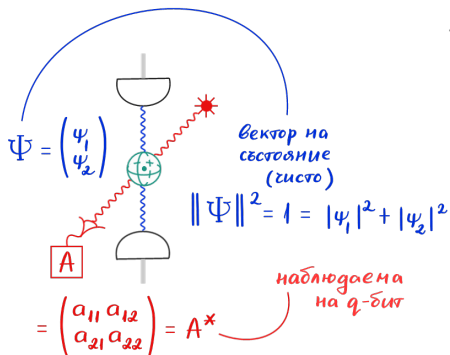


# *КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА*

Николай М. Николов

Лекция 8 / 27.11.2023, версия 1

## Съставни системи: **уводни бележки**

Съставни системи: **уводни бележки**

Средната стойност на  $A$  в  $\Psi$ :

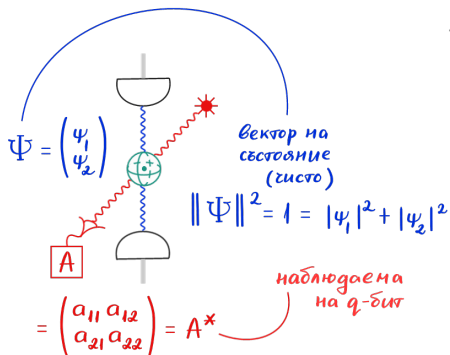
$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$= \Psi^* A \Psi =$$

$$= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

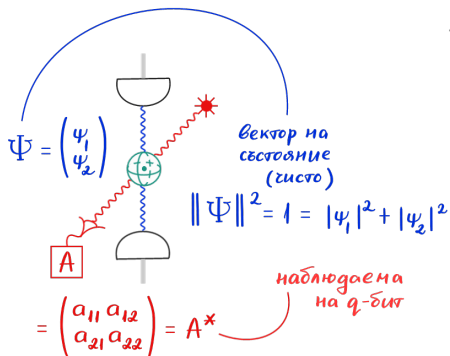
Това е вероятност за  $A$  в  $\Psi$ ,  
когато  $A$  е събитие:

$$A^* = A = A^2$$

Съставни системи: **уводни бележки**Средната стойност на  $A$  в  $\Psi$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi | A \Psi \rangle &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle \\
 &= \Psi^* A \Psi = \\
 &= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Забележете:** една наблюдаема става случайна величина так когато се постави в контекста на състояние

Съставни системи: **уводни бележки**Средната стойност на  $A$  в  $\Psi$ :

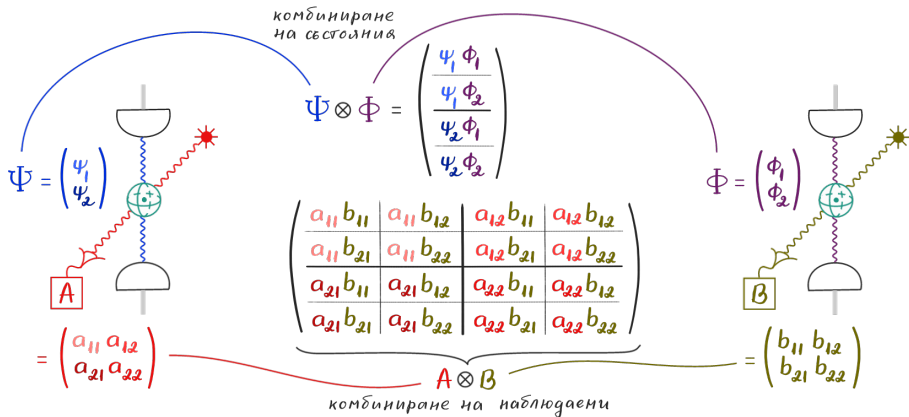
$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \\ =: \langle A \rangle_{\Psi}$$

Средно-квадратично отклонение (дисперсия) на  $A$  в  $\Psi$ :

$$0 \leq \Delta_{\Psi} A := \langle (A - \langle A \rangle_{\Psi} \hat{1})^2 \rangle_{\Psi}$$

$$\Delta_{\Psi} A = 0 \Leftrightarrow \Psi \text{ е собствен за } A$$

## Съставни системи: уводни бележки



**Забележете:** една наблюдаема става случайна величина, когато се постави в контекста на състояние

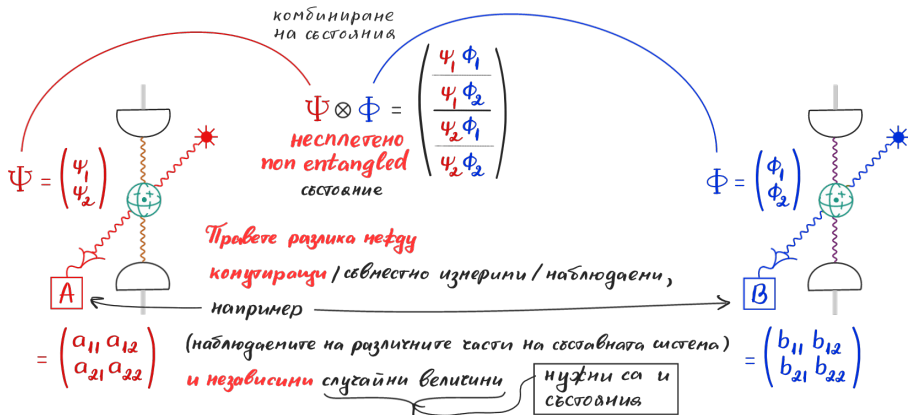
**non entangled**

вектор на **несплетено** състояние

$$\left. \begin{aligned} &\langle \Psi \otimes \Phi | A \otimes B | \Psi \otimes \Phi \rangle \\ &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle \langle \Phi | B | \Phi \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Закон за средните стойности на} \\ \text{независими случайни величини} \end{array}$$

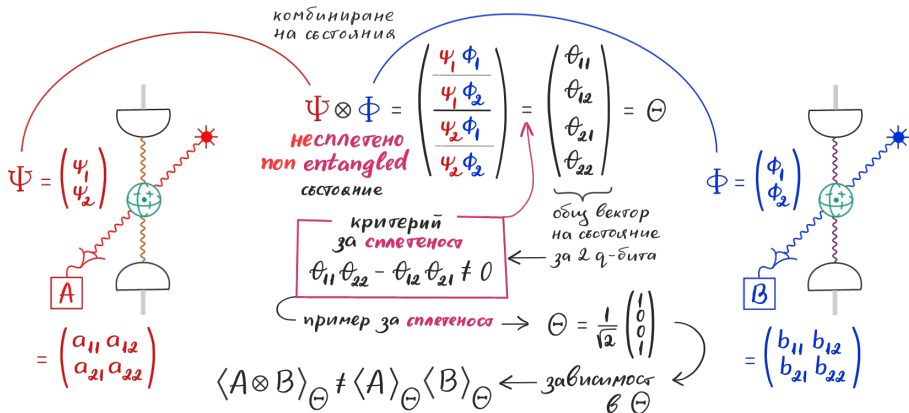
$$= \underbrace{\left( \overline{\psi_1 \phi_1}, \overline{\psi_1 \phi_2}, \overline{\psi_2 \phi_1}, \overline{\psi_2 \phi_2} \right)}_{\Psi^* \otimes \Phi^*} \underbrace{\left( \begin{array}{cc|cc} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ \hline a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{array} \right)}_{A \otimes B} \underbrace{\left( \begin{array}{c} \psi_1 \phi_1 \\ \psi_1 \phi_2 \\ \psi_2 \phi_1 \\ \psi_2 \phi_2 \end{array} \right)}_{\Psi \otimes \Phi}$$

## Съставни системи: уводни бележки





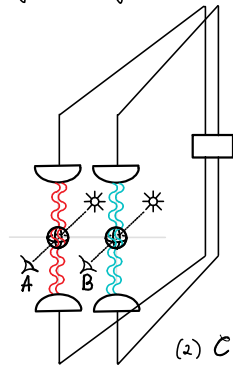
## Съставни системи: уводни бележки



Съставни системи: аксиоми и математически апарат

## Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека  $\mathcal{C}$  е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$  техните алгебри на наблюдаеми  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , съответно, да са  $\ast$ -подалгебри с  $\uparrow$  на  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B} : i_1(A) i_2(B) = i_2(B) i_1(A)$$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

$$(2) \quad \mathcal{C} \text{ да се порожда алгебрично от } i_1(A) \text{ и } i_2(B) \text{ за } \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B}$$

## Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Доказва се, че за това има единствен модел за  $\mathcal{C}$  с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по **Кръонекер (Kronecker)**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_\Phi \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \phi_1\psi_2 \\ \phi_2\psi_1 \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Основно свойство:  $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

$$(A \otimes B)(\Phi \otimes \Psi) = (A\Phi) \otimes (B\Psi)$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

$$(A \otimes B)^* =$$

$$\left( \begin{array}{ccc} a_{11} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} & \cdots & a_{1n} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} & \cdots & a_{nn} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right)^*$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

$$A^* \otimes B^* =$$

$$\left( \begin{array}{cc} \overline{a_{11}} \begin{array}{c} \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \end{array} & \cdots \overline{a_{n1}} \begin{array}{c} \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \end{array} \\ \vdots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} \begin{array}{c} \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \end{array} & \cdots \overline{a_{nn}} \begin{array}{c} \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \end{array} \end{array} \right)$$

## Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Имаме  $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ,  $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Справяне:  $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$  - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в  $\mathbb{C}^4$ :  $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

-наистина:  $(\Phi \otimes \Psi)^*(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \otimes (\Psi^* \Psi')$

Стандартния  
о.н.б. в  $\mathbb{C}^4$ :  $e_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_0$ ,  $e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_1$ ,  
 $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_0$ ,  $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_1$ ,

## Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията:  $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$\begin{array}{c}
 A \mapsto A \otimes \hat{1} \\
 \mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B} \\
 \hat{1} \otimes B \leftarrow B \\
 i_2(B) =: B_{(2)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A \otimes B &= \\
 &= (A \cdot 1) \otimes (1 \cdot B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B) \\
 &= (1 \cdot A) \otimes (B \cdot 1) = (1 \otimes B)(A \otimes 1)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ 0 & a_{11} \cdot 0 & 0 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ 0 & a_{21} \cdot 0 & 0 & a_{22} \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} & 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} \\ 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} & 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} & 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} \\ 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} & 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$



## Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията:  $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

$$\hat{1} \otimes B \leftarrow B$$

$$i_2(B) =: B_{(2)}$$

 $\Rightarrow$ 

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

т.е., както и поискаме: абсолютно всяка наблюдаема на системата "1",  $A_{(1)}$ , е съвместно измерима с всяка наблюдаема на системата "2",  $B_{(2)}$ .

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека  $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$  и  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  е морфизъм на  $\ast$ -алгебри с единица (т.е.,  $\iota$  е линейно,  $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$ ,  $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$  и  $\iota(A^*) = \iota(A)^*$ , за всеки  $A, D \in \mathcal{A}$ ).

Тогава  $L$  дели  $N$  и съществуват ортонормирани бази на  $\mathbb{C}^N$  и  $\mathbb{C}^L$ , такива че след като трансформираме в тях елементите на  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{A}$  съответно, то образите  $\iota(A)$  на елементите  $A \in \mathcal{A}$  имат вида

$$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M, \text{ където } M := N/L. \text{ В частност, } \iota \text{ е инекция.}$$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека  $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$  и  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  е морфизъм на  $\ast$ -алгебри с единица. Тогава  $L$  дели  $N$ ,  $M := N/L$  и  $\iota$  е инекцията  $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$  за  $\forall A \in \mathcal{A}$ , с точност до смяна на ортонормираните базиси в  $\mathbb{C}^N$  и  $\mathbb{C}^L$ .

При това, фактически ползуване  $\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , за  $\mathcal{B} := \text{Mat}_M(\mathbb{C})$  и ако отъждесовим:  $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \hat{1}_M := \{A \otimes \hat{1}_M \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$ , а  $\mathcal{B} = \hat{1}_L \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ , то  $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{C} \mid AB = BA \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{A}' =: \text{комутант на } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{B}' = \mathcal{A}''$ .

бикомутант  $\nearrow$

## Съставни системи: аксиоми и математически апарат

До тук изследвахме наблюдаемите в съставна система. Състоянието?

Показе алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е  $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ , то общо състояние се определя от матрица на плътността  $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$ , за която  $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$  и  $\hat{\rho} \geq 0$  по формулата  $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$ .

Използваме формулата  $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$  - наистина:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) &\equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \end{aligned}$$

## Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Следователно, всеки две отделни състояния  $\hat{\rho}_1$  и  $\hat{\rho}_2$  на подсистемите води до състояние  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$  на съставната система, така че за всеки две наблюдавани  $A$  и  $B$  на подсистемите

$$\langle A \otimes B \rangle_{\rho} \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\rho} = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2} - \text{независимост}$$

- наистина

$$\text{Tr}((\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(A \otimes B)) = \text{Tr}((\hat{\rho}_1 A) \otimes (\hat{\rho}_2 B)) = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 A) \text{Tr}(\hat{\rho}_2 B)$$

Чисти състояния:  $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$ , за  $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай:  $\Theta = \Psi \otimes \Phi$  за  $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \hat{\rho} = \Theta\Theta^* &= (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\underbrace{\Psi\Psi^*}_{\hat{\rho}_1}) \otimes (\underbrace{\Phi\Phi^*}_{\hat{\rho}_2}) \\ &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \end{aligned}$$

Това се наричат **несплетени чисти състояния**.

**Чисти състояния в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , чиито вектори на състояние  $\Theta$  не могат да се представят, като  $\Theta = \Phi \otimes \Psi$  се наричат сплетени / entangled**

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Специално за 2 бита има прост критерий за сепарабилност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Пример :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \Theta := e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

↖ за нормировка

— определя сепарабилно чисто състояние.

# Корелации и неравенства на Бел



## Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме състоянието на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор:  $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{22} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22})$$

## Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме състоянието на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор:  $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle B_{(2)} \rangle_{\Theta} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22})$$

## Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме силетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор:  $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули:

$$\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (a_{11} b_{11} + a_{22} b_{22} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12})$$

## Корелации и неравенства на Бел

Разбира се,  $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$  в общия случай на  $A$  и  $B$ , но се оказва, че състоянието  $\Theta$  има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека  $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$ , за  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$  е 1-битово състояние  
( $c^2 + s^2 = 1$ )

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) &\equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left( (1+c)(1-c) + (-s)(1+c) - s^2 - s^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Извод: при всеки избор на 1-битово състояние  $Z$ , ако то се измерва във всяка от подсистемите то или на две места  $Z_{(1)} = 1$  и  $Z_{(2)} = 1$  или на две места  $Z_{(1)} = 0$  и  $Z_{(2)} = 0$  — има пълен синхрон в това състояние по отношение на тези местове.

## Корелации и неравенства на Бел

Нека  $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$  за  $\varphi = 0$ ,  $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$  за  $\varphi = 90^\circ$ ;  $Z$  остава за общо  $\varphi$

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left( X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}_\Theta \left( Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right) &\equiv \langle Y_{(1)} Z_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) - \frac{1}{2} \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \frac{s}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1-s) \end{aligned}$$

$$\text{Prob}_\Theta \left( X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Z_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot \frac{1}{2} (1-c) + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4} (1-c)$$

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)} \geq \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)}$$

Обаче тук  
получихме:

$$\frac{1}{4}$$

+

$$\frac{1}{4}(1-s)$$

?

$\geq$

$$\frac{1}{4}(1-c)$$

$\Leftrightarrow$

$$1 \geq \sin \varphi - \cos \varphi$$

$\Leftrightarrow$

$$\sin \frac{\pi}{4} \geq \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)$$

**Извод:** неравенствата  $\Leftarrow$   
на Бел се нарушават в  
квантови системи, напр. за  $\varphi \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right)$

Следва извод на неравенствата на Бел за класически системи

В останалата част на презентацията вместо индекси "1" и "2" на събитията  $X, Y, Z$  са използвани "A" и "B", съответно.

За вектора  $\Theta$  на сплетеното състояние е използвана буквата  $\Psi$ .

Неравенства на Бел

Bell's inequalities



## АПР/Бел постановка

Айнщайн - Подолски - Розен / Бел

Einstein - Podolsky - Rosen / Bell

АПР / Бел постановка

$\Psi$

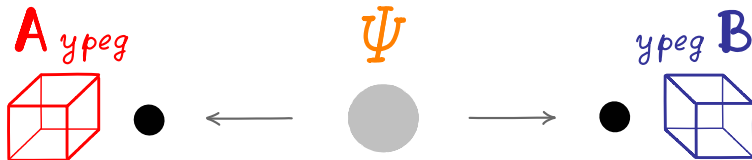


АПР / Бел постановка

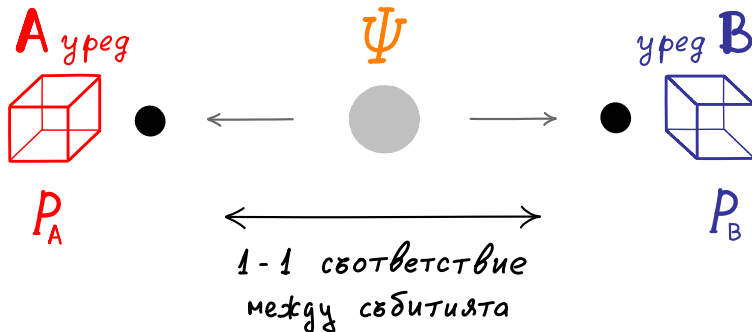
$\Psi$



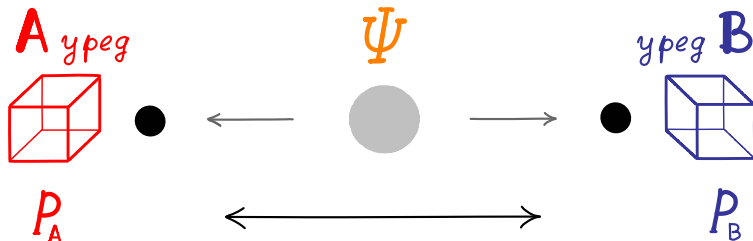
## АПР/Бел постановка



## АПР/Бел постановка



## АПР/Бел постановка



При такава синхронизация между уредите ще има 100% корелация на резултатите.









## Корреляции и неравенства на Бел

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | $Z_B$ |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | $Y_B$ |
| 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | $X_B$ |
| ✓     |       | ✓     |       | ✓     |       | ✓     |       |       |
| $p_1$ |       |       |       |       |       |       |       | $X_A$ |
|       | $p_2$ |       |       |       |       |       |       | $Y_A$ |
|       |       | $p_3$ |       |       |       |       |       | $Z_A$ |
|       |       |       | $p_4$ |       |       |       |       |       |
|       |       |       |       | $p_5$ |       |       |       | ✓     |
|       |       |       |       |       | $p_6$ |       |       | ✓     |
|       |       |       |       |       |       | $p_7$ |       | ✓     |
|       |       |       |       |       |       |       | $p_8$ | ✓     |

$$p(X_A Y_B^\perp) = p_5 + p_6$$

$$p(Y_A Z_B^\perp) = p_3 + p_7$$

$$-p(X_A Z_B^\perp) = -p_5 - p_7$$

---


$$\geq 0$$

## Корреляции и неравенства на Бел

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | $Z_B$ |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | $Y_B$ |
| 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | $X_B$ |
| $p_1$ |       |       |       |       |       |       |       | $X_A$ |
|       | $p_2$ |       |       |       |       |       |       | $Y_A$ |
|       |       | $p_3$ |       |       |       |       |       | $Z_A$ |
|       |       |       | $p_4$ |       |       |       |       |       |
|       |       |       |       | $p_5$ |       |       |       |       |
|       |       |       |       |       | $p_6$ |       |       |       |
|       |       |       |       |       |       | $p_7$ |       |       |
|       |       |       |       |       |       |       | $p_8$ |       |

$$p(X_A Y_B^\perp) = p_5 + p_6$$

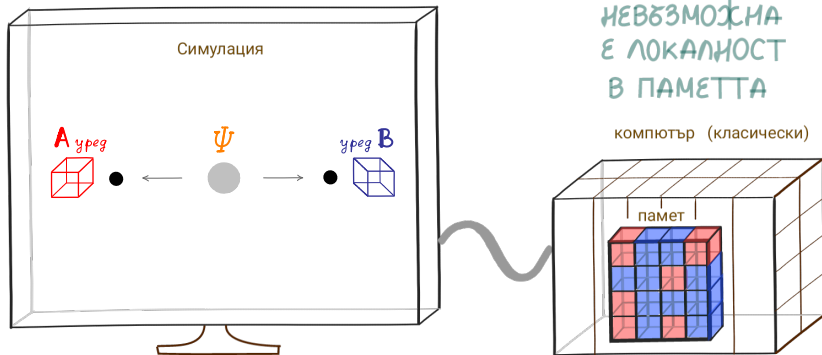
$$p(Y_A Z_B^\perp) = p_3 + p_7$$

$$-p(X_A Z_B^\perp) = -p_5 - p_7$$

---


$$\geq 0$$

Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**

Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**

## Описание на паметта на квантов компютър

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$  - вектор-стълб :  $|\Psi\rangle = \Psi$  - едноместна операция върху  $\mathbb{C}^N$ , която е идентитета

Тази операция е линейна :  $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$

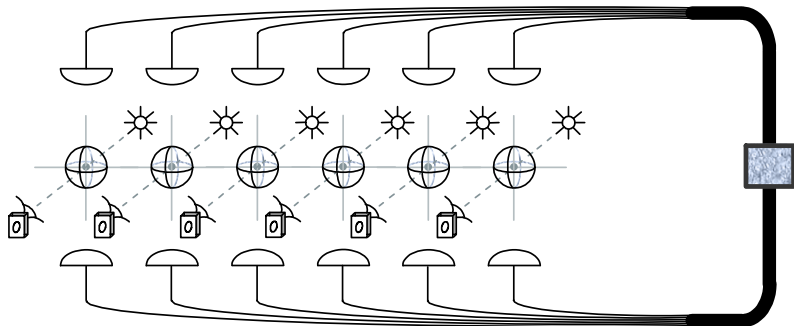
и в частност,  $|0\rangle = 0 \in \mathbb{C}^N$

- За стандартния о.н.б.  $e_0, \dots, e_{N-1} \in \mathbb{C}^N$

$e_k \equiv |e_k\rangle \equiv |k\rangle$  — информация (напр., индекса) на базисен вектор

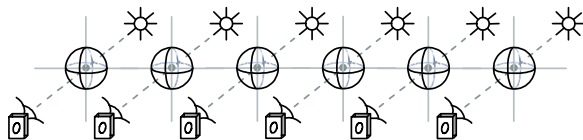
Сега обаче  $|0\rangle \equiv e_0 \neq 0$  - нулевия вектор в  $\mathbb{C}^N$  !!!

## Описание на паметта на квантов компютър





## Описание на паметта на квантов компютър



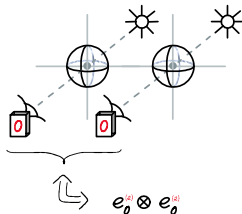
## Описание на паметта на квантов компютър

$$\underbrace{e_0^{(s)} \otimes e_0^{(s)}}_{\text{III}} \equiv |e_0^{(s)}\rangle \otimes |e_0^{(s)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv \boxed{|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle} \equiv \underbrace{|[00]_2\rangle}_{\text{числото "0" в двоична система}} \equiv \underbrace{|0\rangle}_{\text{има различен смисъл !!!}}$$

*нови означения*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(s)} \in \mathbb{C}^2} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{e}_0^{(q)} \in \{e_0^{(q)}, e_1^{(q)}, e_2^{(q)}, e_3^{(q)}\} - \text{стандардният о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0^{(s)} \in \mathbb{C}^2$   
 имат различен смисъл !!!



## Описание на паметта на квантов компютър

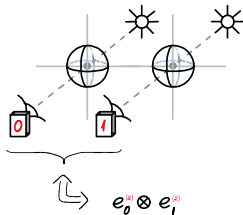
$$\underbrace{e_0^{(z)} \otimes e_1^{(z)}}_{\text{III}} \equiv |e_0^{(z)}\rangle \otimes |e_1^{(z)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv |[01]_2\rangle \equiv |1\rangle \leftarrow \begin{cases} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{cases}$$

числото "1" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(z)}} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1^{(z)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1^{(q)} \in \{e_0^{(q)}, e_1^{(q)}, e_2^{(q)}, e_3^{(q)}\} - \text{стандардни о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0^{(z)}, e_1^{(z)} \in \mathbb{C}^2$

имат  
различен смисъл !!!

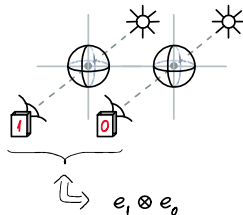


## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes e_0 \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \equiv |1\rangle|0\rangle \equiv |1,0\rangle \equiv |[10]_2\rangle \equiv | \textcolor{red}{2} \rangle$$

числото "2" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \textcolor{red}{1} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \textcolor{red}{e}_2 \in \{e_0, e_1, \textcolor{red}{e}_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

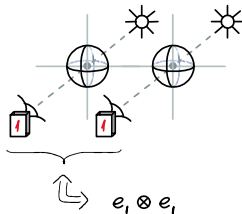


## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes e_1 \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \equiv |1\rangle|1\rangle \equiv |1,1\rangle \equiv |[11]_2\rangle \equiv |3\rangle$$

числото "3" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

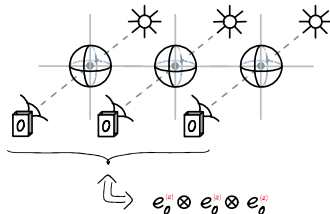


## Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{\left( e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \right)}_{\text{}} \otimes e_0^{(a)} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = e_0^{(R)} \in \{ e_0^{(R)}, e_1^{(R)}, e_2^{(R)}, e_3^{(R)}, e_4^{(R)}, e_5^{(R)}, e_6^{(R)}, e_7^{(R)} \} \\
 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Тензорното произведение е асоциативно (т.е., скобите могат да се нестият)

- стандартния о.н.б. в  $\mathbb{C}^8$



## Описание на паметта на квантов компютър

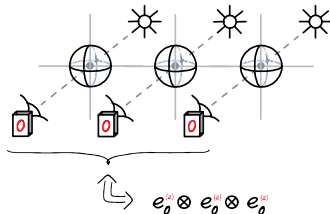
$$e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

числото "0" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_0 \otimes e_1) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |0,0,1\rangle \equiv |[001]_2\rangle \equiv |1\rangle$$

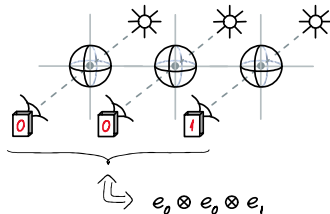
числото "1" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_1 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  - стандартния о.н.б. в  $\mathbb{C}^8$





## Описание на паметта на квантов компютър

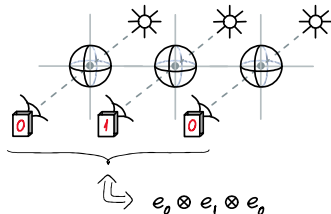
$$e_0 \otimes (e_1 \otimes e_0) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |0,1,0\rangle \equiv |[010]_2\rangle \equiv |2\rangle$$

числото "2" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_2 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  - стандартния о.н.б. в  $\mathbb{C}^8$



## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_1 \otimes e_1) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |0,1,1\rangle \equiv |[011]_2\rangle \equiv |3\rangle$$

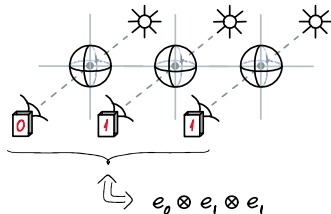
числото "3" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_0 \otimes e_0) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |1,0,0\rangle \equiv |[100]_2\rangle \equiv |4\rangle$$

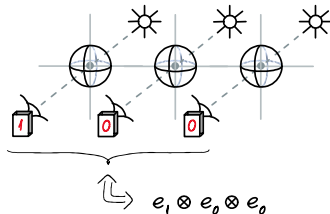
числото "4" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_4 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  - стандартния о.н.б. в  $\mathbb{C}^8$



## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_0 \otimes e_1) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |1,0,1\rangle \equiv |[101]_2\rangle \equiv |5\rangle$$

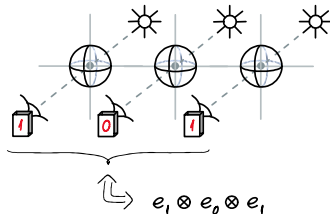
числото "5" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_5 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_1 \otimes e_0) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |1,1,0\rangle \equiv |[110]_2\rangle \equiv |6\rangle$$

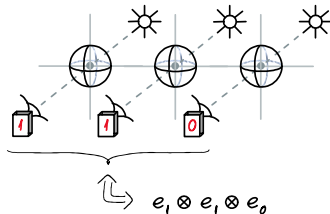
число "6" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_6 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



## Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |1,1,1\rangle \equiv |[111]_2\rangle \equiv |7\rangle$$

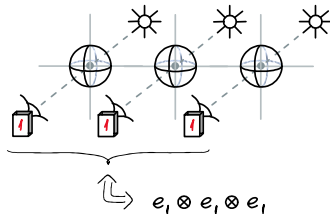
число "7" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

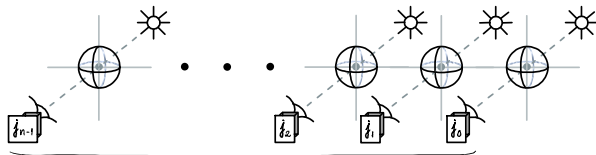
$$= e_7 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



## Описание на паметта на квантов компютър

двоично разлагане

$$l = [j_{n-1} \dots j_1 j_0]_2 := j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 2^0 \in \{0, \dots, N-1\}$$



където

$$\hookrightarrow e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_0} = |l\rangle \in \mathbb{C}^N$$

$$\text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n$$

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от  $n$  квантови бита (кубити) е

$$\underbrace{\mathbb{C}^N}_{(N\text{-мерно})} \text{ за } N = 2^n$$

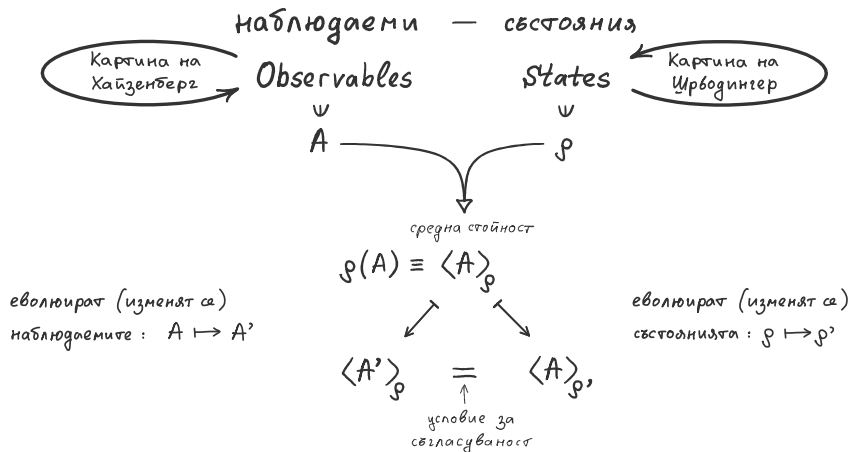
$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n\text{- пъти}} = \mathbb{C}^{2 \cdots 2} = \mathbb{C}^{2^n}$$

Стандартния базис  $e_0 \equiv |0\rangle$  и  $e_1 \equiv |1\rangle$  в  $\mathbb{C}^2$  пораждат стандартния базис в  $\mathbb{C}^N$ :  $|[j_{n-1} \dots j_0]_2\rangle = e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_0}$  - наричат се изчислителни базиси.



# Квантови трансформации

## Квантови трансформации



## Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние  $\mapsto$  чисто състояние;

• смес на състояния  $\mapsto$  смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор  $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$  чисто състояние с вектор  $\Psi' \in \mathbb{C}^n$ ,

и чисто състояние с вектор  $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$  чисто състояние с вектор  $\Phi' \in \mathbb{C}^n$ ,

тогава  $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$ .

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация  $\exists$  трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , такава че  $\Psi'$  е пропорционален на  $U\Psi$  при  $\forall$  трансформиране  $\Psi \mapsto \Psi'$ ,

като се случва една от следните две възможности:

-  $U$  е линейна и  $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$  ( $\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ )

-  $U$  е антилинейна и  $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$  ( $\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ )

$U$  е единствена с точност до пропорционалност. В сила е и обратната посока.

## Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека  $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  е линейна трансформация. Тогава:

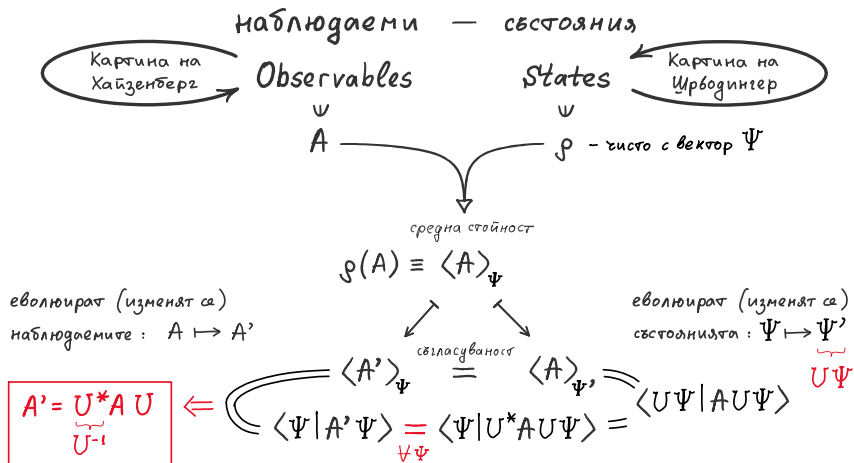
$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че  $U$  е унитарно

- Ако  $U$  е квадратна матрица и  $U^* U = \hat{1}$ ,  
то  $U$  е обратима, понеже  $1 = \det \hat{1} = \det U^* \det U = |\det U|^2$   
Тогава:  $U^* = U^{-1}$  - таква матрици се наричат **унитарни матрици**.

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации

## Квантови трансформации



## Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$  за  $U^* = U^{-1}$  има свойствата :
  - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$
  - $U^{-1}\hat{I}U = \hat{I}$
  - $(U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1}$ $\Rightarrow$  това е **изоморфизъм** на  $*$ -алгебри с единица
- Горният вид **изоморфизми** се наричат "вътрешни" / "inner".
- Математически резултат: всички  $*$ -изоморфизми на  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  в себе си са вътрешни.
- Това показва, че за крайни, чисто квантови системи, двете картини на описание на квантовите трансформации са еквивалентни.