КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

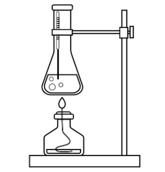
Лекция 7 / 20.11.2023,   версия 1

1. Основни принципи на квантовата теория : статистика на общи системи (преговор)

Основни понятия и изрази (език) в квантовата теория

- наблюдаема, събитие – частен случай на наблюдаема;
- състояние ;
- измерване на наблюдаема (измерване / тестване на събитие) в състояние и вероятност за това.

$\mathrm{Prob}_\rho(Q)$:= вероятност за настъпване (след измерване) на събитие Q в състояние ρ



класическо измерване

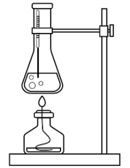
Основни понятия и изрази (език) в квантовата теория

- наблюдаема, събитие – частен случай на наблюдаема;

- състояние;

- измерване на наблюдаема (измерване / тестване на събитие) в състояние и вероятност за това.

  $\mathrm{Prob}_\rho(Q)$:= вероятност за настъпване (след измерване) на събитие Q в състояние ρ


класическо измерване

- Възможни стойности на наблюдаема A = спектър, $\mathrm{Spec}\,A$; спектъра на събитие е $\subseteq \{0,1\}$.

- Всяка наблюдаема A и число пораждат събитие „A приема стойност α след измерване“ $\equiv$ „$A = \alpha$“

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Резултата от всяко измерване е настъпване на някакво събитие Q, т.е., "$Q = 1$".

  "$Q = 0$" $\equiv$ "$Q^{\perp} = 1$" ($Q^{\perp}$ е отрицанието на Q).

- Средна стойност на наблюдаема A при измерване в състояние ρ:

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_{\rho} = \sum_{\alpha \in \mathrm{Spec}\, A} \alpha . \, \mathrm{Prob}_{\rho} \{ A = \alpha \}$$

  Ако $A = Q$ е събитие, то $\rho(Q) \equiv \langle Q \rangle_{\rho} \equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(Q)$

- Смес на състояния ρ_1 и ρ_2 с тегла $q_1, q_2 \in [0,1]$, $q_1 + q_2 = 1$, се определя от:

  $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$, което означава $\rho(A) = q_1 \rho_1(A) + q_2 \rho_2(A)$ за $\forall$ наблюдаема A

- Чисто състояние = такова, което не може да бъде нетривиална смес (т.е., q_1 или $q_2 = 0$)

- Експеримент на системата ≡ съвкупност от дизюнктивни събития, които разбиват $\hat{1}$ (единицата = тъждественото събитие = единичната наблюдаема):
  $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_m$, $Q_j \wedge Q_k = 0$, $Q_1, \ldots, Q_n$ - елементарни събития на експеримента
- За някои наблюдаеми (и в частност, събития) се случва да могат да се измерят в общ експеримент: казваме, че те са съвместно измерими (съвместни).
- Всяка наблюдаема A отговаря на експеримент посредством спектралното си разбиване.
  $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_m Q_m$, $\alpha_j \neq \alpha_j$, $Q_j = \{A = \alpha_j\}$, $\mathrm{Spec}\, A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{R}$
  $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_m$,
- Функция f ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) от наблюдаема $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_m Q_m$ (спектралното разбиване на A) се определя от $f(A) = f(\alpha_1) Q_1 + \cdots + f(\alpha_m) Q_m$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Съществува асоциативна $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\mathcal{A}$, така че A е наблюдаема $\iff$ $A = A^*$
  - има дистрибутивно и асоциативно произведение
  - $A^{**} = A$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$
  - алгебра на наблюдаемите
  - (самоспрегнатост)
- Q е събитие $\iff$ $Q^* = Q = Q^2$
- ρ е състояние $\iff$ ρ е линеен, положителен и нормиран функционал върху $\mathcal{A}$ $\quad \rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$
  - $\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha \rho(A) + \beta \rho(B)$
  - $\rho(A^* A) \geq 0$
  - $\rho(\hat{1}) = 1$
- Съвместно измерими наблюдаеми $A, B, \dots, C$ (в частност и събития)

  $\iff$ взаимно комутиращи : $AB = BA, \dots, AC = CA, \dots, BC = CB$.
- За съвместно измерими събития P, Q, логическите операции имат алгебричен израз :

$$P \wedge Q = PQ = QP, \quad P \vee Q = P + Q - PQ, \quad Q^{\perp} = \hat{1} - Q$$

$$\text{В частност, } \hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_m \iff \begin{cases} Q_1 + \cdots + Q_m = \hat{1} \\ Q_j Q_k = 0 \text{ за } j \neq k \end{cases}$$

- Математематически резултат класифицира:

- прилаганите в квантовата информатика $*$-алгебри са от вида $\mathcal{A} = Mat_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C})$

$$:= \left\{ \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & & k_m \\ \hline k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & 0 & 0 & \cdots & A_m \end{array} =: \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{за } A_j \in Mat_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

блочно-диагонална матрица

за фиксиран набор $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Математематически резултат класифицира:

- приложимите в квантовата информатика $*$-алгебри са от вида $\mathcal{A} = Mat_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C})$

- За всяко състояние ρ съществува единствена наблюдаема $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ $(\hat{\rho} = \hat{\rho}^*)$, така че
$\rho(A)\left(\equiv \langle A \rangle_\rho\right) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} A$.

следа на матрица $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$

Наблюдаемата $\hat{\rho}$ се нарича матрица на плътността на състоянието. В сила е, че $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ е матрица на плътността на състояние $\Longleftrightarrow$ $\hat{\rho}$ е положително дефинитна матрица, $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$.

Ако $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е смес, то $\hat{\rho} = q_1\hat{\rho}_1 + q_2\hat{\rho}_2$.

$\hat{\rho} \geq 0$ и $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$

Така, ρ е чисто $\Longleftrightarrow$ $\hat{\rho}$ е самоспрегнатата матрица от ранг $= 1$.

- Математематически резултат класифицира:
- прилаганите в квантовата информатика $*$-алгебри са от вида $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C})$
- За всяко състояние ρ съществува единствена наблюдаема $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ $(\hat{\rho} = \hat{\rho}^*)$, така че $\rho(A) \left(\equiv \langle A \rangle_\rho \right) = \mathrm{Tr}\, \hat{\rho} A$.
- Пълният размер $n = k_1 + \cdots + k_m$ се нарича ниво на системата и е = максималния брой алтернативи на експеримент. Например, един максимален експеримент се определя от следното разбиване на $\hat{1}$, което е максимално: $\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{matrix}
\end{array}
\begin{pmatrix}
A_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & A_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & A_m
\end{pmatrix}
$$
$$
\begin{matrix} k_1 & k_2 & & k_m \end{matrix}
$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ \\ 1 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{array}$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) + \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \iff (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{tikzcd}
\{\omega_1, \arrow[d] & \omega_2, \arrow[d] & \omega_3, \arrow[d] & \cdots & ,\omega_{n-1}, \arrow[d] & \omega_n\} \arrow[d] & = \Omega \arrow[d, "A"] \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{1,\ldots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n) + \mathrm{diag}(b_1,\ldots,b_n) = \mathrm{diag}(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) \iff (A+B)(\omega_j) = A(\omega_j) + B(\omega_j)$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{1,\ldots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \times \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad (AB)(\omega_j) = A(\omega_j) B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$
\begin{tikzcd}
\{\omega_1, \arrow[d] & \omega_2, \arrow[d] & \omega_3, \arrow[d] & \cdots & ,\omega_{n-1}, \arrow[d] & \omega_n\} \arrow[d] & = \Omega \arrow[d, "A"] \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

В този случай алгебрата $\mathcal{A} = Mat_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \cong$ комутативната $*$-алгебра от функции $A : \Omega \to \mathbb{C}$ върху n-елементно Ω

Наистина, законите за събиране и умножаване на диагонални матрици съответстват на законите за събиране и умножаване на функции (поелементно):

$$\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) \times \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n) = \operatorname{diag}(a_1\cdot b_1,\dots,a_n\cdot b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad (AB)(\omega_j) = A(\omega_j)B(\omega_j)$$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай също:

$$\begin{tikzcd}
\{\omega_1, \arrow[d, mapsto] & \omega_2, \arrow[d, mapsto] & \omega_3, \arrow[d, mapsto] & \cdots & ,\omega_{n-1}, \arrow[d, mapsto] & \omega_n\} \arrow[d, mapsto] & = \Omega \arrow[d, "A = A^* \ \Longleftarrow \ \text{наблюдаема}"] \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$= \operatorname{Spec} A = A(\Omega)$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай също:

$$\begin{array}{cccccccc} \{\cancel{\omega_1}, & \dots, & \omega_j, & \dots, & \omega_k, & \dots, & \cancel{\omega_n}\} & = \Omega \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \chi_S \\ \{0, & \dots, & 1, & \dots, & 1, & \dots, & 0\} & \subseteq \mathbb{R} \end{array}$$

$\Longleftarrow$ събитие = характеристична функция на подмножество $S \subseteq \Omega$

логически и алгебрични операции:

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

В този случай също:

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \dots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{\rho} \\ \{p_1, & p_2, & p_3, & \dots & ,p_{n-1}, & p_n\} & \subseteq \mathbb{R} \\ \subseteq [0,1] & & & & & & \end{array}$$

$\Longleftarrow$ състояние ρ $\Leftrightarrow$ вероятностно разпределение

= матрицата на плът.

$$\underbrace{p_1 + \cdots + p_n}_{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}} = 1$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1$ $\Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow A = A^* \\
\{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{R}
\end{array}
$$

В този случай също:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{\rho} \\
\{p_1, & p_2, & p_3, & \cdots & ,p_{n-1}, & p_n\} & \subseteq \mathbb{R}
\end{array}
$$

Формулата за средна стойност на наблюдаема:

$$\rho(A) = \langle A \rangle_\rho = \mathrm{Tr}\, \hat{\rho} A$$

$$\left(= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_n)\, \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)\right)\right)$$

$$= p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow A = A^* \\ \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{R} \end{array}$$

В този случай също:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \hat{\rho} \\ \{p_1, & p_2, & p_3, & \cdots & ,p_{n-1}, & p_n\} & \subseteq \mathbb{R} \end{array}$$

Чисто състояние: $\hat{\rho} = \mathrm{diag}(0,\ldots,1,\ldots,0)$

$=$ елементарно събитие

$=$ характеристична функция на синглетон $\{\omega_j\}$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

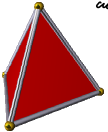
Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & , \omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & A = A^* & \\ \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & , a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{R} & & \end{array}$$

В този случай също:

$$\begin{array}{cccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & , \omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \hat{\rho} \\ \{p_1, & p_2, & p_3, & \cdots & , p_{n-1}, & p_n\} & \subseteq \mathbb{R} & \end{array}$$

Множеството от състоянията на класическа система е симплекс с върхове – чистите състояния



- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- класически системи, $m = n$, $k_1 = \cdots = k_m = 1 \Rightarrow$ алгебрата на диагоналните матрици (блокове 1×1)

Това е единствения комутативен случай.

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & A = A^* \\ \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & ,a_{n-1}, & a_n\} & \subseteq \mathbb{R} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \cdots & ,\omega_{n-1}, & \omega_n\} & = \Omega & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \hat{\rho} \\ \{p_1, & p_2, & p_3, & \cdots & ,p_{n-1}, & p_n\} & \subseteq \mathbb{R} & & \end{array}$$

В този случай също:

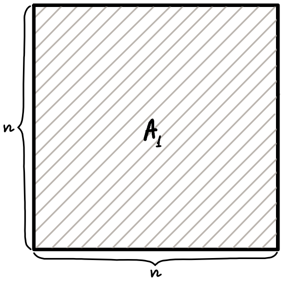
Спектрално разлагане на наблюдаема:

$$A = \sum_{\alpha \in A(\Omega)} \alpha \cdot \chi_{A^{-1}(\alpha)}$$

- В горния класификационен резултат имаме два гранични случая

- чисто квантови системи, $m = 1$, $k_1 = n$ $\Rightarrow$ алгебрата на всички $n \times n$ матрици (1 блок)

Това е "напълно" некомутативен случай.



$$\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- чисто квантови системи $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$

$\hat{\rho} \geq 0$ и $Tr\,\hat{\rho} = 1$

ρ е чисто състояние $\iff$ $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$ и има ранг 1

$$\iff \hat{\rho} = \Psi\Psi^* \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_n)$$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ който е единичен вектор, $\|\Psi\|^2 = |\psi_1|^2 + \cdots + |\psi_n|^2 = 1$

наречен вектор на състоянието.

Всеки единичен вектор определя чисто състояние и два единични вектора $\Psi, \Psi' \in \mathbb{C}^n$ определят едно и също състояние $\iff$ $\Psi' = e^{i\vartheta}\Psi$ (те са пропорционални)

Средната стойност на наблюдаема A в състояние с вектор Ψ е:

$$\langle A \rangle_\Psi = Tr(\Psi\Psi^* A) = Tr(\Psi^* A \Psi) = \Psi^* A \Psi = (\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_n) \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$$= \langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$ – в бра-кет означения

- чисто квантови системи $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$

<bra|c|ket>: за вектор-стълб $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

ще пишем $\Phi \equiv |\Phi\rangle$ и ще го наричаме кет-вектор.

Тогава $\langle\Phi| := \Phi^* := (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n)$ – ермитово спрегнатия вектор-ред: бра-вектор.

Така: $\underbrace{\langle\Phi|\cdot|\Psi\rangle}_{\text{ред} \times \text{стълб}} \overset{=}{=} \underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\text{число}}$ → скаларното произведение в $\mathbb{C}^n$ $(\ni \Phi, \Psi)$

хилбертовото пространство на състоянията

Матриците от вида: $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ представят едновременно матрици на плътността на чисти състояния и елементарни събития. Това дава 1-1 съответствие между чистите състояния ρ и елем. събития Q:

$$\rho \text{ и } Q \text{ са съответстващи си} \iff \mathrm{Prob}_\rho\, Q = 1 \iff \hat{\rho} = Q \;(= |\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- чисто квантови системи $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$

Матриците от вида: $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ представят едновременно матрици на плътността на чисти състояния и елементарни събития. Това дава 1-1 съответствие между чистите състояния ρ и елем. събития Q:

$$\rho \text{ и } Q \text{ са съответстващи си } \iff Prob_\rho\, Q = 1 \iff \hat{\rho} = Q\ (= |\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

За два единични вектора $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$: вероятност за преход $p_{\Psi\to\Phi} = |a_{\Psi\to\Phi}|^2$, където $a_{\Psi\to\Phi} := \langle\Phi|\Psi\rangle$ – амплитуда на прехода. $p_{\Psi\to\Phi} = p_{\Phi\to\Psi}$ е вероятността за настъпване на елементарно събитие определено от Ψ в състояние с вектор Φ.

Спектралното разлагане на наблюдаема $A\ (= A^*)$ се определя от задачата за собствени вектори: ако $Af_j = \lambda_j f_j$ за ортонормиран базис (о.н.б.) $f_1, \dots, f_n$ на $\mathbb{C}^n$,

то: $A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_n |f_n\rangle\langle f_n|$

- чисто квантови системи $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$

За два единични вектора $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$: вероятност за преход $p_{\Psi\to\Phi} = |a_{\Psi\to\Phi}|^2$, където $a_{\Psi\to\Phi} := \langle \Phi | \Psi \rangle$ – амплитуда на прехода. $p_{\Psi\to\Phi} = p_{\Phi\to\Psi}$ е вероятността за настъпване на елементарно събитие определено от Ψ в състояние с вектор Φ.

Спектралното разлагане на наблюдаема $A\,(=A^*)$ се определя от задачата за собствени вектори: ако $Af_j = \lambda_j f_j$ за ортонормиран базис (о.н.б.) $f_1, \dots, f_n$ на $\mathbb{C}^n$, $\alpha_1 := \lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} < \alpha_2 := \lambda_{k_1+1} = \cdots$ то: $A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_n |f_n\rangle\langle f_n|$

$$= \alpha_1 \underbrace{\left(|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_{k_1}\rangle\langle f_{k_1}|\right)}_{:=\,Q_1} + \alpha_2 \underbrace{\left(|f_{k_1+1}\rangle\langle f_{k_1+1}| + \dots + |f_{k_1+k_2}\rangle\langle f_{k_1+k_2}|\right)}_{:=\,Q_2} + \cdots$$

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Събитие Q в чисто квантова система $(\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C}))$
  = самоспрегнат идемпотент Q в $Mat_n(\mathbb{C})$
  = ортогонален проектор в хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$
  $\Longleftrightarrow$ линейно подпространство $V \subseteq \mathbb{C}^n$, като $Q = P_V$ (ортогоналния проектор върху V)

- Ако $Q_1 = P_{V_1}$ и $Q_2 = P_{V_2}$ са събития, тогава:

$$Q_1 \leq Q_2 \Longleftrightarrow \text{от } Prob_\rho(Q_1) = 1 \text{ следва } Prob_\rho(Q_2) = 1 \ (\forall \rho\text{ - състояние})$$

$$\Longleftrightarrow Prob_\rho(Q_1) \leq Prob_\rho(Q_2) \ (\forall \rho\text{ - състояние})$$

$$\Longleftrightarrow V_1 \subseteq V_2$$

- Всеки максимален експеримент отговаря на о.н.б. $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ посредством разбиването на $\hat{1}$: $\boxed{\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_n\rangle\langle f_n|}$

- Картина на елементарните събития и състоянията на квантов бит $\left(\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})\right)$

общ вид на матрицата на плътността на състояние

$$\hat{\rho}(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$ за $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

чисто състояние $\leftrightarrow$ $=$

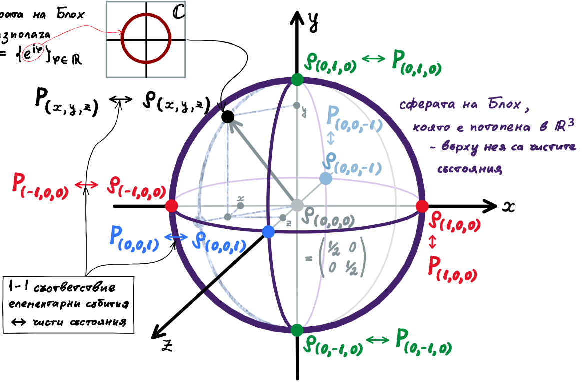
Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

- Картина на елементарните събития и състоянията на квантов бит ($\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$)

Над всяка точка на сферата на Блох „напречно" в $\mathbb{R}^4$ се разполага единична окръжност $S^1 = \{e^{i\varphi}\}_{\varphi\in\mathbb{R}}$

– така се намотава S^3 върху S^2

нарича се разслоение на Хопф



Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи (преговор)

Забележка Наредбата на наблюдаемите в класическите системи съвпада с поточковата

за $A, B : \Omega \to \mathbb{R}$ – класически наблюдаеми

$$A \leq B \iff A(\omega) \leq B(\omega) \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

Спрямо тази наредба класическите наблюдаеми образуват решетка (без 0 и 1 - защо?):

$$(A \wedge B)(\omega) = \min\{A(\omega), B(\omega)\}$$

$$(A \vee B)(\omega) = \max\{A(\omega), B(\omega)\}$$

Наблюдаемите на чисто квантовите системи не образуват решетки, макар че частично наредените подмножества на събитията са решетки (дори с 0 и 1).

Упражнение (контрапример за кубит)

а) Докажете, че множеството на наблюдаемите на кубит:

$$\mathrm{Observables}(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}^4$$

$$A = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \leftrightarrow (t,x,y,z)$$

б) При изоморфизма от "а)" имаме

- $\det A = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
- $\mathrm{Tr}\, A = 2t$
- $A \geq 0 \iff \det A \geq 0$ и $\mathrm{Tr}\, A \geq 0$

*в) Докажете, че $\mathrm{Observables}(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}))$ не е решетка спрямо операторната частична наредба

$$A \leq B \iff B - A \geq 0$$ – положителна дефинитност

Допълнителни бележки към квантовия бит

Условието $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) \left(= \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \psi_1\overline{\psi}_2 \\ \psi_2\overline{\psi}_1 & \psi_2\overline{\psi}_2 \end{pmatrix} \right) \iff \left| \begin{array}{l} a_{11} = \psi_1\overline{\psi}_1 \\ a_{12} = \psi_1\overline{\psi}_2 \\ a_{21} = \psi_2\overline{\psi}_1 \\ a_{22} = \psi_2\overline{\psi}_2 \end{array} \right.$

$(\forall a_{jk}, \psi_j \in \mathbb{C})$

$$\iff \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \psi_1\overline{\psi}_1\psi_2\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_1\psi_1\overline{\psi}_2 = 0$$

Решенията за ψ_1, ψ_2 при дадени $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ не са единствени, а са взаимно пропорционални.

Пример 1: $\hat{\rho}_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \left(\overline{e^{i\varphi}}, 0 \right)$; $\hat{\rho}_{(0,0,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1)$;

Основни принципи на квантовата теория: статистика на общи системи

Нека означим стандартния базис в $\mathbb{C}^2$. $e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: |0\rangle$, $e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: |1\rangle$ Тук стои информация за базисния вектор

Тогава: $\hat{\rho}_{(0,0,1)} = |0\rangle\langle 0|$, $\hat{\rho}_{(0,0,-1)} = |1\rangle\langle 1|$. О.н.б. $|0\rangle, |1\rangle$ дава един макс. експеримент.

Пример 2: $\hat{\rho}_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\hat{\rho}_{(-1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

Получаваме друг о.н.б.: $e_0' := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\rightarrow\rangle$, $e_1' =: \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\leftarrow\rangle$

и $\hat{\rho}_{(1,0,0)} = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|$, $\rho_{(-1,0,0)} = |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

Пример 3: $\hat{\rho}_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2})$, $\hat{\rho}_{(0,-1,0)} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}, +i/\sqrt{2})$

Получаваме друг о.н.б.: $e_0'' := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\uparrow\rangle$, $e_1'' =: \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =: |\downarrow\rangle$

и $\hat{\rho}_{(0,1,0)} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$, $\rho_{(0,-1,0)} = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$

Забележете в горните примери:

три двойки от взаимно обратни елементарни събития

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}_{(0,0,1)} + \hat{P}_{(0,0,-1)} &= \hat{1} \\ \hat{P}_{(1,0,0)} + \hat{P}_{(-1,0,0)} &= \hat{1} \\ \hat{P}_{(0,1,0)} + \hat{P}_{(0,-1,0)} &= \hat{1} \end{aligned}\right\}$$

разбивания на $\hat{1}$ за три различни и несъвместни максимални експерименти

При това:

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}_{(1,0,0)}\hat{P}_{(0,1,0)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & -i+1 \\ 1+i & -i+1 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_{(0,1,0)}\hat{P}_{(1,0,0)} &= \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ 1-i & i+1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \neq$$

– некомутират

$\Rightarrow$ не са съвместно измерими

Вероятност за преход:

$$P_{|\to\rangle \to |\uparrow\rangle} = \left|\langle \to | \cdot | \uparrow \rangle\right|^2 = \left|\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2^2}|1+i|^2 = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$