (при измерване) и събития съответстващи на измерването на тези стойности

За  $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни текторални събития

Интерпретация:

- в обща смислена това е разбиване по възможни стойности (при измерване) и събития съответстващи на измерването на тези стойности

Потвърждава се: самоспрегнат идентичен  
 $Q$  е събитие  $\Leftrightarrow Q^* = Q = Q^2$   
 ортогонален проектор

За  $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на  $\hat{1}$

Определение:  $\text{Spec } A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  - спектр на наблюдаемата  $A$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - спектрални стойности,  $Q_1, \dots, Q_n$  - съответни текторални събития

Интерпретация:

- в обща смислена това е разбиване по възможни стойности (при измерване) и събития съответстващи на измерването на тези стойности

$$\begin{aligned} \text{средна стойност } \rho(A) &= \underbrace{\alpha_1 \rho(Q_1)} + \dots + \underbrace{\alpha_n \rho(Q_n)} \\ &= \text{сума от } \text{стойности} \text{ по } \text{вероятности} \end{aligned}$$

Потвърждава се: самоспрегнат идентичен  
 $Q$  е събитие  $\Leftrightarrow Q^* = Q = Q^2$   
 ортогонален проектор

За  $A = A^* \exists! \alpha_1 < \dots < \alpha_n, Q_1, \dots, Q_n$

$$\bullet Q_j^* = Q_j = Q_j^2, j = 1, \dots, n$$

$$\bullet A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

$$\bullet \hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n, Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

разбиване на  $\hat{1}$

Квантов ( $q$ -) бит :  $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

Квантов ( $q$ -) бит :  $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a}, d = \bar{d} - \text{реални} \iff a = r+z, d = r-z, r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x+iy, \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

общо 4 реални

Квантов ( $q$ -) бит :  $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a}, d = \bar{d} - \text{реални} \iff a = r+z, d = r-z, r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x+iy, \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{общо 4 реални}}$$

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$$

Квантов ( $q$ -) бит :  $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a}, d = \bar{d} - \text{реални} \iff a = r+z, d = r-z, r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x+iy, \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{общо 4 реални}}$$

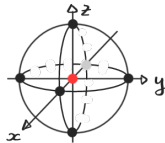
$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}, \det(A - \lambda \hat{I}) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Квантов ( $q$ -) бит :  $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a}, d = \bar{d} - \text{реални} \iff a = r+z, d = r-z, r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x+iy, \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{общо 4 реални}$$

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}, \det(A - \lambda \hat{I}) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A \text{ е } \overset{\text{сн.т.}}{\text{свободно}} \iff \lambda_{1,2} \in \{0, 1\} \iff A = \hat{0}, \hat{I} \text{ или } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \exists (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \text{т.е., } \exists x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \text{сфера на Блох / Bloch} \end{array} \right.$$



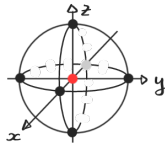
Квантов ( $q$ -) бит :  $\mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

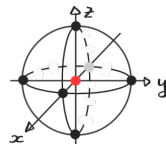
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a}, d = \bar{d} - \text{реални} \iff a = r+z, d = r-z, r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x+iy, \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{общо 4 реални}$$

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}, \det(A - \lambda \hat{I}) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A \text{ е } \overset{\text{сн.т.}}{\text{сбдитие}} \iff \lambda_{1,2} \in \{0, 1\} \iff A = \hat{0}, \hat{I} \text{ или } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \exists (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \text{т.е., } \exists x^2 + y^2 + z^2 = 1. \\ \text{сфера на Блох / Bloch} \end{array} \right.$$

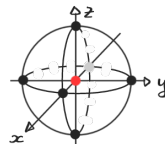
Уникално съвпадение Множеството на елементарните сбдития (най-простата квантова логическа структура) има геометрията и симетрията на  $\mathbb{S}^2$  (двумерната сфера).





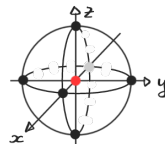
Состояния :  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$= \rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21} + \rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}$$



Состояния :  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow \text{линейно по } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\left( \begin{array}{c} \rho_{11} \rho_{12} \\ \rho_{21} \rho_{22} \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{:= \hat{\rho}}} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}}$$





Състояние:  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

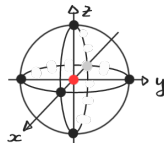
$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието  $\rho$

Следата на  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$  квадратична

$\downarrow$  trace

$$\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$



Състояние:  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието  $\rho$

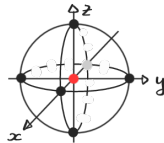
Следа на  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$  квадратна

$\downarrow$  trace

$$\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$

Основни свойства на следа

- $\text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA)$   $\leftarrow$  циклическост
  - $\text{tr} \hat{1}_N = N$   $N \times N$
- квадратна, но  $A, B, \dots, C$  - по-общо



Състояние:  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието  $\rho$

Теорема  $\rho$  е състояние  
(т.е.,  $\rho(\hat{I}) = 1$  и  $\rho(A^*A) \geq 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{tr} \hat{\rho} = 1 \\ \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^* \\ \bullet \hat{\rho} \text{ е положително дефинитна} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

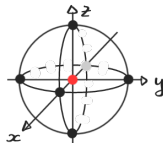
Следа на  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$  квадратна

$\downarrow \text{trace}$

$$\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$

Основни свойства на следа

- $\bullet \text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA) \leftarrow$  циклическост
- квадратна, но  $A, B, \dots, C$  - по-общо
- $\bullet \text{tr} \hat{I}_N = N \quad N \times N$



Състояния:  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието  $\rho$

Теорема  $\rho$  е състояние  
(т.е.,  $\rho(\hat{1})=1$  и  $\rho(A^*A) \geq 0$ )  $\left\{ \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{tr} \hat{\rho} = 1 \\ \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^* \\ \bullet \hat{\rho} \text{ е положително дефинитна} \end{cases} \right.$

Следа на  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$  квадратна

$\downarrow \text{trace}$

$$\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$

Основни свойства на следа

- $\bullet \text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA) \leftarrow$  циклическост
- квадратна, но  $A, B, \dots, C$  - по-общи
- $\bullet \text{tr} \hat{1}_N = N \quad N \times N$

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



Състояние:  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието  $\rho$

Теорема  $\rho$  е състояние  
(т.е.,  $\rho(\hat{I}) = 1$  и  $\rho(A^*A) \geq 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{tr} \hat{\rho} = 1 \\ \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^* \\ \bullet \hat{\rho} \text{ е положително дефинитна} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Теорема  $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$  - смес

$$\Leftrightarrow \hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$$

Следа на  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$  квадратна

$\downarrow \text{trace}$

$$\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$

Основни свойства на следа

- $\bullet \text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA)$   $\leftarrow$  циклическост
- квадратна, но  $A, B, \dots, C$  - по-общи
- $\bullet \text{tr} \hat{I}_N = N$   $N \times N$

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



Състояние:  $\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$  линейно по  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

$:= \hat{\rho}$

"матрица на плътността" на състоянието  $\rho$

Теорема  $\rho$  е състояние  
(т.е.,  $\rho(\hat{I}) = 1$  и  $\rho(A^*A) \geq 0$ )  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{tr} \hat{\rho} = 1 \\ \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^* \\ \bullet \hat{\rho} \text{ е положително дефинитна} \end{array} \right.$

Теорема  $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$  - смес

$$\Leftrightarrow \hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$$

Следствие  $\rho$  - чисто  $\Leftrightarrow \text{rank } \hat{\rho} = 1$

$$\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Следа на  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \leftarrow$  квадратна

$\downarrow \text{trace}$

$$\text{tr} A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$

Основни свойства на следа

- $\bullet \text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA)$   $\leftarrow$  циклическост
- квадратна, но  $A, B, \dots, C$  - по-общи
- $\bullet \text{tr} \hat{I}_N = N$   $N \times N$

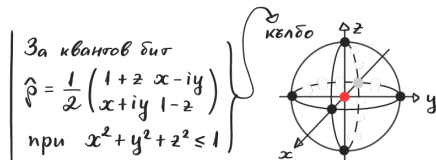
За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



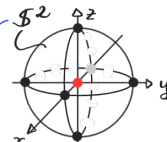
Следствие  $\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \text{rank } \hat{\rho} = 1$   
 $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$



Чисти състояния и вектори на състоянието

$\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$   
 $\Upsilon$  вектор на състоянието

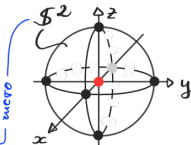
За квантов бит

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \\ \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{област}$$


Чисти състояния и вектори на състоянието  $\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$   
 $\Upsilon$  вектор на състоянието

$$\text{Ако } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \text{ то } |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_2 \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \psi_N \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{За квантов бит} \\ \hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \\ \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

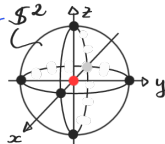


Чисти състояния и вектори на състоянието

$$\text{Ако } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \text{ то } |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_2 \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \psi_N \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \cdots + |\psi_{NN}|^2}_{\substack{\| \Rightarrow \Psi\text{-единицен} \\ 1}}$$

$\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$   
 $\downarrow$   
 вектор на състоянието

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{За квантов бит} \\ \hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \\ \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{област}$$



Чисти състояния и вектори на състоянието

$\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$

Ако  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ , то  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_2 \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \psi_N \bar{\psi}_2 & \cdots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \cdots + |\psi_{NN}|^2}_{\| \Leftrightarrow \Psi\text{-единица}}$

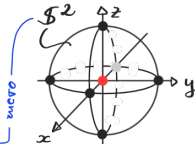
Вектор на състоянието

При това:  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Psi = e^{i\varphi} \Phi$  за  $\varphi \in \mathbb{R}$

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



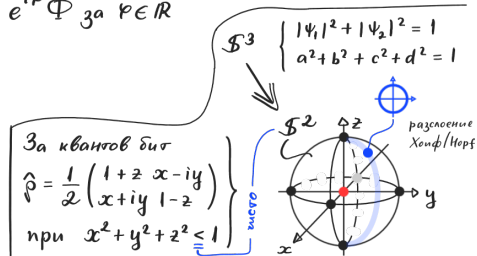
Чисти състояния и вектори на състоянието

$\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$

Ако  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ , то  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_2 \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \psi_N \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \dots + |\psi_{NN}|^2}_{\| \Leftrightarrow \Psi\text{-единица}}$

Вектор на състоянието

При това:  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Psi = e^{i\varphi} \Phi$  за  $\varphi \in \mathbb{R}$



Чисти състояния и вектори на състоянието

$\rho$ -матрица  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$   
 $\Upsilon$  вектор на състоянието

Ако  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ , то  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_2 \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \psi_N \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \dots + |\psi_{NN}|^2}_{\| \Leftrightarrow \Psi\text{-единица}}$

При това:  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Psi = e^{i\varphi} \Phi$  за  $\varphi \in \mathbb{R}$

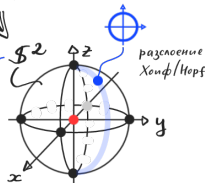
Изводи: • векторите на състоянието са единични и са определени от състоянието с точност до фазов множител

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$$\mathcal{S}^3 \begin{cases} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$



Чисти състояния и вектори на състоянието

$\rho$ -чисто  $\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$

Ако  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ , то  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \psi_1 \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \psi_2 \bar{\psi}_1 & \psi_2 \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_2 \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \psi_N \bar{\psi}_2 & \dots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \dots + |\psi_{NN}|^2}_{\| \Leftrightarrow \Psi\text{-единицен}}$

вектор на състоянието

При това:  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Psi = e^{i\varphi} \Phi$  за  $\varphi \in \mathbb{R}$

Изводи: • векторите на състоянието са единици и са определени от състоянието с точност до фазов множител

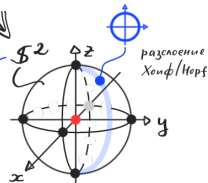
• Само чистите състояния имат вектори

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$$\mathcal{S}^3 \begin{cases} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$



Чисти състояния и вектори на състоянието

Ако  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ , то  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1\bar{\psi}_1 & \psi_1\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_1\bar{\psi}_N \\ \psi_2\bar{\psi}_1 & \psi_2\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_2\bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N\bar{\psi}_1 & \psi_N\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_N\bar{\psi}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tr}} \underbrace{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2 + \dots + |\psi_{NN}|^2}_{\| \Leftrightarrow \Psi\text{-единицен}}$

$\rho\text{-чисто} \Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  и  $\text{tr } \hat{\rho} = 1$

$\hat{\rho}$  вектор на състоянието

При това:  $|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Phi\rangle\langle\Phi| \Leftrightarrow \Psi = e^{i\varphi}\Phi$  за  $\varphi \in \mathbb{R}$

Изводи: • векторите на състоянието са единични и са определени от състоянието с точност до фазов множител

• Само чистите състояния имат вектори

• Има 1-1 съответствие:

чисто състояние  $\leftrightarrow$  елементарно събитие

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

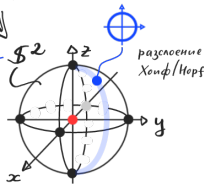
За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$\mathcal{S}^3$

$$\begin{cases} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$



Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_N(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

$$\text{tr}_1(\underbrace{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}_{\text{1x1-матрица}}) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

1x1-матрица = число

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_N(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

$$\rho_{\Psi}(A) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle \quad \text{tr}_1(\langle\Psi|A|\Psi\rangle) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

$1 \times 1$ -матрица = число

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_N(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

$$\rho_{\Psi}(A) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

$$\text{tr}_1(\underbrace{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}_{|x|-\text{матрица} = \text{число}}) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

Вероятност и  
амплитуда на преход

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_N(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

$$\rho_{\Psi}(A) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

$$\text{tr}_1(\underbrace{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}_{|x|-\text{матрица} = \text{число}}) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

Вероятност и  
амплитуда на преход

Нека  $\rho$ -чисто състояние  $\longleftrightarrow$   $P$ -елементарно събитие  $\leftarrow \Psi \in \mathbb{C}^N$ -единичен  
 $\sigma$ -чисто състояние  $\longleftrightarrow$   $Q$ -елементарно събитие  $\leftarrow \Phi \in \mathbb{C}^N$ -единичен

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_N(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^N$ -чисто състояние

$$\rho_{\Psi}(A) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

$$\text{tr}_1(\underbrace{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}_{|1 \times 1\text{-матрица} = \text{число}}) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$$

Вероятност и  
амплитуда на преход

Нека  $\rho$ -чисто състояние  $\leftrightarrow$   $P$ -елементарно събитие  $\leftarrow \Psi \in \mathbb{C}^N$ -единичен  
 $\sigma$ -чисто състояние  $\leftrightarrow$   $Q$ -елементарно събитие  $\leftarrow \Phi \in \mathbb{C}^N$ -единичен

$$\text{Тогава } \rho(Q) = \underbrace{\langle\Psi|\Phi\rangle}_{\langle\Psi|\Phi\rangle} \underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{*} = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2 = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \sigma(P)$$

Формула за средната стойност в чисто състояние (на Дирак)

Означаваме:  $\rho_{\Psi}(A) := \text{tr}_{\mathcal{N}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|A)$  за единичен  $\Psi \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ -чисто състояние

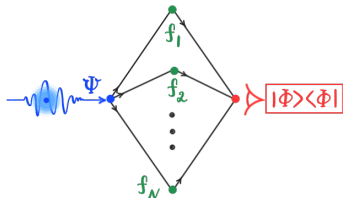
$\rho_{\Psi}(A) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$

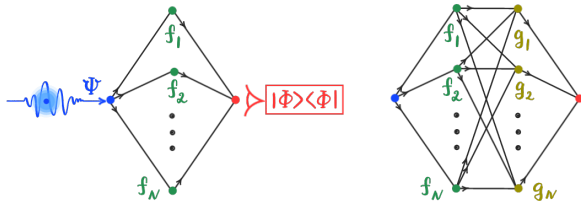
$\text{tr}_1(\underbrace{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}_{1 \times 1\text{-матрица} = \text{число}}) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$

Вероятност и амплитуда на преход

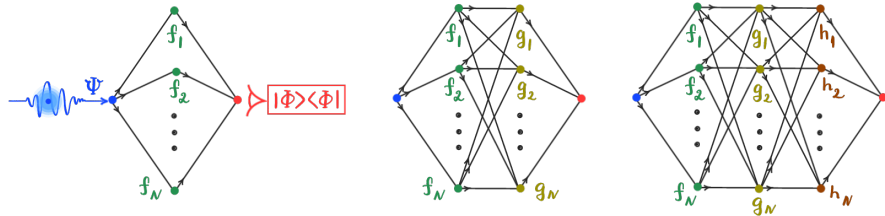
Нека  $\rho$ -чисто състояние  $\leftrightarrow$   $P$ -елементарно събитие  $\leftarrow \Psi \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ -единичен  
 $\sigma$ -чисто състояние  $\leftrightarrow$   $Q$ -елементарно събитие  $\leftarrow \Phi \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ -единичен

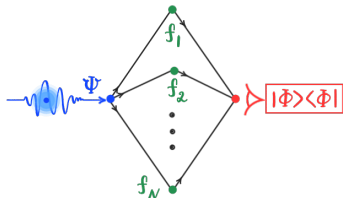
Тогава  $\rho(Q) = \underbrace{\langle\Psi|\Phi\rangle}_{\substack{\text{вероятност} \\ \Psi \rightarrow \Phi}} \underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\substack{\text{амплитуди} \\ \Phi \rightarrow \Psi}} = |\underbrace{\langle\Psi|\Phi\rangle}_{\Psi \rightarrow \Phi}|^2 = |\underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\Phi \rightarrow \Psi}|^2 = \underbrace{\sigma(P)}_{\Phi \rightarrow \Psi}$

Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

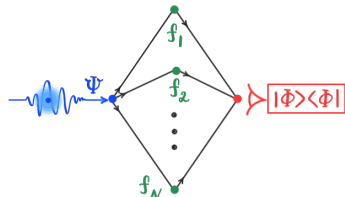
# Квантов преход през дизюнктивни алтернативи



Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

# Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

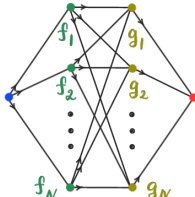
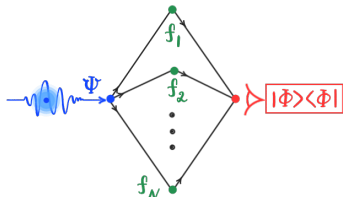
$$\langle \Psi | \hat{\Gamma} | \Phi \rangle = \langle \Psi | \uparrow | \Phi \rangle$$



$$= \sum_{j=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | \Phi \rangle$$

# Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

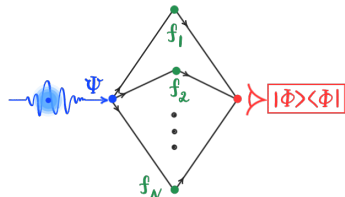
$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{\uparrow} | \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{\uparrow} \hat{\uparrow} | \Phi \rangle$$



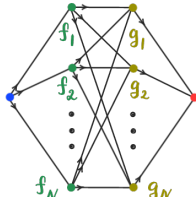
$$= \sum_{j=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | \Phi \rangle = \sum_{j,k=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | g_k \rangle \langle g_k | \Phi \rangle$$

# Квантов преход през дизюнктивни алтернативи

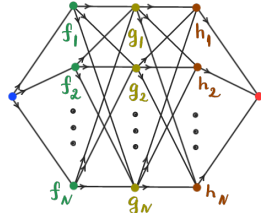
$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Psi | \uparrow | \Phi \rangle$$



$$= \langle \Psi | \uparrow \uparrow | \Phi \rangle$$



$$= \langle \Psi | \uparrow \uparrow \uparrow | \Phi \rangle$$



$$= \sum_{j=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | \Phi \rangle = \sum_{j,k=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | g_k \rangle \langle g_k | \Phi \rangle$$

$$= \sum_{j,k,\ell=1}^N \langle \Psi | f_j \rangle \langle f_j | g_k \rangle \langle g_k | h_\ell \rangle \langle h_\ell | \Phi \rangle$$

## Алгебричен подход с алгебри на Йордан

## Алгебричен подход с алгебри на Йордан

Алгебра на Йордан (Йорданова алгебра / Jordan algebra) е реална комутативна алгебра, възможно неасоциативна, но вместо това: "степенно асоциативна": т.е, такава че  $A^k \bullet A^l = A^{k+l}$ , където  $A^{n+1} := A \bullet A^n$  и " $\bullet$ " е Йордановото произведение.

### Алгебричен подход с алгебри на Йордан

Алгебра на Йордан (Йорданова алгебра / Jordan algebra) е реална комутативна алгебра, възможно неасоциативна, но вместо това: "степенно асоциативна": т.е, такава че  $A^k \bullet A^l = A^{k+l}$ , където  $A^{n+1} := A \bullet A^n$  и " $\bullet$ " е Йордановото произведение.

Предполага се, че *Observables* е Йорданова алгебра с единица, която е положителна в смисъл, че ако  $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \hat{0}$ , то  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \hat{0}$ ; също е крайно-мерна.

### Алгебричен подход с алгебри на Йордан

Алгебра на Йордан (Йорданова алгебра / Jordan algebra) е реална комутативна алгебра, възможно неасоциативна, но вместо това: "степенно асоциативна": т.е., такава че  $A^k \bullet A^l = A^{k+l}$ , където  $A^{n+1} := A \bullet A^n$  и " $\bullet$ " е Йордановото произведение.

Предполага се, че *Observables* е Йорданова алгебра с единица, която е положителна в смисъл, че ако  $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \hat{0}$ , то  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \hat{0}$ ; също е крайно-мерна.

$\Rightarrow$  - *Observables* се разлага в пряка сума прости (т.е., е хибридна система)

## Алгебричен подход с алгебри на Йордан

Алгебра на Йордан (Йорданова алгебра / Jordan algebra) е реална комутативна алгебра, възможно неасоциативна, но вместо това: "степенно асоциативна": т.е, такава че  $A^k \bullet A^l = A^{k+l}$ , където  $A^{n+1} := A \bullet A^n$  и " $\bullet$ " е Йордановото произведение.

Предполага се, че *Observables* е Йорданова алгебра с единица, която е положителна в смисъл, че ако  $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \hat{0}$ , то  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \hat{0}$ ; също е крайно-мерна.

- $\Rightarrow$  - *Observables* се разлага в пряка сума прости (т.е., е хибридна система)
- Възможните прости компоненти на *Observables* са класифицирани: всички те с изключение на една са "специални" (*special*): в тях  $A \bullet B = \frac{1}{2}(AB + BA)$  се реализира в асоциативна  $\star$ -алгебра (но освен над  $\mathbb{C}$ , също и над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{H}$ ).

## Алгебричен подход с алгебри на Йордан

Алгебра на Йордан (Йорданова алгебра / Jordan algebra) е реална комутативна алгебра, възможно неасоциативна, но вместо това: "степенно асоциативна": т.е., такава че  $A^k \bullet A^l = A^{k+l}$ , където  $A^{n+1} := A \bullet A^n$  и " $\bullet$ " е Йордановото произведение.

Предполага се, че *Observables* е Йорданова алгебра с единица, която е положителна в смисъл, че ако  $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \hat{0}$ , то  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \hat{0}$ ; също е крайно-мерна.

- $\Rightarrow$  - *Observables* се разлага в пряка сума прости (т.е., е хибридна система)
- Възможните прости компоненти на *Observables* са класифицирани: всички те с изключение на една са "специални" (*special*): в тях  $A \bullet B = \frac{1}{2}(AB + BA)$  се реализира в асоциативна  $\star$ -алгебра (но освен над  $\mathbb{C}$ , също и над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{H}$ ). Albert algebra
  - Има единствена проста изключителна (*exceptional*) Йорданова алгебра (на Алберт,  $\dim = 27$ )

