

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

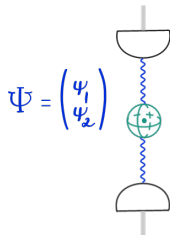
Лекция 8 / 27.11.2023, версия 1

Съставни системи: **уводни бележки**

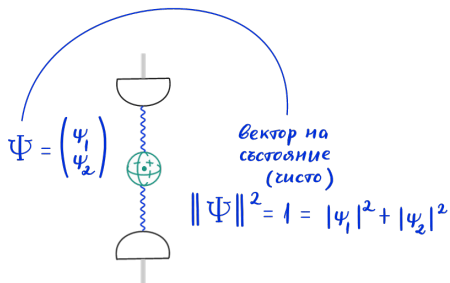
Съставни системи: **уводни бележки**



Съставни системи: **уводни бележки**



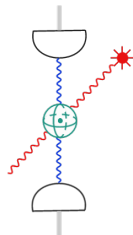
Съставни системи: **уводни бележки**



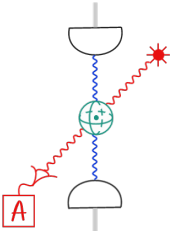
Съставни системи: **уводни бележки**



Съставни системи: **уводни бележки**



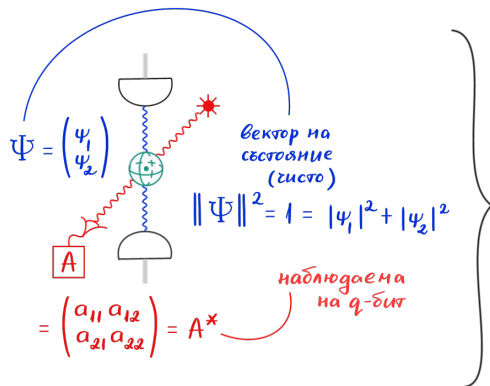
Съставни системи: **уводни бележки**



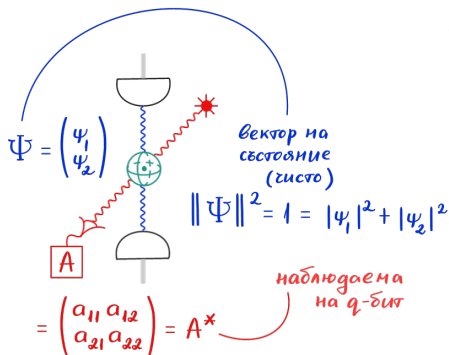
The diagram shows a vertical quantum circuit. At the top, a grey line enters a semi-circular gate. Below this gate is a blue wavy line. This is followed by a green circular gate with a crosshair and a central dot. Below the green gate is another blue wavy line. This is followed by a second semi-circular gate. A red wavy line with a starburst at the end branches off from the blue line between the two semi-circular gates. To the left of the bottom semi-circular gate is a red box containing the letter 'A'.

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^*$$

наблюдаема
на q -бит

Съставни системи: **уводни бележки**

Съставни системи: **уводни бележки**

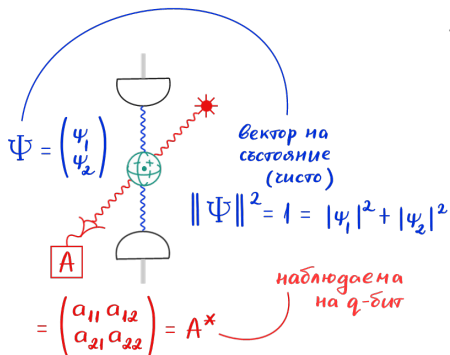


Средната стойност на A в Ψ :

$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$= \Psi^* A \Psi =$$

$$= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Съставни системи: уводни бележки

Средната стойност на A в Ψ :

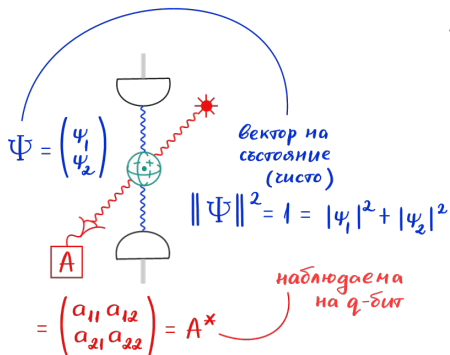
$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$= \Psi^* A \Psi =$$

$$= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

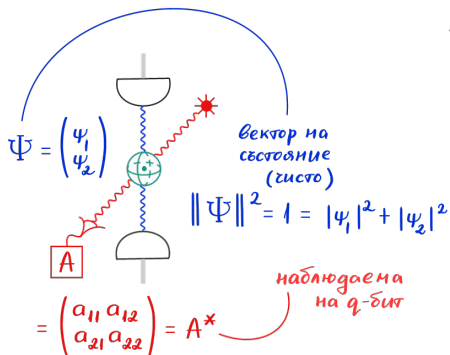
Това е вероятност за A в Ψ ,
когато A е събитие:

$$A^* = A = A^2$$

Съставни системи: **уводни бележки**Средната стойност на A в Ψ :

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi | A \Psi \rangle &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle \\
 &= \Psi^* A \Psi = \\
 &= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Забележете: една наблюдаема става случайна величина так когато се постави в контекста на състояние

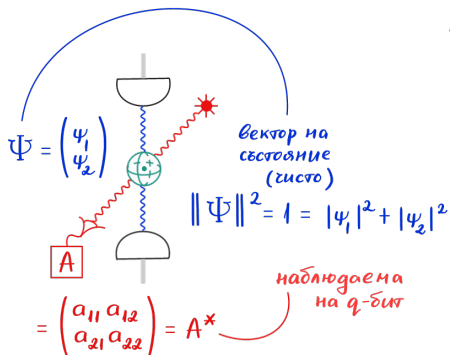
Съставни системи: уводни бележкиСредната стойност на A в Ψ :

$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$= \Psi^* A \Psi =$$

$$= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

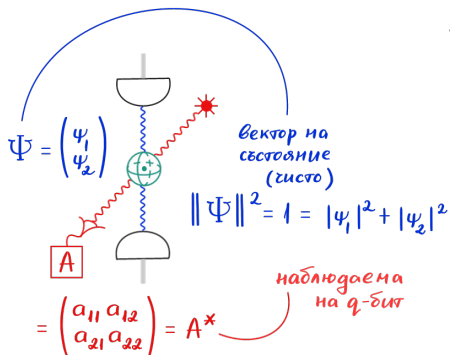
Съставни системи: уводни бележки

Средната стойност на A в Ψ :

$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$=: \langle A \rangle_{\Psi}$$

Съставни системи: уводни бележки

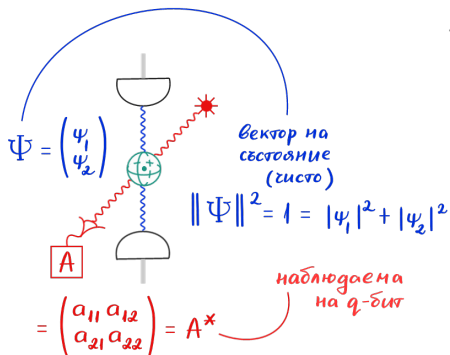


Средната стойност на A в Ψ :

$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \\ =: \langle A \rangle_{\Psi}$$

Средно-квадратично отклонение (дисперсия) на A в Ψ :

$$\Delta_{\Psi} A := \left\langle \left(A - \langle A \rangle_{\Psi} \hat{1} \right)^2 \right\rangle_{\Psi}$$

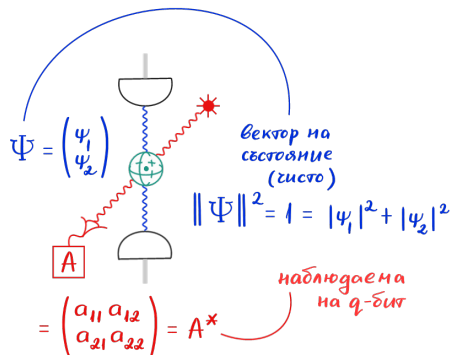
Съставни системи: **уводни бележки**Средната стойност на A в Ψ :

$$\langle \Psi | A \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \\ =: \langle A \rangle_{\Psi}$$

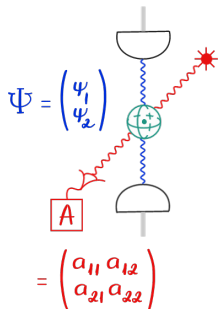
Средно-квадратично отклонение (дисперсия) на A в Ψ :

$$0 \leq \Delta_{\Psi} A := \langle (A - \langle A \rangle_{\Psi} \hat{1})^2 \rangle_{\Psi}$$

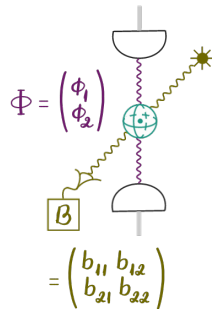
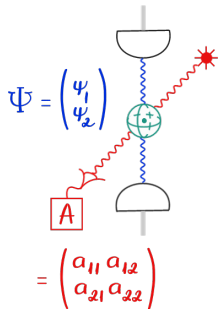
$$\Delta_{\Psi} A = 0 \Leftrightarrow \Psi \text{ е собствен за } A$$

Съставни системи: **уводни бележки**

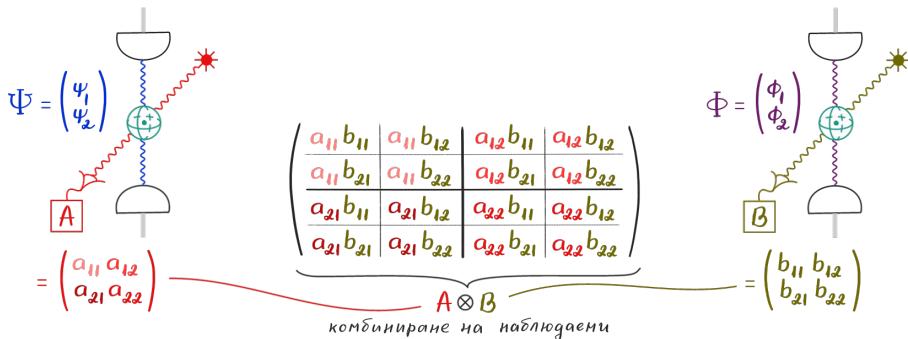
Съставни системи: **уводни бележки**

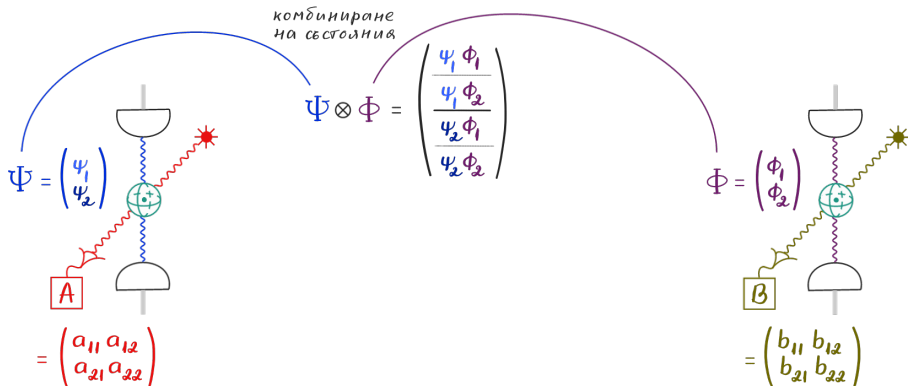


Съставни системи: **уводни бележки**

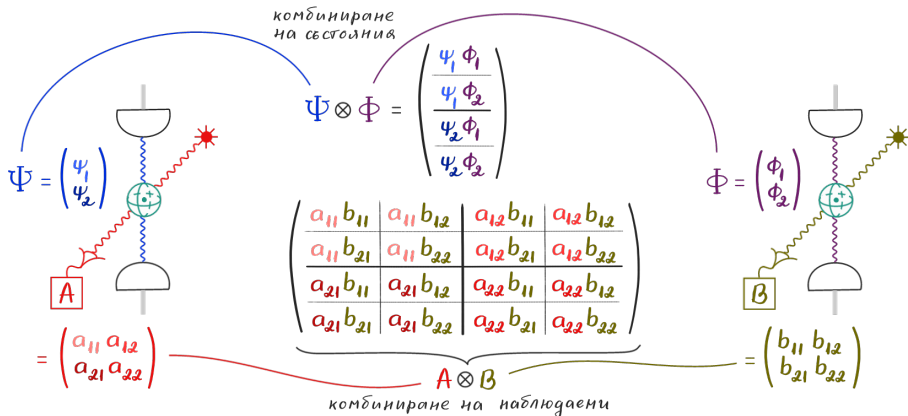


Съставни системи: **уводни бележки**

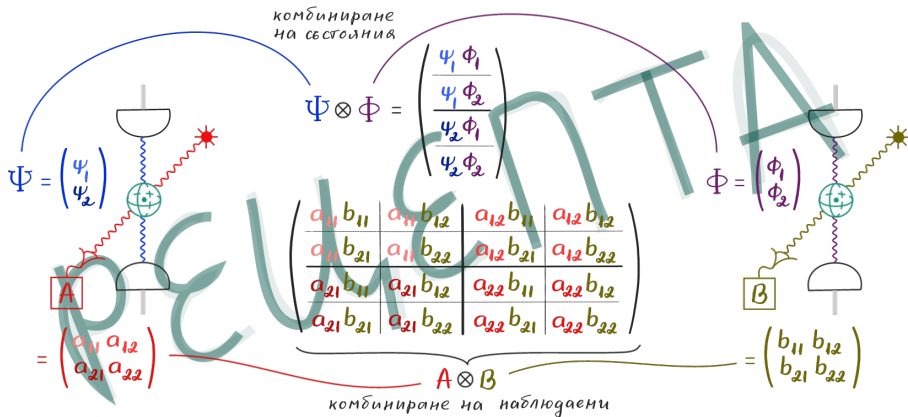


Съставни системи: **уводни бележки**

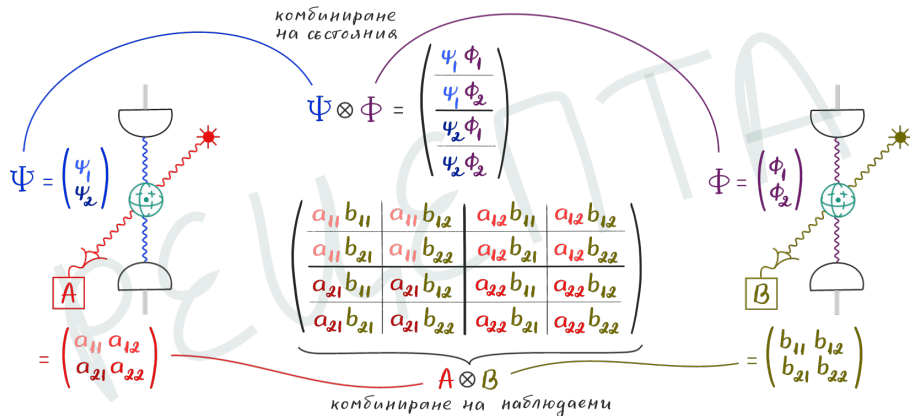
Съставни системи: уводни бележки



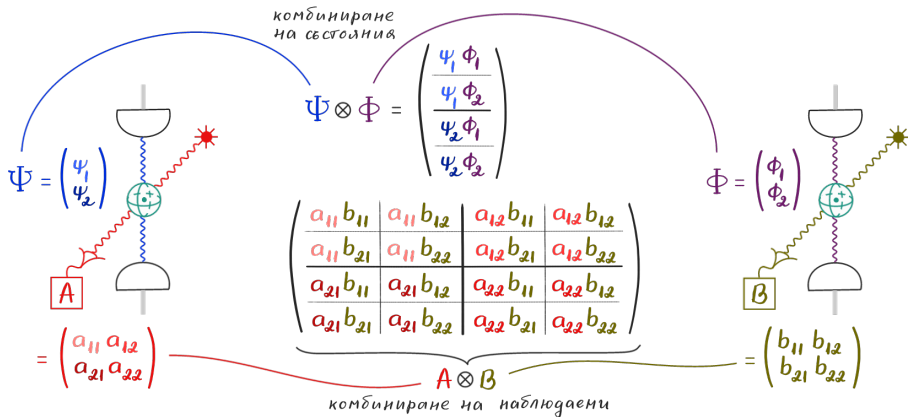
Съставни системи: уводни бележки



Съставни системи: уводни бележки



Съставни системи: уводни бележки



Съставни системи: **уводни бележки**

$$\langle \Psi \otimes \Phi | A \otimes B | \Psi \otimes \Phi \rangle$$

$$= \underbrace{\left(\overline{\psi_1} \overline{\phi_1}, \overline{\psi_1} \overline{\phi_2}, \overline{\psi_2} \overline{\phi_1}, \overline{\psi_2} \overline{\phi_2} \right)}_{\Psi^* \otimes \Phi^*} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ \hline a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{array} \right)}_{A \otimes B} \underbrace{\left(\begin{array}{c} \psi_1 \phi_1 \\ \psi_1 \phi_2 \\ \hline \psi_2 \phi_1 \\ \psi_2 \phi_2 \end{array} \right)}_{\Psi \otimes \Phi}$$

Съставни системи: **уводни бележки**

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi \otimes \Phi | A \otimes B | \Psi \otimes \Phi \rangle \\
 &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle \langle \Phi | B | \Phi \rangle \\
 &= \underbrace{\left(\overline{\psi_1} \overline{\phi_1}, \overline{\psi_1} \overline{\phi_2}, \overline{\psi_2} \overline{\phi_1}, \overline{\psi_2} \overline{\phi_2} \right)}_{\Psi^* \otimes \Phi^*} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \phi_1 \\ \psi_1 \phi_2 \\ \psi_2 \phi_1 \\ \psi_2 \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi \otimes \Phi}
 \end{aligned}$$

Съставни системи: **уводни бележки**

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & \langle \Psi \otimes \Phi | A \otimes B | \Psi \otimes \Phi \rangle \\ & = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \langle \Phi | B | \Phi \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Закон за средните стойности на} \\ \text{независими случайни величини} \end{array} \\
 & = \underbrace{\left(\overline{\psi_1 \phi_1}, \overline{\psi_1 \phi_2}, \overline{\psi_2 \phi_1}, \overline{\psi_2 \phi_2} \right)}_{\Psi^* \otimes \Phi^*} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \phi_1 \\ \psi_1 \phi_2 \\ \psi_2 \phi_1 \\ \psi_2 \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi \otimes \Phi}
 \end{aligned}$$

Съставни системи: **уводни бележки**

non entangled

вектор на **несплетено** състояние

$$\left. \begin{aligned} &\langle \Psi \otimes \Phi | A \otimes B | \Psi \otimes \Phi \rangle \\ &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle \langle \Phi | B | \Phi \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Закон за средните стойности на} \\ \text{независими случайни величини} \end{array}$$

$$= \underbrace{(\bar{\psi}_1 \bar{\phi}_1, \bar{\psi}_1 \bar{\phi}_2, \bar{\psi}_2 \bar{\phi}_1, \bar{\psi}_2 \bar{\phi}_2)}_{\Psi^* \otimes \Phi^*} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \phi_1 \\ \psi_1 \phi_2 \\ \psi_2 \phi_1 \\ \psi_2 \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi \otimes \Phi}$$

Съставни системи: **уводни бележки**

Забележете: една наблюдаема става случайна величина, когато се постави в контекста на състояние

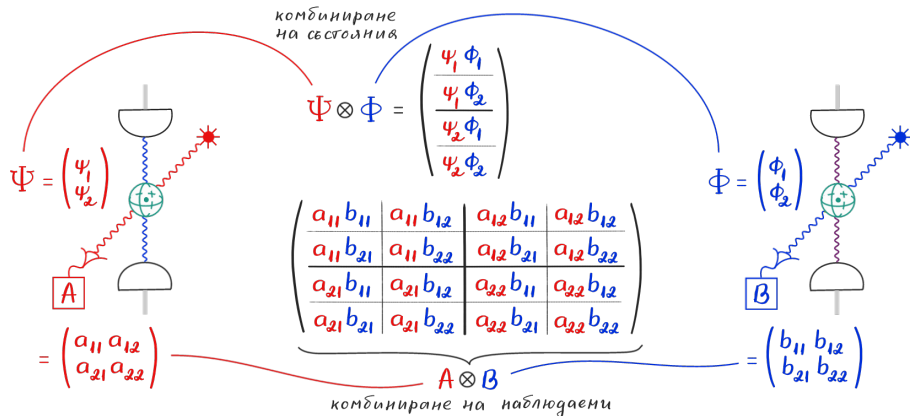
non entangled

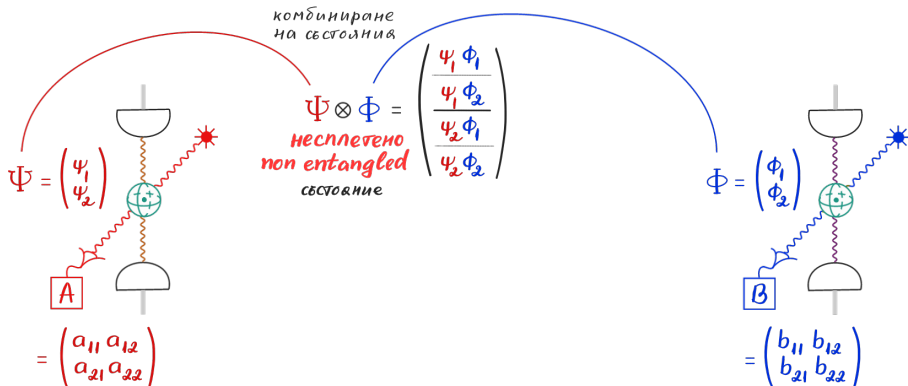
вектор на **несплетено** състояние

$$\left. \begin{aligned} &\langle \Psi \otimes \Phi | A \otimes B | \Psi \otimes \Phi \rangle \\ &= \langle \Psi | A | \Psi \rangle \langle \Phi | B | \Phi \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Закон за средните стойности на} \\ \text{независими случайни величини} \end{array}$$

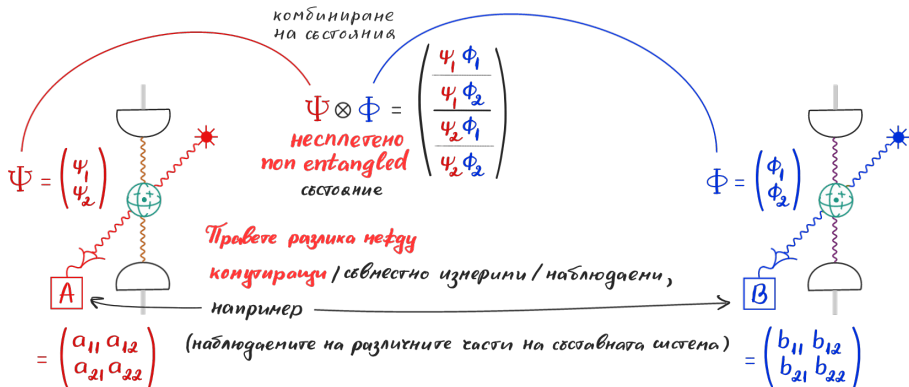
$$= \underbrace{(\bar{\psi}_1 \bar{\phi}_1, \bar{\psi}_1 \bar{\phi}_2, \bar{\psi}_2 \bar{\phi}_1, \bar{\psi}_2 \bar{\phi}_2)}_{\Psi^* \otimes \Phi^*} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \phi_1 \\ \psi_1 \phi_2 \\ \psi_2 \phi_1 \\ \psi_2 \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi \otimes \Phi}$$

Съставни системи: уводни бележки

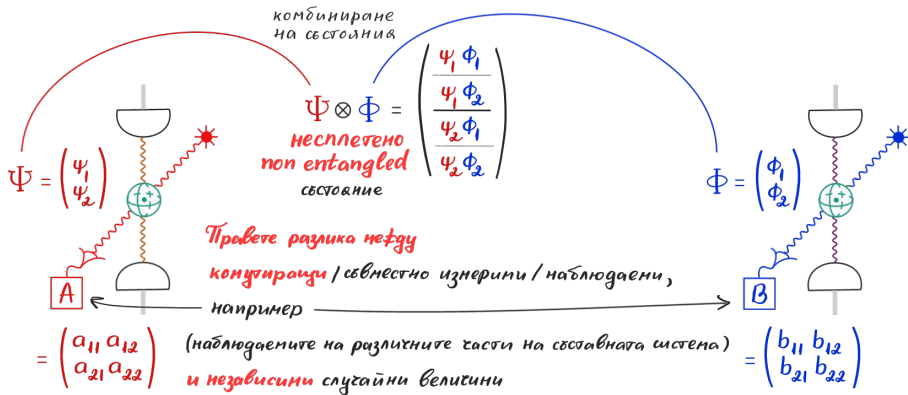


Съставни системи: **уводни бележки**

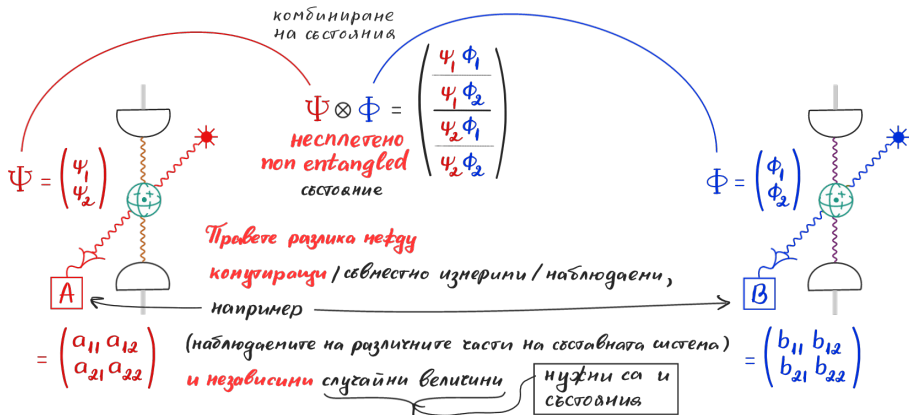
Съставни системи: уводни бележки

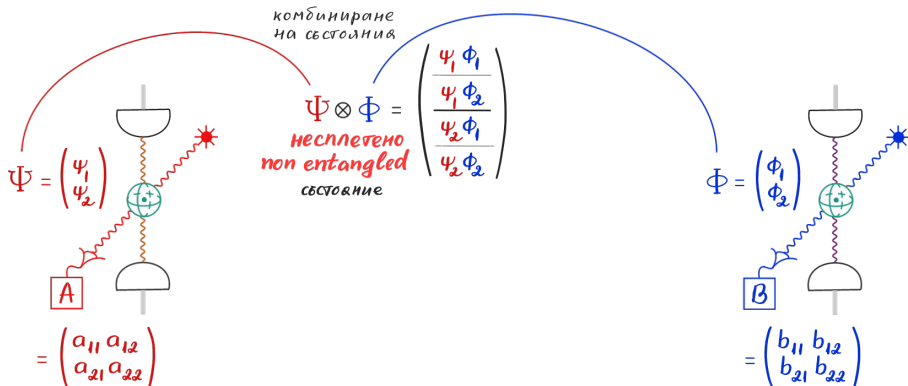


Съставни системи: уводни бележки

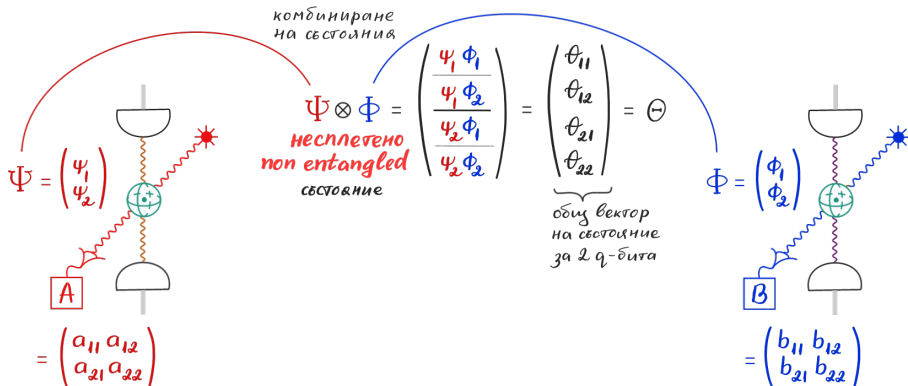


Съставни системи: уводни бележки

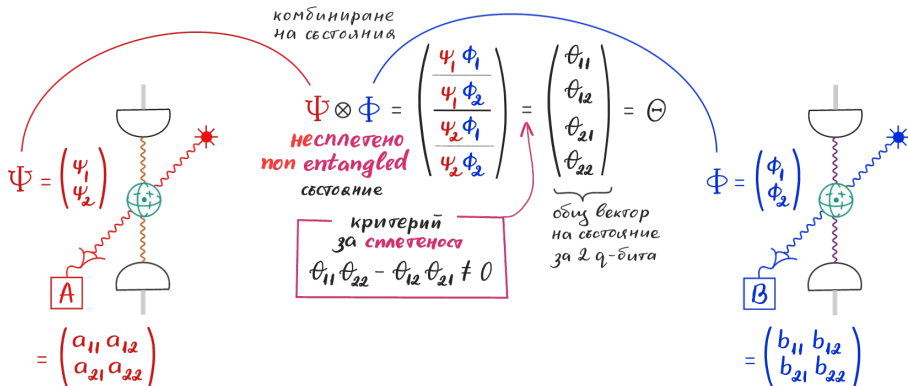


Съставни системи: **уводни бележки**

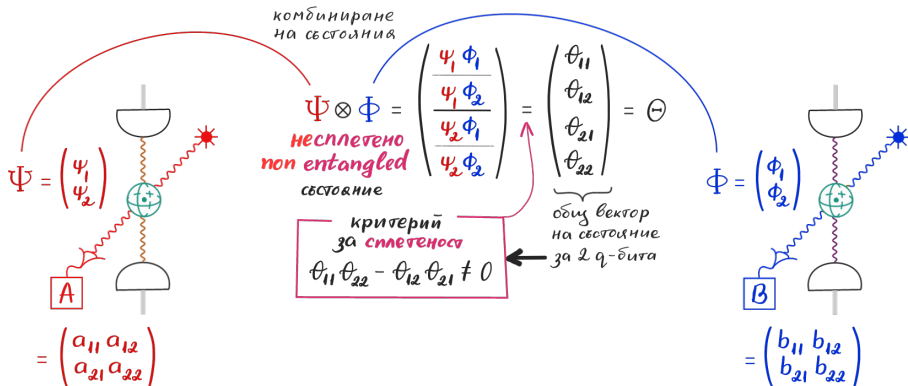
Съставни системи: уводни бележки



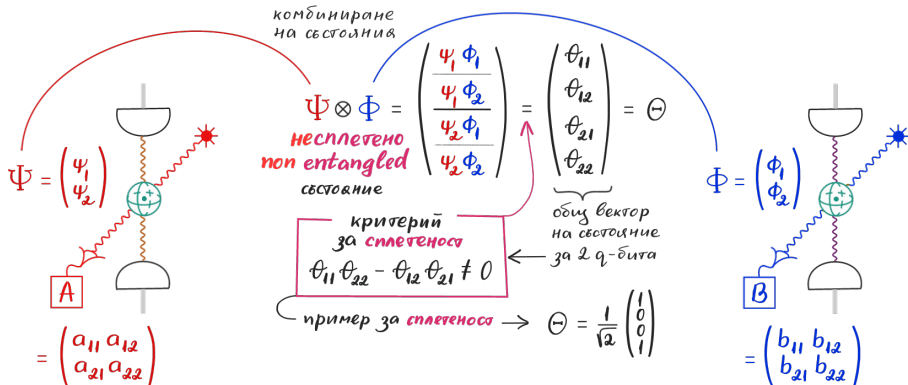
Съставни системи: уводни бележки



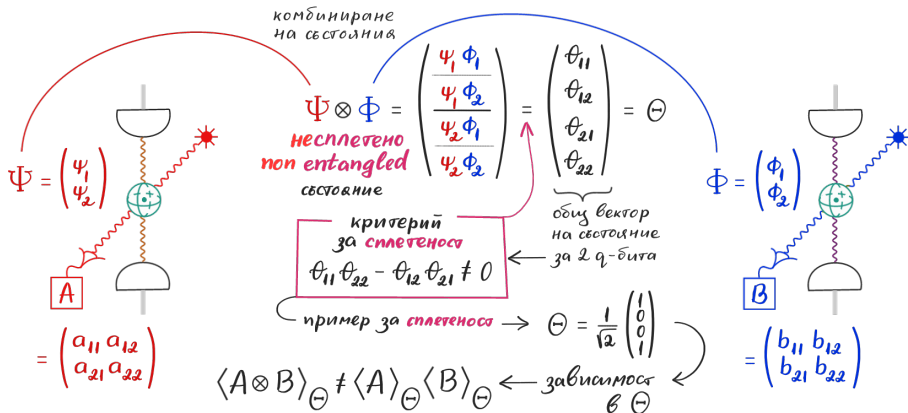
Съставни системи: уводни бележки



Съставни системи: уводни бележки

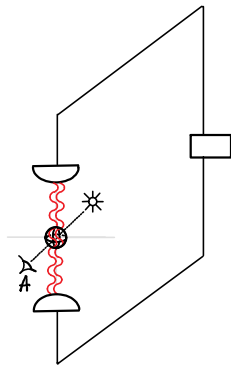


Съставни системи: уводни бележки

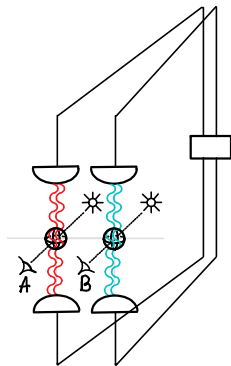


Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Съставни системи

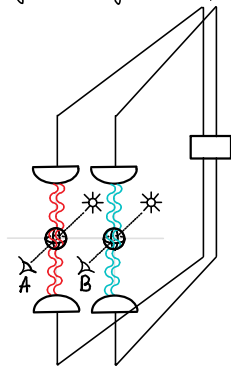
 $\mathcal{A}$

Съставни системи

 A B

Съставни системи

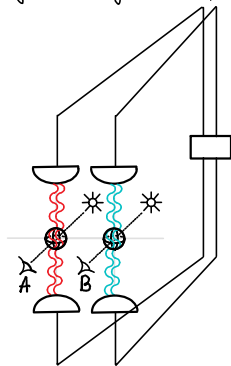
Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита : кубит "1" и кубит "2"

 A B

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"

Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

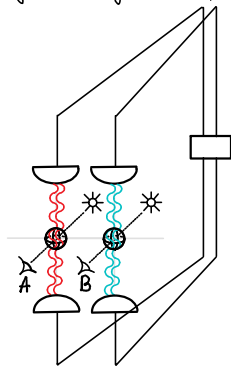


$\mathcal{A}$ $\mathcal{C}$ $\mathcal{B}$

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"

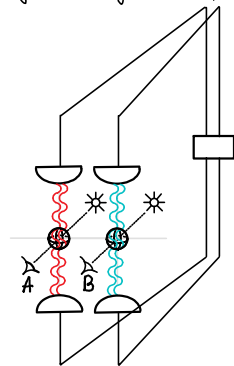
Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"
Искаме отделните кубити да са подсистеми



$\mathcal{A}$ $\mathcal{C}$ $\mathcal{B}$

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

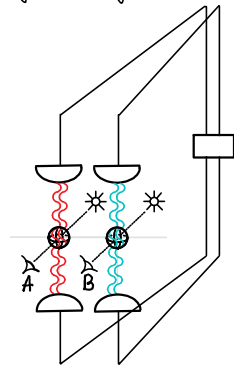
Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $\ast$ -подалгебри с $\uparrow$ на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

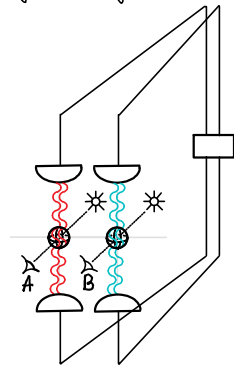
$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $\ast$ -подалгебри с $\uparrow$ на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $\ast$ -подалгебри с $\uparrow$ на $\mathcal{C}$

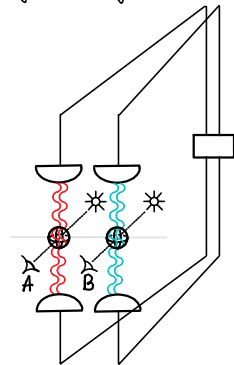
$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B} : i_1(A) i_2(B) = i_2(B) i_1(A)$$

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $\ast$ -подалгебри с $\uparrow$ на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

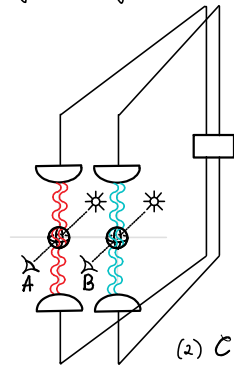
Освен това искаме:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B} : i_1(A) i_2(B) = i_2(B) i_1(A)$$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

Съставни системи

Ще ни въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $\ast$ -подалгебри с $\uparrow$ на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B} : i_1(A) i_2(B) = i_2(B) i_1(A)$$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

$$(2) \quad \mathcal{C} \text{ да се порожда алгебрично от } i_1(A) \text{ и } i_2(B) \text{ за } \forall A \in \mathcal{A} \text{ и } \forall B \in \mathcal{B}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по **Кронеcker (Kronecker)**

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по **Кръонекер (Kronecker)**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по **Кръонекер (Kronecker)**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_\Phi \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по **Кръонекер (Kronecker)**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_\Phi \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \phi_1\psi_2 \\ \phi_2\psi_1 \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Основно свойство: $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

$$(A \otimes B)(\Phi \otimes \Psi) = (A\Phi) \otimes (B\Psi)$$

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Съразане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

$$(A \otimes B)^* =$$

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} & \cdots & a_{1n} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} & \cdots & a_{nn} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right)^*$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

$$A^* \otimes B^* =$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \overline{a_{11}} \begin{array}{|c|} \hline \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \\ \hline \end{array} & \cdots & \overline{a_{n1}} \begin{array}{|c|} \hline \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \\ \hline \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} \begin{array}{|c|} \hline \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \\ \hline \end{array} & \cdots & \overline{a_{nn}} \begin{array}{|c|} \hline \overline{b_{11}} \cdots \overline{b_{m1}} \\ \vdots \\ \overline{b_{1m}} \cdots \overline{b_{mm}} \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Съразане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Съразане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

Съставни системи: **аксиоми и математически апарат**

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Справяне: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

-наистина: $(\Phi \otimes \Psi)^*(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \otimes (\Psi^* \Psi')$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C})$

Справяне: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

-наистина: $(\Phi \otimes \Psi)^*(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \otimes (\Psi^* \Psi')$

Стандартния
о.н.б. в $\mathbb{C}^4$: $e_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_0$, $e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_1$,
 $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_0$, $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_1$,

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията :

$$A \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} B$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията :

$$A \mapsto A \otimes \hat{I}$$

$$A \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} B$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията :

$$A \mapsto A \otimes \hat{I}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xhookrightarrow{i_1} & \mathcal{C} & \xleftarrow{i_2} & \mathcal{B} \\ & & \hat{I} \otimes \mathcal{B} & \longleftarrow & \mathcal{B} \end{array}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(I)}$

$$A \mapsto \overbrace{A \otimes \hat{I}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow[\iota_1]{} & \mathcal{C} & \xleftarrow[\iota_2]{} & \mathcal{B} \\ & & \hat{I} \otimes \mathcal{B} & \longleftarrow & \mathcal{B} \end{array}$$

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{I}$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

$$\hat{I} \otimes B \leftarrow B$$

$$i_2(B) =: B_{(2)}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B} \\ & & \hat{1} \otimes B \leftarrow B \\ & & i_2(B) =: B_{(2)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$\begin{array}{c}
 A \mapsto A \otimes \hat{1} \\
 \mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B} \\
 \hat{1} \otimes B \leftarrow B \\
 i_2(B) =: B_{(2)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} & 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} \\ 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} & 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} & 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} \\ 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} & 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$\begin{array}{c}
 A \mapsto A \otimes \hat{1} \\
 \mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B} \\
 \hat{1} \otimes B \leftarrow B \\
 i_2(B) =: B_{(2)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A \otimes B &= \\
 &= (A \cdot 1) \otimes (1 \cdot B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{11} \cdot 0 & 0 & a_{12} \\ a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & a_{21} \cdot 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} & 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} \\ 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} & 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} & 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} \\ 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} & 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$\begin{array}{c}
 A \mapsto A \otimes \hat{1} \\
 \mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B} \\
 \hat{1} \otimes B \leftarrow B \\
 i_2(B) =: B_{(2)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A \otimes B &= \\
 &= (A \cdot 1) \otimes (1 \cdot B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B) \\
 &= (1 \cdot A) \otimes (B \cdot 1) = (1 \otimes B)(A \otimes 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} & 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} \\ 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} & 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} & 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} \\ 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} & 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{C} & \xleftarrow{i_2} & \mathcal{B} \\ & & \hat{1} \otimes B & \longleftarrow & B \\ & & \underbrace{\phantom{\hat{1} \otimes B}}_{i_2(B) =: B_{(2)}} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \otimes B &= \\ &= (A \cdot 1) \otimes (1 \cdot B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B) \\ &= (1 \cdot A) \otimes (B \cdot 1) = (1 \otimes B)(A \otimes 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 0 \\ 0 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \\ a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 0 \\ 0 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11} \cdot 1$	$a_{11} \cdot 0$	$a_{12} \cdot 1$	$a_{12} \cdot 0$
$a_{11} \cdot 0$	$a_{11} \cdot 1$	$a_{12} \cdot 0$	$a_{12} \cdot 1$
$a_{21} \cdot 1$	$a_{21} \cdot 0$	$a_{22} \cdot 1$	$a_{22} \cdot 0$
$a_{21} \cdot 0$	$a_{21} \cdot 1$	$a_{22} \cdot 0$	$a_{22} \cdot 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$1 \cdot b_{11}$	$1 \cdot b_{12}$	$0 \cdot b_{11}$	$0 \cdot b_{12}$
$1 \cdot b_{21}$	$1 \cdot b_{22}$	$0 \cdot b_{21}$	$0 \cdot b_{22}$
$0 \cdot b_{11}$	$0 \cdot b_{12}$	$1 \cdot b_{11}$	$1 \cdot b_{12}$
$0 \cdot b_{21}$	$0 \cdot b_{22}$	$1 \cdot b_{21}$	$1 \cdot b_{22}$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

$$\hat{1} \otimes B \leftarrow B$$

$$i_2(B) =: B_{(2)}$$

 $\Rightarrow$

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Влаганията: $i_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \mapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{C} \xleftarrow{i_2} \mathcal{B}$$

$$\hat{1} \otimes B \leftarrow B$$

$$i_2(B) =: B_{(2)}$$

 $\Rightarrow$

$$A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B$$

т.е., както и поискахме: абсолютно всяка наблюдаема на системата "1", $A_{(1)}$, е съвместно измерима с всяка наблюдаема на системата "2", $B_{(2)}$.

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани бази на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформираме в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$, където $M := N/L$. В частност, ι е инекция.

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани бази на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформираме в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$, където $M := N/L$. В частност, ι е инекция.

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани бази на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформираме в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M, \text{ където } M := N/L. \text{ В частност, } \iota \text{ е инекция.}$$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани базиси на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформираме в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M, \text{ където } M := N/L. \text{ В частност, } \iota \text{ е инекция.}$$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани бази на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформирате в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$, където $M := N/L$. В частност, ι е инекция.

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани базиси на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформираме в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M, \text{ където } M := N/L. \text{ В частност, } \iota \text{ е инекция.}$$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица (т.е., ι е линейно, $\iota(AD) = \iota(A)\iota(D)$, $\iota(\hat{1}_L) = \hat{1}_N$ и $\iota(A^*) = \iota(A)^*$, за всеки $A, D \in \mathcal{A}$).

Тогава L дели N и съществуват ортонормирани базиси на $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$, такива че след като трансформираме в тях елементите на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ съответно, то образите $\iota(A)$ на елементите $A \in \mathcal{A}$ имат вида

$\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$, където $M := N/L$. В частност, ι е инекция.

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица. Тогава L дели N , $M := N/L$ и ι е инекцията $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, с точност до смяна на ортонормираните базиси в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$.

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица. Тогава L дели N , $M := N/L$ и ι е инекцията $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, с точност до съзвучия на ортонормираните базиси в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$.

При това, фактически ползуване $\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, за $\mathcal{B} := \text{Mat}_M(\mathbb{C})$ и ако отъждесовим: $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \hat{1}_M := \{A \otimes \hat{1}_M \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$, а $\mathcal{B} = \hat{1}_L \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, то $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{C} \mid AB = BA \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{A}' =: \text{комутант на } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{B}' = \mathcal{A}'$.

бикомутант $\nearrow$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица. Тогава L дели N , $M := N/L$ и ι е инекцията $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, с точност до смяна на ортонормираните базиси в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$.

При това, фактически ползуване $\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, за $\mathcal{B} := \text{Mat}_M(\mathbb{C})$ и ако
 отъждесовим: $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \hat{1}_M := \{A \otimes \hat{1}_M \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$, а $\mathcal{B} = \hat{1}_L \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, то
 $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{C} \mid AB = BA \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{A}' =: \text{комутант на } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{B}' = \mathcal{A}''$.
бикомутант $\nearrow$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица. Тогава L дели N , $M := N/L$ и ι е инекцията $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, с точност до смяна на ортонормираните базиси в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$.

При това, фактически ползуване $\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, за $\mathcal{B} := \text{Mat}_M(\mathbb{C})$ и ако
 отъждесовим: $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \hat{1}_M := \{A \otimes \hat{1}_M \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$, а $\mathcal{B} = \hat{1}_L \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, то
 $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{C} \mid AB = BA \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{A}' =: \text{комутант на } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{B}' = \mathcal{A}'$.
 бикомутант $\nearrow$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица. Тогава L дели N , $M := N/L$ и ι е инекцията $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, с точност до смяна на ортонормираните базиси в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$.

При това, фактически ползуване $\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, за $\mathcal{B} := \text{Mat}_M(\mathbb{C})$ и ако
отъждесовим: $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \hat{1}_M := \{A \otimes \hat{1}_M \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$, а $\mathcal{B} = \hat{1}_L \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, то

$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{C} \mid AB = BA \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{A}' =: \text{комутант на } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{B}' = \mathcal{A}''$.
бикомутант $\nearrow$

Теорема (на фон Нойман, "за бикомутанта")

Нека $\mathcal{C} := \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{A} := \text{Mat}_L(\mathbb{C})$ и $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ е морфизъм на $\ast$ -алгебри с единица. Тогава L дели N , $M := N/L$ и ι е инекцията $\iota(A) = A \otimes \hat{1}_M$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, с точност до смяна на ортонормираните базиси в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^L$.

При това, фактически ползуване $\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, за $\mathcal{B} := \text{Mat}_M(\mathbb{C})$ и ако отъждесовим: $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \hat{1}_M := \{A \otimes \hat{1}_M \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$, а $\mathcal{B} = \hat{1}_L \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, то $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{C} \mid AB = BA \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{A}' =: \text{комутант на } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{B}' = \mathcal{A}'$.



бикомутант $\nearrow$

Съставни системи: **аксиоми и математически апарат**

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система.

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянието?

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоятелта?

Покаже алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,
то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за
която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоятелствата?

Покаже алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,
то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за
която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

До тук изсихме наблюдаемите в съставна система. Състоятелта?

Покаже алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,
то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за
която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ - наистина :

$$\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

До тук изсихихме наблюдаемите в съставна система. Състоянието?

Показе алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ - наистина:

$$\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

До тук изсихихме наблюдаемите в съставна система. Състоянието?

Покаже алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,
то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за
която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ - наистина:

$$\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22} = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянието?

Покаже алгебрат на наблюдаемите на дитове "1 и 2" е $\text{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,
то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, за
която $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\varrho(C) = \text{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ - наистина:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) &\equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \end{aligned}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Следователно, всеки две отделни състояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на подсистемите води до състояние $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ на съставната система, така че за всеки две наблюдавани A и B на подсистемите

$$\langle A \otimes B \rangle_{\rho} \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\rho} = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2} - \text{независимост}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Следователно, всеки две отделни състояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на подсистемите води до състояние $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ на съставната система, така че за всеки две наблюдавани A и B на подсистемите

$$\langle A \otimes B \rangle_{\rho} \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\rho} = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2} - \text{независимост}$$

- наистина

$$\text{Tr}((\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(A \otimes B)) = \text{Tr}((\hat{\rho}_1 A) \otimes (\hat{\rho}_2 B)) = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 A) \text{Tr}(\hat{\rho}_2 B)$$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^*$

Изсти състояние: $\hat{\rho} = \Theta \Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

Тогава $\hat{\rho} = \Theta \Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*)$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\text{Тогава } \hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\Psi\Psi^*) \otimes (\Phi\Phi^*)$$

Изсти състояние: $\hat{\rho} = \Theta \Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\text{Тогава } \hat{\rho} = \Theta \Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = \underbrace{(\Psi \Psi^*)}_{\hat{\rho}_1} \otimes \underbrace{(\Phi \Phi^*)}_{\hat{\rho}_2}$$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \hat{\rho} &= \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\underbrace{\Psi\Psi^*}_{\hat{\rho}_1}) \otimes (\underbrace{\Phi\Phi^*}_{\hat{\rho}_2}) \\ &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \end{aligned}$$

Съставни системи: аксиоми и математически апарат

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \hat{\rho} &= \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\underbrace{\Psi\Psi^*}_{\hat{\rho}_1}) \otimes (\underbrace{\Phi\Phi^*}_{\hat{\rho}_2}) \\ &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \end{aligned}$$

Това се наричат **несплетени чисти състояния**.

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ -единицен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ -единици

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \hat{\rho} = \Theta\Theta^* &= (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\underbrace{\Psi\Psi^*}_{\hat{\rho}_1}) \otimes (\underbrace{\Phi\Phi^*}_{\hat{\rho}_2}) \\ &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \end{aligned}$$

Това се наричат **несплетени чисти състояния**.

Чисти състояния в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, чиито вектори на състояние Θ не могат да се представят, като $\Theta = \Phi \otimes \Psi$ се наричат сплетени / entangled

Специално за 2 бита има прост критерий за сепарабилност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Съставни системи: **аксиоми и математически апарат**

Специално за 2 бита има прост критерий за сепарабилност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Пример :

$$e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— определя сепарабилно чисто състояние.

Съставни системи: **аксиоми и математически апарат**

Специално за 2 бита има прост критерий за сепарабилност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Пример : $\frac{1}{\sqrt{2}} \Theta := e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\swarrow$ за нормировка

— определя сепарабилно чисто състояние.

Корелации и неравенства на Бел

Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме сплетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор : $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме състоянието на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ са 1-битови наблюдаеми

Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме състоянието на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{22} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22})$$

Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме състоянието на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ са 1-битови наблюдаеми, то

$$\langle B_{(2)} \rangle_{\Theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22})$$

Корелации и неравенства на Бел

Да разгледаме силетеното състояние на два бита "1 и 2" определено от

единичния вектор: $\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Полезни формули:

$$\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (a_{11} b_{11} + a_{22} b_{22} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12})$$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие ($c^2 + s^2 = 1$)

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие ($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие ($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

Тогава $\text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие
($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

Тогава $\text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \wedge Z_{(2)}^{\perp}) \equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta}$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие
($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) &\equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left((1+c)(1-c) + (-s)(1+c) - s^2 - s^2 \right) \end{aligned}$$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие
($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) &\equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left((1+c)(1-c) + (-s)(1+c) - s^2 - s^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово събитие
($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) &\equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left((1+c)(1-c) + (-s)(1+c) - s^2 - s^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Извод: при всеки избор на 1-битово събитие Z , ако то се измерва във всяка от подсистемите то или на две места $Z_{(1)} = 1$ и $Z_{(2)} = 1$ или на две места $Z_{(1)} = 0$ и $Z_{(2)} = 0$

Корелации и неравенства на Бел

Разбира се, $\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$ в общия случай на A и B , но се оказва, че състоянието Θ има корелации наблюдаемите на кубит 1 и кубит 2, които са по-силни от класическите.

Пример: нека $Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix}$, за $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ е 1-битово състояние
($c^2 + s^2 = 1$)

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) &\equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left((1+c)(1-c) + (-s)(1+c) - s^2 - s^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Извод: при всеки избор на 1-битово състояние Z , ако то се измерва във всяка от подсистемите то или на две места $Z_{(1)} = 1$ и $Z_{(2)} = 1$ или на две места $Z_{(1)} = 0$ и $Z_{(2)} = 0$ — има пълен синхрон в това състояние по отношение на тези тестове.

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{Z}$ за $\varphi = 0$

Корреляции и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{Z}$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathbb{Z}$ за $\varphi = 90^\circ$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right)$$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta$$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right)$$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prob}_\Theta \left(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right)$$

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right)$$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \cup Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prob}_\Theta \left(Y_{(1)} \cup Z_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle Y_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_\Theta$$

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \cup Z_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_\Theta$$

Корелации и неравенства на Бел

Нека $X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 0$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Z$ за $\varphi = 90^\circ$; Z остава за общо φ

Да пресметнем:

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Y_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}_\Theta \left(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right) &\equiv \langle Y_{(1)} Z_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) - \frac{1}{2} \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \frac{s}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1-s) \end{aligned}$$

$$\text{Prob}_\Theta \left(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^\perp \right) \equiv \langle X_{(1)} Z_{(2)}^\perp \rangle_\Theta = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} (1-c) + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4} (1-c)$$

Класическия анализ показва, че

$$\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \cup Y_{(2)}^{\perp}) + \text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \cup Z_{(2)}^{\perp}) \geq \text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \cup Z_{(2)}^{\perp})$$

Корелации и неравенства на Бел

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp}) + \text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) \geq \text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})$$

Корелации и неравенства на Бел

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)} \stackrel{?}{\geq} \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)}$$

Обама те получихме:

Корелации и неравенства на Бел

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)} \stackrel{?}{\geq} \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)}$$

Обаче тук
получихме:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-s) \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{4}(1-c)$$

където $c = \cos \varphi$
 $s = \sin \varphi$

Корелации и неравенства на Бел

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)} \geq \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)}$$

Обама те
получихме:

$$\frac{1}{4}$$

+

$$\frac{1}{4}(1-s)$$

?

$\geq$

$$\frac{1}{4}(1-c)$$

$\Leftrightarrow$

$$1 \geq \sin \varphi - \cos \varphi$$

където $c = \cos \varphi$
 $s = \sin \varphi$

Корелации и неравенства на Бел

Класическия анализ показва, че **неравенства на Бел**

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)} \geq \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)}$$

Обаче тук
получихме:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-s) \geq \frac{1}{4}(1-c)$$

$$\begin{aligned} \text{където } c &= \cos \varphi \\ s &= \sin \varphi \end{aligned}$$

?

 $\geq$ $\Leftrightarrow$

$$1 \geq \sin \varphi - \cos \varphi$$

 $\Leftrightarrow$

$$\sin \frac{\pi}{4} \geq \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)$$

Извод: неравенствата $\Leftarrow$
на Бел се нарушават в
квантови системи, напр. за $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Следва извод на неравенствата на Бел за класически системи

В останалата част на презентацията вместо индекси "1" и "2" на събитията X, Y, Z са използвани "A" и "B", съответно.

За вектора Θ на сплетеното състояние е използвана буквата Ψ .

Неравенства на Бел

Bell's inequalities

АПР/Бел постановка

Айнщайн - Подолски - Розен / Бел

Einstein - Podolsky - Rosen / Bell

АПР / Бел постановка

Ψ

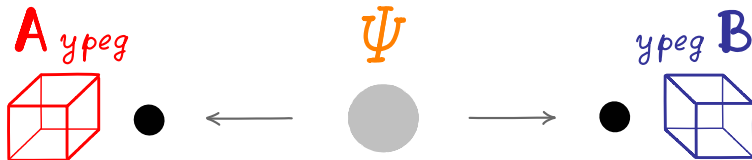


АПР / Бел постановка

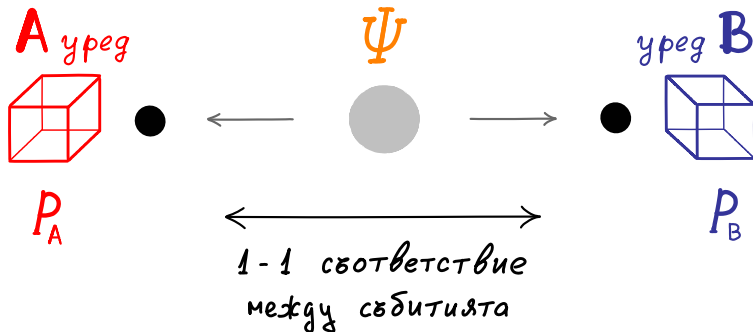
Ψ



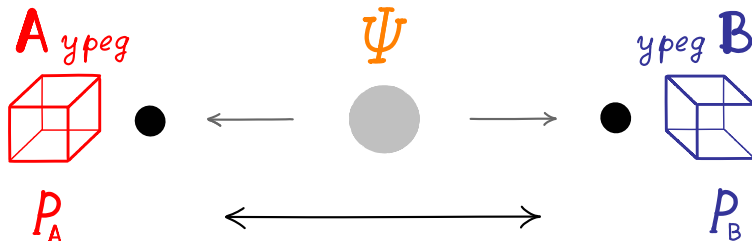
АПР/Бел постановка



АПР/Бел постановка



АПР/Бел постановка



При такава синхронизация между уредите ще има 100% корелация на резултатите.

Корелации и неравенства на Бел

0	1	0	1	0	1	0	1	Z_B
0	0	1	1	0	0	1	1	Y_B
0	0	0	0	1	1	1	1	X_B
✓		✓		✓		✓		
p_1								X_A
	p_2							Y_A
		p_3						Z_A
			p_4					
				p_5				✓
					p_6			✓
						p_7		✓
							p_8	✓

$$p(X_A Y_B^\perp) = p_5 + p_6$$

$$p(Y_A Z_B^\perp) = p_3 + p_7$$

$$-p(X_A Z_B^\perp) = -p_5 - p_7$$

$$\geq 0$$

Корелации и неравенства на Бел

0	1	0	1	0	1	0	1	Z_B
0	0	1	1	0	0	1	1	Y_B
0	0	0	0	1	1	1	1	X_B
p_1								X_A
	p_2							Y_A
		p_3						Z_A
			p_4					
				p_5				
					p_6			
						p_7		
							p_8	

$$p(X_A Y_B^\perp) = p_5 + p_6$$

$$p(Y_A Z_B^\perp) = p_3 + p_7$$

$$-p(X_A Z_B^\perp) = -p_5 - p_7$$

$$\geq 0$$

Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**

Корелации и неравенства на Бел: скрити параметри и нелокалност



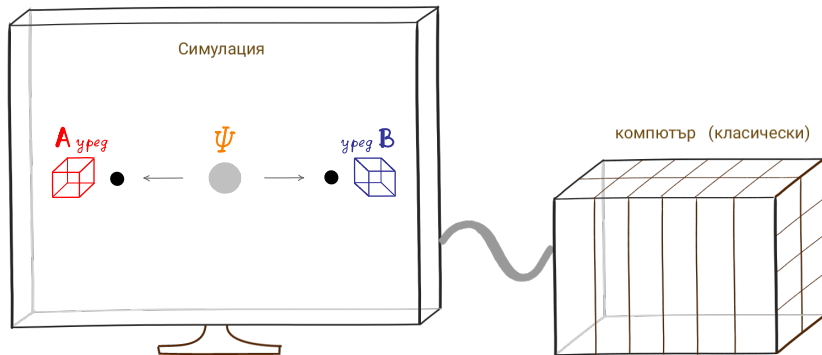
Корреляции и неравенства на Бел: **скрыти параметри и нелокалност**



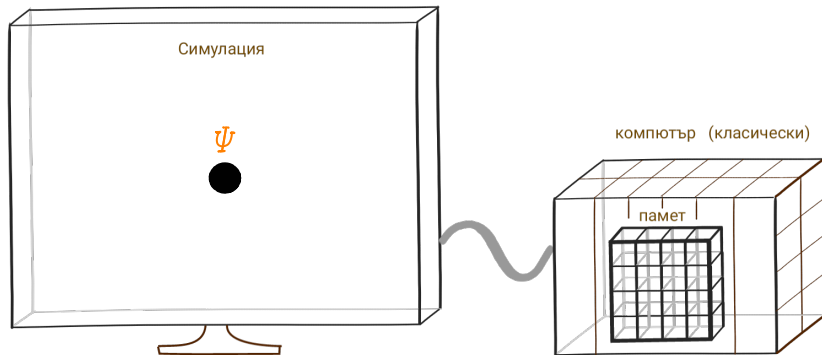
Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**



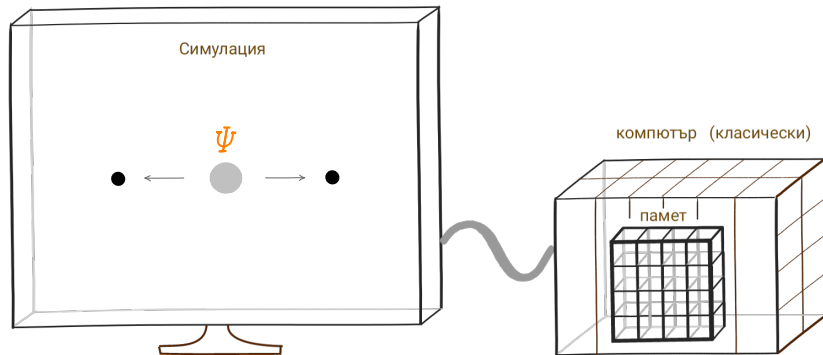
Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**

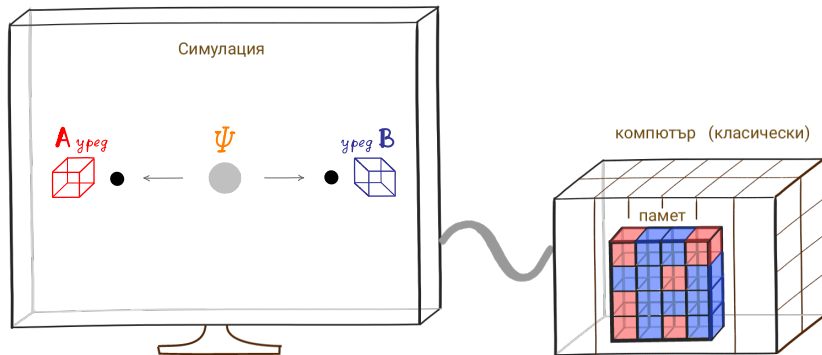


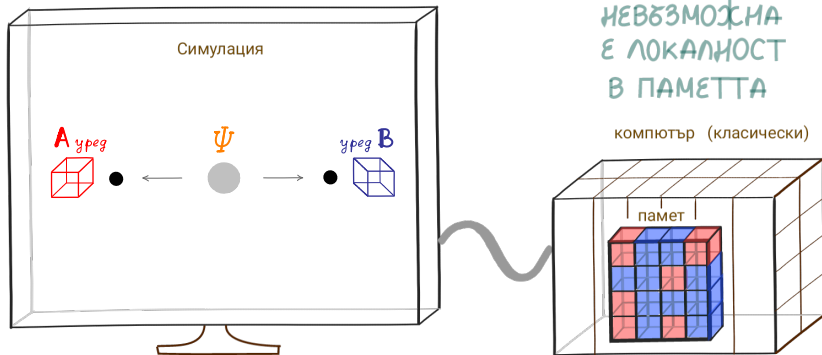
Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**



Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**



Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**

Корелации и неравенства на Бел: **скрити параметри и нелокалност**

Описание на паметта на квантов компютър

Описание на паметта на квантов компютър

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

Описание на паметта на квантов компютър

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ - вектор-стълб : $|\Psi\rangle = \Psi$ - едноместна операция върху $\mathbb{C}^N$, която е идентитета

Описание на паметта на квантов компютър

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ - вектор-стълб : $|\Psi\rangle = \Psi$ - едноместна операция върху $\mathbb{C}^N$, която е идентитета

Тази операция е линейна : $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ - вектор-стълб : $|\Psi\rangle = \Psi$ - едноместна операция върху $\mathbb{C}^N$, която е идентитета

Тази операция е линейна : $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$

и в частност, $|0\rangle = 0 \in \mathbb{C}^N$

Описание на паметта на квантов компютър

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ - вектор-стълб : $|\Psi\rangle = \Psi$ - едноместна операция върху $\mathbb{C}^N$, която е идентитета

Тази операция е линейна : $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$

и в частност, $|0\rangle = 0 \in \mathbb{C}^N$

- За стандартния о.н.б. $e_0, \dots, e_{N-1} \in \mathbb{C}^N$

$e_k \equiv |e_k\rangle \equiv |k\rangle$ — информация (напр., индекса) на базисен вектор

Описание на паметта на квантов компютър

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ - вектор-стълб : $|\Psi\rangle = \Psi$ - едноместна операция върху $\mathbb{C}^N$, която е идентитета

Тази операция е линейна : $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$

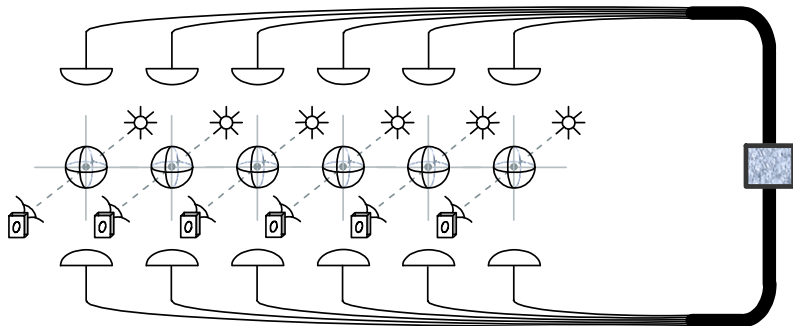
и в частност, $|0\rangle = 0 \in \mathbb{C}^N$

- За стандартния о.н.б. $e_0, \dots, e_{N-1} \in \mathbb{C}^N$

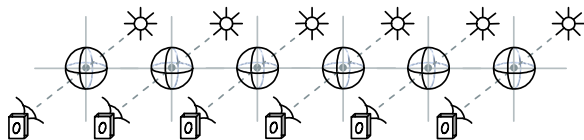
$e_k \equiv |e_k\rangle \equiv |k\rangle$ — информация (напр., индекса) на базисен вектор

Сега обаче $|0\rangle \equiv e_0 \neq 0$ - нулевия вектор в $\mathbb{C}^N$!!!

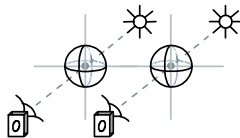
Описание на паметта на квантов компютър



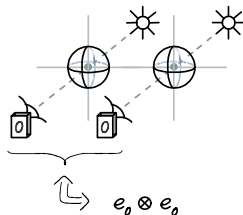
Описание на паметта на квантов компютър



Описание на паметта на квантов компютър

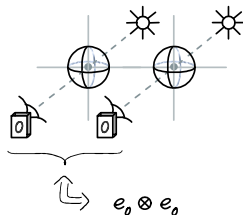


Описание на паметта на квантов компютър



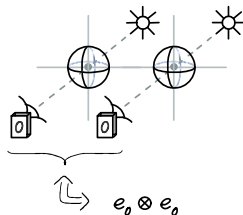
Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle$$



Описание на паметта на квантов компютър

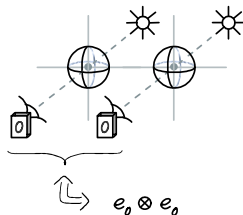
$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle$$



Описание на паметта на квантов компютър

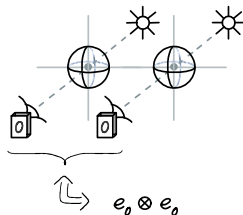
$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

нови означения



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

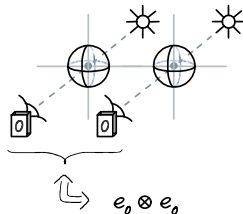


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

III

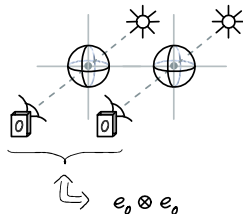
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

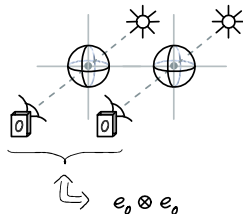
$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

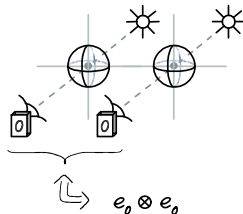
$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

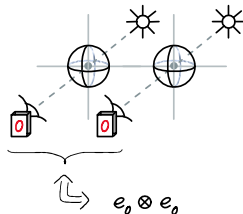
$$\underbrace{\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)}_{\text{III}} \otimes \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle$$

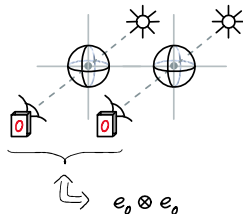
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv \underbrace{[00]_2}_{\text{число "0" в двоична система}} \rangle \equiv |0\rangle$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

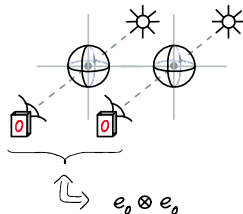


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv |[00]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

число "0" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



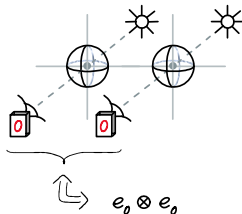
Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv |[00]_2\rangle \equiv |0\rangle \leftarrow \begin{cases} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{cases}$$

числото "0" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0 \in \mathbb{C}^2} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0 \in \mathbb{C}^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

имат
различен смисъл !!!

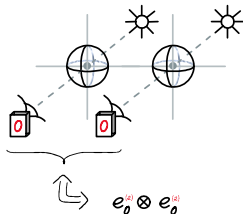


Описание на паметта на квантов компютър

$$\underbrace{e_0^{(s)} \otimes e_0^{(s)}}_{\text{III}} \equiv |e_0^{(s)}\rangle \otimes |e_0^{(s)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv \underbrace{|[00]_2\rangle}_{\text{числото "0" в двоична система}} \equiv |0\rangle \leftarrow \begin{cases} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(s)} \in \mathbb{C}^2} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0^{(q)} \in \{e_0^{(q)}, e_1^{(q)}, e_2^{(q)}, e_3^{(q)}\} - \text{стандардният о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0^{(s)} \in \mathbb{C}^2$
имат различен смисъл !!!

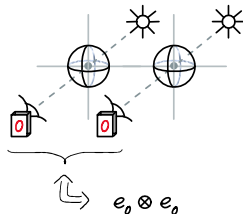


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv |[00]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

число "0" в двоична система

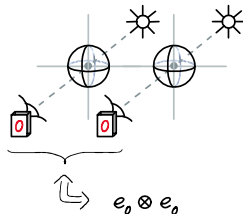
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv \underbrace{|[00]_2\rangle}_{\text{число "0" в двоична система}} \equiv \underbrace{|0\rangle}_{\text{число "0" в двоична система}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

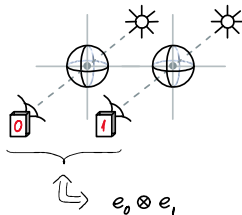


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_1 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv |[01]_2\rangle \equiv | \overset{\uparrow}{1} \rangle$$

числото "1" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{\text{red}}{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \overset{\text{red}}{e}_1 \in \{e_0, \overset{\text{red}}{e}_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



Описание на паметта на квантов компютър

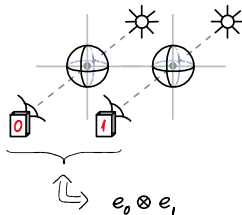
$$e_0 \otimes e_1 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv |[01]_2\rangle \equiv |\overset{\text{има}}{\underset{\text{различен смисъл !!!}}{1}}\rangle$$

числото "1" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \color{red}{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \color{red}{e_1} \in \{e_0, \color{red}{e_1}, e_2, e_3\} - \text{стандартизиран о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0, e_1 \in \mathbb{C}^2$

имат
различен смисъл !!!



Описание на паметта на квантов компютър

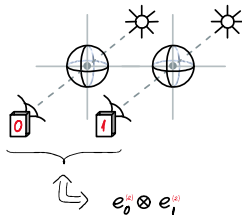
$$\underbrace{e_0^{(z)} \otimes e_1^{(z)}}_{\text{III}} \equiv |e_0^{(z)}\rangle \otimes |e_1^{(z)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv |[01]_2\rangle \equiv |1\rangle \leftarrow \begin{cases} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{cases}$$

числото "1" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(z)}} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1^{(z)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{e}_1^{(q)} \in \{e_0^{(q)}, \mathbf{e}_1^{(q)}, e_2^{(q)}, e_3^{(q)}\} - \text{стандардният о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0^{(z)}, e_1^{(z)} \in \mathbb{C}^2$

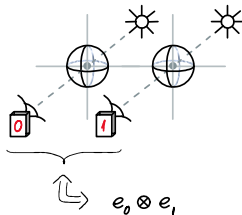
имат
различен смисъл !!!



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_1 \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv |[01]_2\rangle \equiv | \overset{\text{число "1" в двоична система}}{\color{red}1} \rangle$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \color{red}1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \color{red}e_1 \in \{e_0, \color{red}e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

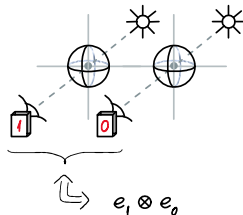


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes e_0 \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \equiv |1\rangle|0\rangle \equiv |1,0\rangle \equiv |[10]_2\rangle \equiv |2\rangle$$

числото "2" в двоична система

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_2 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

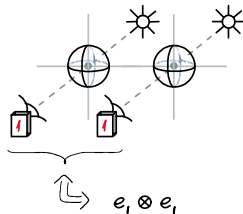


Описание на паметта на квантов компютър

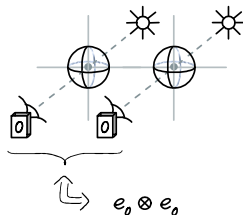
$$e_1 \otimes e_1 \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \equiv |1\rangle|1\rangle \equiv |1,1\rangle \equiv |[11]_2\rangle \equiv |3\rangle$$

числото "3" в двоична система

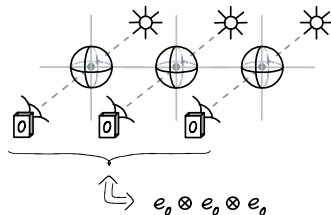
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



Описание на паметта на квантов компютър



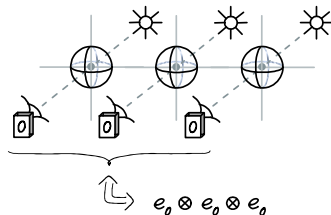
Описание на паметта на квантов компютър



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes e_0 \otimes e_0$$

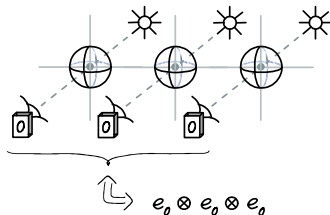
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Описание на паметта на квантов компютър

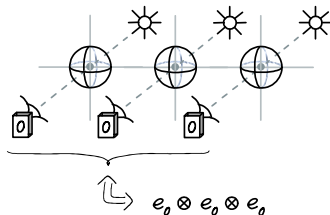
$$e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$\underbrace{e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0)}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \otimes \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$$

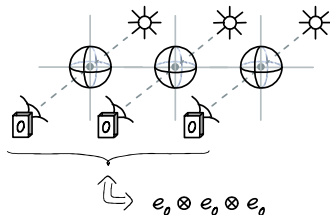


Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0))$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

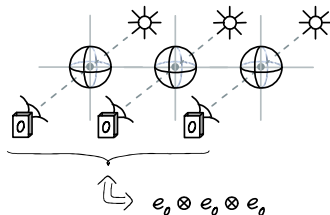


Описание на паметта на квантов компютър

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

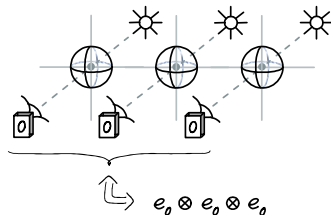
$$(e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0))$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



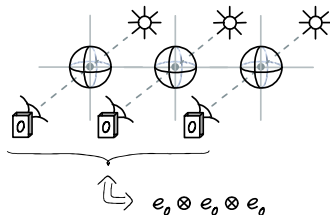
Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\left(e_0 \otimes e_0 \otimes e_0 \right)} & \\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Описание на паметта на квантов компютър

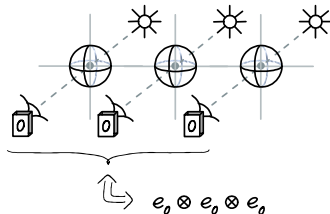
$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{\left(e_0 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{e_0 \otimes e_0 \otimes e_0} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



Описание на паметта на квантов компютър

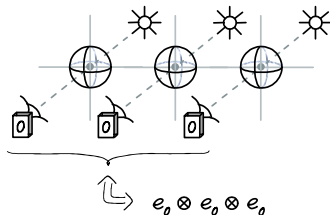
$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{(e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0))}_{\text{orange}} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{green}}
 \end{aligned}$$

Тензорното произведение е асоциативно
(т.е., скобите могат да се нестият)



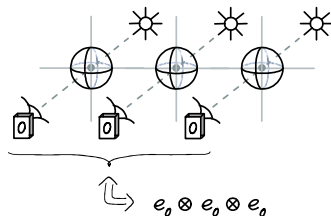
Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{(e_0 \otimes e_0 \otimes e_0)} &= \longrightarrow \\
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



Описание на паметта на квантов компютър

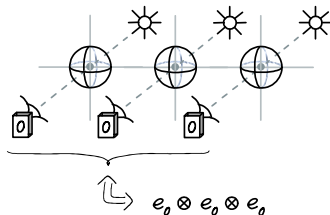
$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 \underbrace{\left(e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0) \right)} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = e_0 \\
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 \underbrace{(e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0))}_{\text{orange}} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \\
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{\text{green}} \right) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

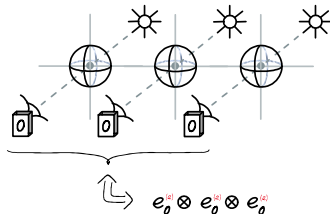
- стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$



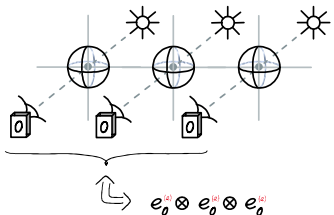
Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \\
 \underbrace{(e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)})}_{\text{red}} &= \longrightarrow \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{green}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{green}}
 \end{aligned}$$

- стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$



Описание на паметта на квантов компютър

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{e_0^{(z)} \otimes e_0^{(z)} \otimes e_0^{(z)}} \\
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8
 \end{aligned}$$


Описание на паметта на квантов компютър

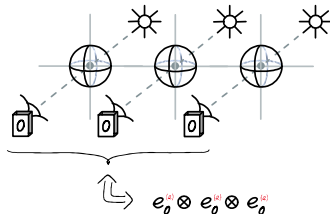
$$e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

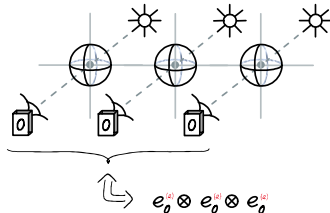
$$= e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$

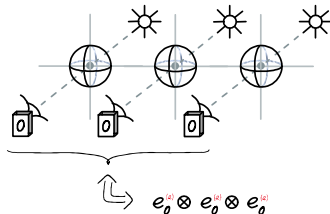


Описание на паметта на квантов компютър

$$\underbrace{e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)}} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ \equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\}$ - стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$

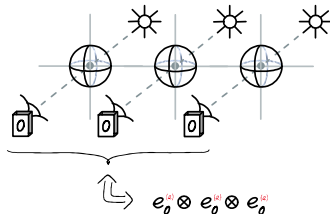


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ \equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\}$ - стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$

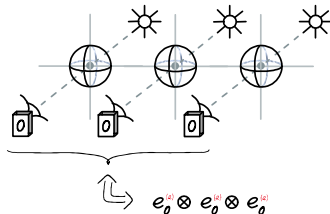


Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ \equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle$$

число "0" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} - \text{стандартизиран О.Н.Б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

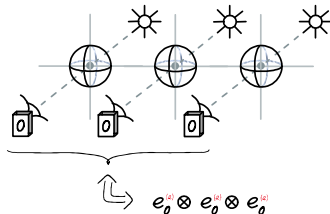
$$e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

числото "0" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

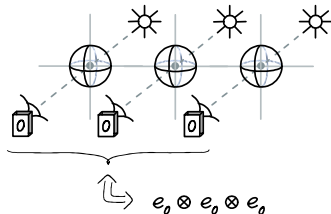
числото "0" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ - стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_0 \otimes e_0) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

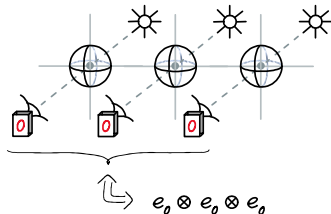
числото "0" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_0 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_0 \otimes e_1) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |0,0,1\rangle \equiv |[001]_2\rangle \equiv |1\rangle$$

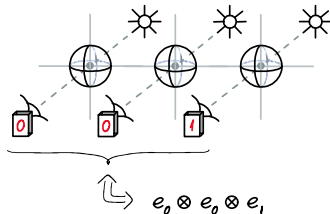
числото "1" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_1 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ - стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_1 \otimes e_0) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |0,1,0\rangle \equiv |[010]_2\rangle \equiv |2\rangle$$

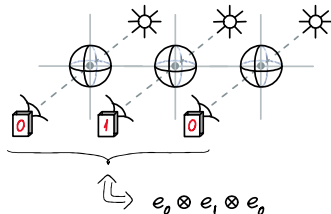
числото "2" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_2 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_0 \otimes (e_1 \otimes e_1) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |0,1,1\rangle \equiv |[011]_2\rangle \equiv |3\rangle$$

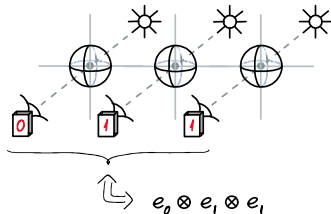
числото "3" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_0 \otimes e_0) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |1,0,0\rangle \equiv |[100]_2\rangle \equiv |4\rangle$$

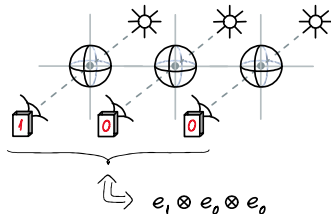
числото "4" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= e_4 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ - стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_0 \otimes e_1) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |1,0,1\rangle \equiv |[101]_2\rangle \equiv |5\rangle$$

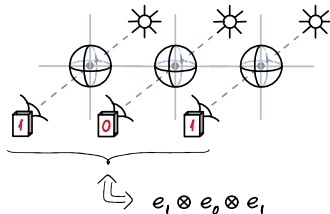
числото "5" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_5 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_1 \otimes e_0) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |1, 1, 0\rangle \equiv |[110]_2\rangle \equiv |6\rangle$$

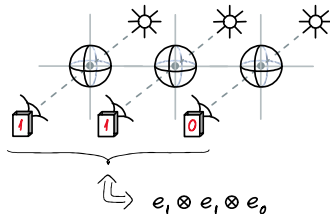
числото "6" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_6 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



Описание на паметта на квантов компютър

$$e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |1,1,1\rangle \equiv |[111]_2\rangle \equiv |7\rangle$$

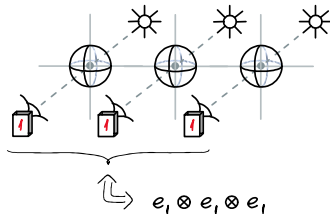
число "7" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

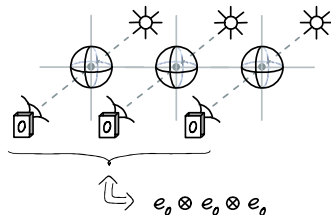
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

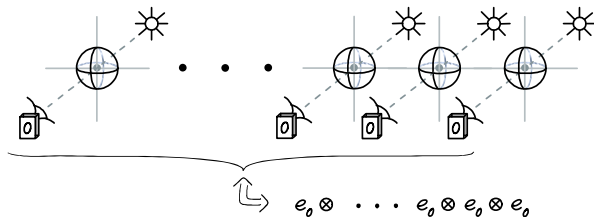
$$= e_7 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



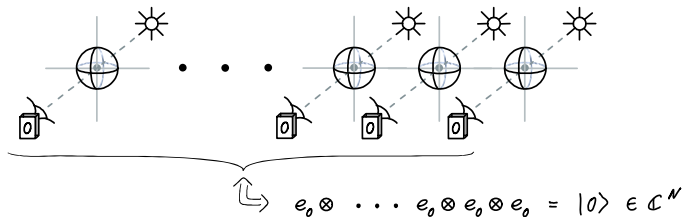
Описание на паметта на квантов компютър



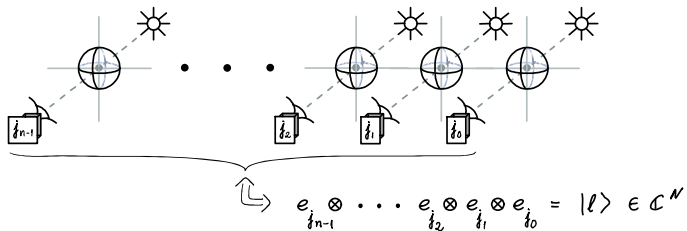
Описание на паметта на квантов компютър



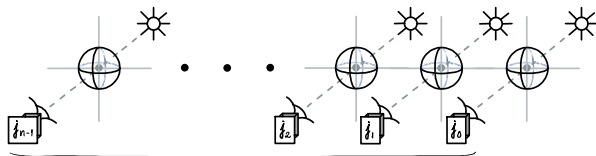
Описание на паметта на квантов компютър



Описание на паметта на квантов компютър



Описание на паметта на квантов компютър

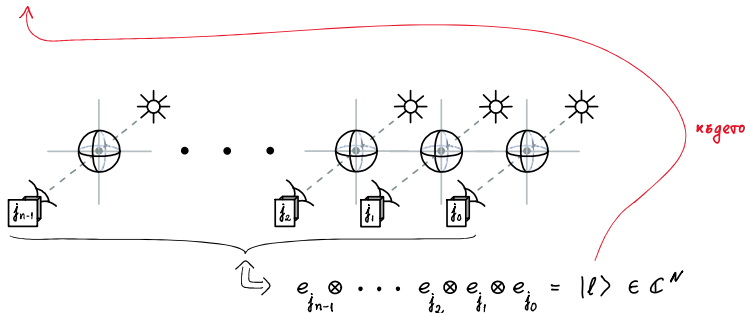


$$\hookrightarrow e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_0} = |l\rangle \in \mathbb{C}^N$$

$$\text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n$$

Описание на паметта на квантов компютър

$$l = [j_{n-1} \dots j_1 j_0]_2 := j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 2^0$$

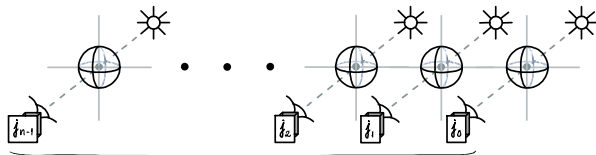


$$\text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n$$

Описание на паметта на квантов компютър

двоично разлагане

$$l = [j_{n-1} \dots j_1 j_0]_2 := j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 2^0$$



където

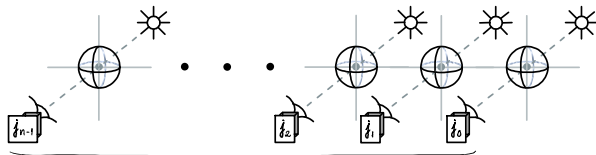
$$\hookrightarrow e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_0} = |l\rangle \in \mathbb{C}^N$$

$$\text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n$$

Описание на паметта на квантов компютър

двоично разлагане

$$l = [j_{n-1} \dots j_1 j_0]_2 := j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 2^0 \in \{0, \dots, N-1\}$$



където

$$\hookrightarrow e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_0} = |l\rangle \in \mathbb{C}^N$$

$$\text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n$$

Описание на паметта на квантов компютър

Изводи:

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от n квантови бита (кубити) е $\mathbb{C}^N$ (N -мерно) за $N = 2^n$

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от n квантови бита (кубити) е

$$\underbrace{\mathbb{C}^N}_{\text{N-мерно}} \text{ за } N = 2^n$$
$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n\text{-факт}} = \mathbb{C}^{2 \cdots 2} = \mathbb{C}^{2^n}$$

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от n квантови бита (кубити) е

$$\underbrace{\mathbb{C}^N}_{\text{N-мерно}} \text{ за } N = 2^n$$

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n\text{-факти}} = \mathbb{C}^{2 \cdots 2} = \mathbb{C}^{2^n}$$

Стандартния базис $e_0 \equiv |0\rangle$ и $e_1 \equiv |1\rangle$ в $\mathbb{C}^2$ пораждат стандартния базис в $\mathbb{C}^N$: $|[j_{n-1} \dots j_0]_2\rangle = e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_0}$

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от n квантови бита (кубити) е

$$\underbrace{\mathbb{C}^N}_{(N\text{-мерно})} \text{ за } N = 2^n$$

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n\text{-факти}} = \mathbb{C}^{2 \cdots 2} = \mathbb{C}^{2^n}$$

Стандартния базис $e_0 \equiv |0\rangle$ и $e_1 \equiv |1\rangle$ в $\mathbb{C}^2$ пораждат стандартния базис в $\mathbb{C}^N$: $|[j_{n-1} \dots j_0]_2\rangle = e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_0}$ - наричат се изчислителни базиси.

Квантови трансформации

Квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

Квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

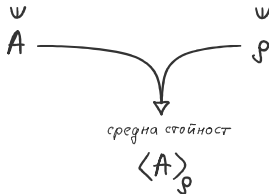
Observables States

Квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

Observables

States



Квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

Observables

States



средна стойност

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

Квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

Observables

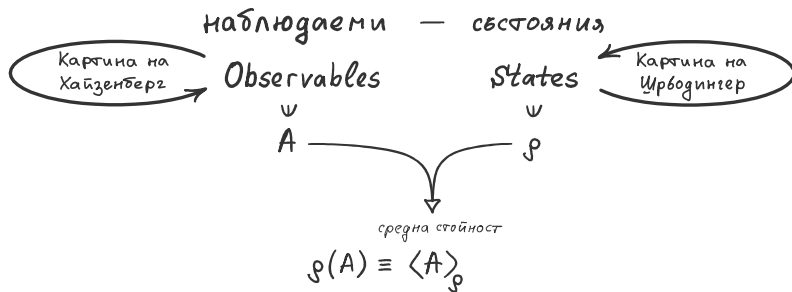
States

Картина на
Шрёдингер ψ
 A ψ
 ρ

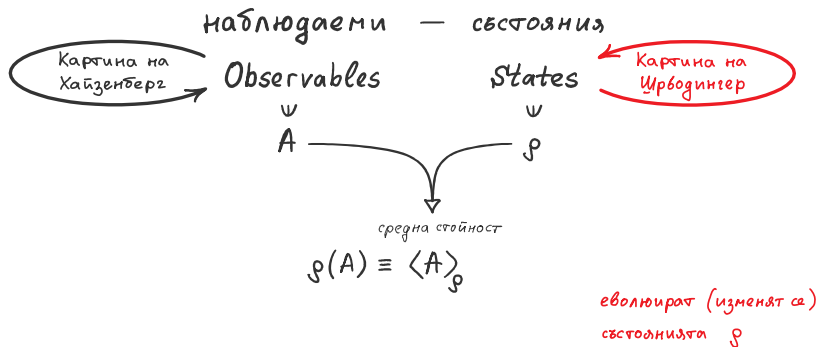
средна стойност

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

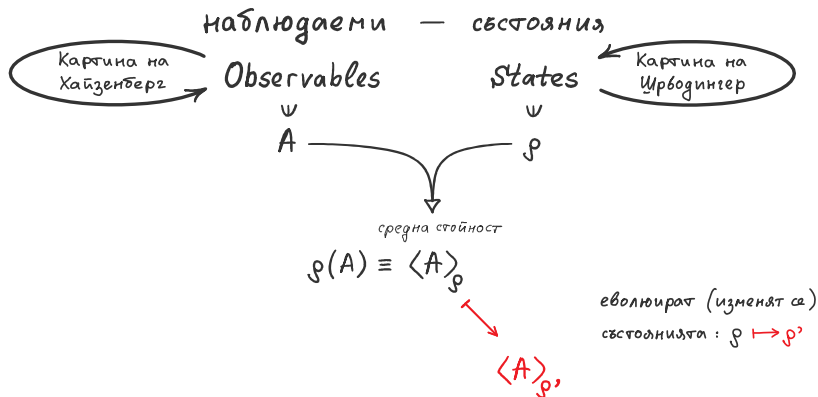
Квантови трансформации



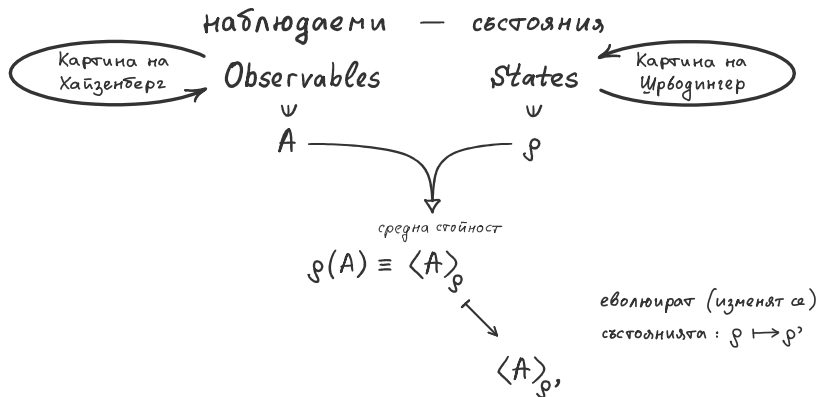
Квантови трансформации



Квантови трансформации



Квантови трансформации



Квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

Картина на
Хайзенберг

Observables

States

Картина на
Шрьодингер
 ψ
 A
 ψ
 ρ

средна стойност

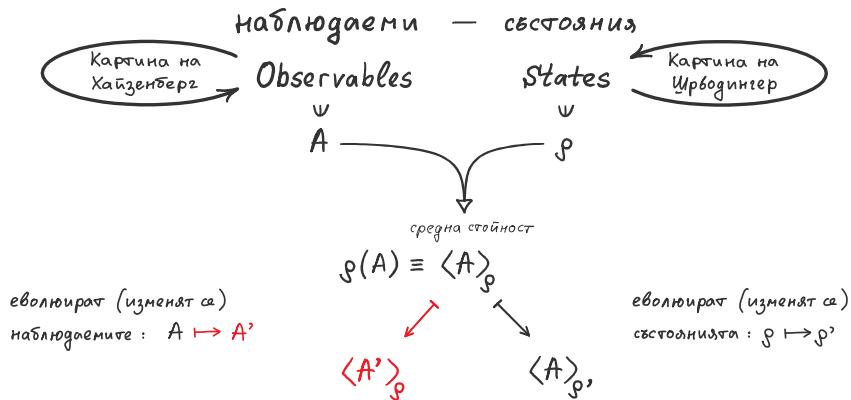
$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_{\rho}$$

$$\langle A \rangle_{\rho'}$$

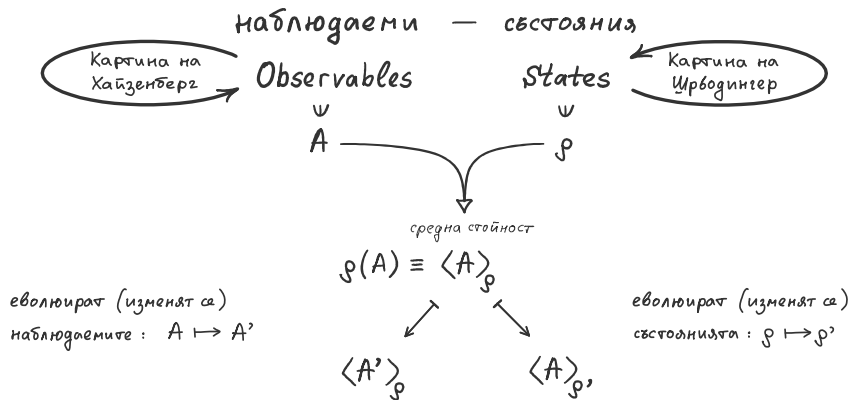
еволюират (изменят се)
наблюдаемите

еволюират (изменят се)
състоянията : $\rho \mapsto \rho'$

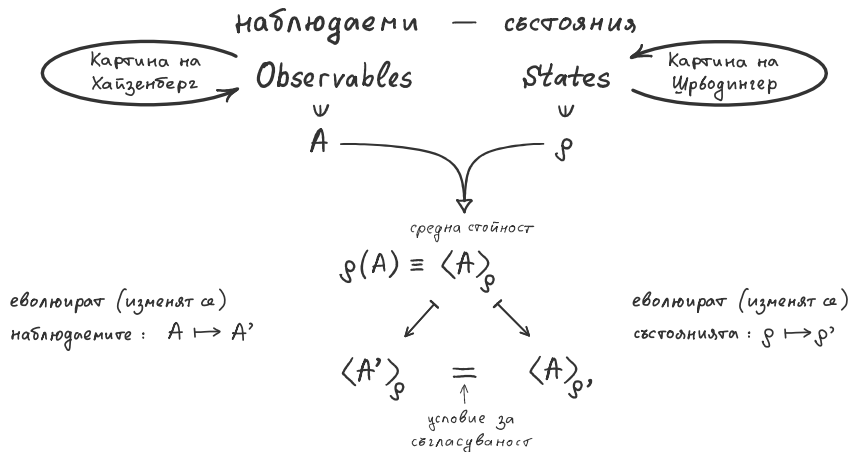
Квантови трансформации



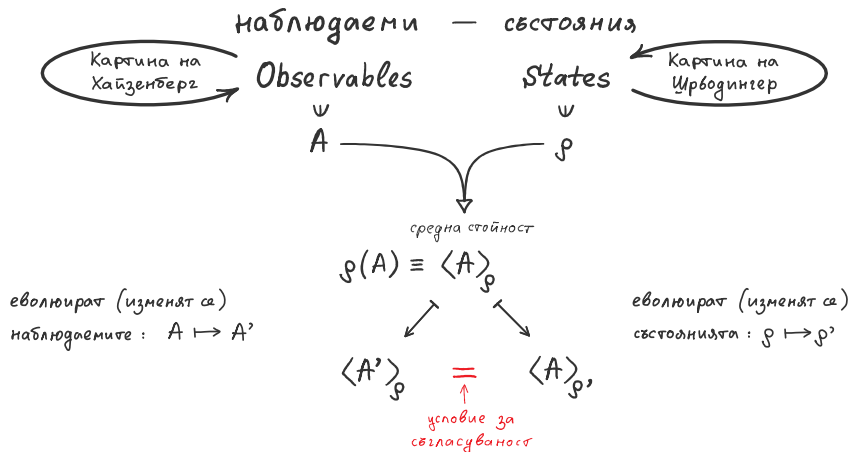
Квантови трансформации



Квантови трансформации



Квантови трансформации



Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • ψ състояние $\mapsto$ ψ състояние;

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;
• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите бегла;

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

- смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

- вероятностите за преход да се запазват

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$
и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

$$\text{тогава } p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}.$$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

$$\text{тогава } p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}.$$

Теорема на Вигнер / Wigner

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

$$\text{тогава } p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}.$$

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация

Квантови трансформацииКвантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

тогава $p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

$$\text{тогава } P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}.$$

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна

Квантови трансформацииКвантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

Квантови трансформацииКвантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ транзформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

U е единствена с точност до пропорционалност.

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ транзформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

U е единствена с точност до пропорционалност.

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^{n'}$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ транзформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

U е единствена с точност до пропорционалност.

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

• смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;

• вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$,

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$,

тогава $P_{\Psi \mapsto \Phi} = P_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация

$U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$,

като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ ($\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$)

U е единствена с точност до пропорционалност. В сила е и обратната посока.

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$ е линейна трансформация.

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\underbrace{\langle U\Psi | U\Phi \rangle} = \langle \Psi | \Phi \rangle$$
$$\langle \Psi | U^* U \Phi \rangle$$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$$

$$\langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{I} \Phi \rangle$$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$$

$$\langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{I} \Phi \rangle$$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle \quad \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$, то U е обратима

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$,
то U е обратима, понеже $1 = \det \hat{1} = \det U^* \det U = |\det U|^2$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$,
то U е обратима, понеже $1 = \det \hat{1} = \det U^* \det U = |\det U|^2$
Тогава: $U^* = U^{-1}$

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$,
то U е обратима, понеже $1 = \det \hat{1} = \det U^* \det U = |\det U|^2$
Тогава: $U^* = U^{-1}$ - таква матрици се наричат **унитарни матрици**.

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left. \begin{array}{l} \langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^* U \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1} \Phi \rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow U^* U = \hat{1}$$

↑ казваме, че U е унитарно

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$,
то U е обратима, понеже $1 = \det \hat{1} = \det U^* \det U = |\det U|^2$
Тогава: $U^* = U^{-1}$ - таква матрици се наричат **унитарни матрици**.

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$, като се случва една от следните две възможности :

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$
- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle} \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$

U е единствена с точност до пропорционалност. В сила е и обратната посока.

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации

Квантови трансформации

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$, като се случва една от следните две възможности :

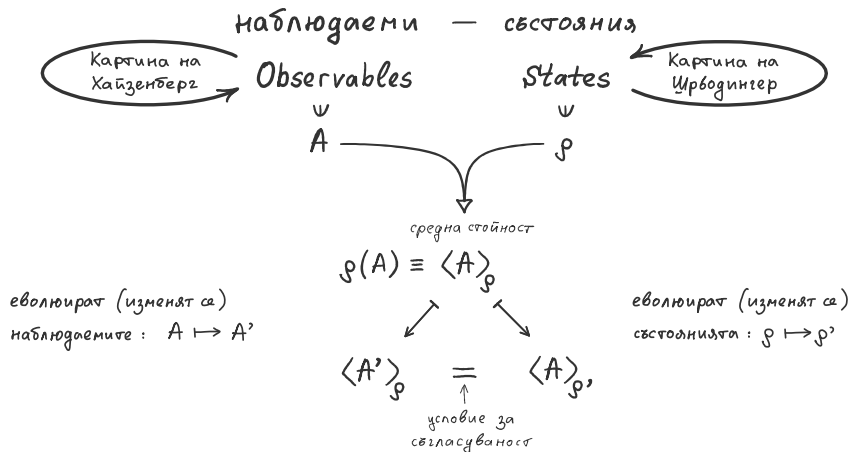
- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$

- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle} \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$

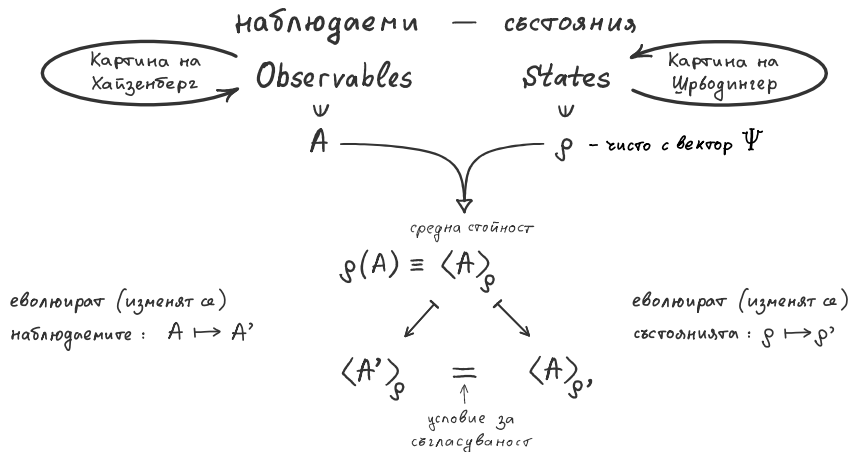
U е единствена с точност до пропорционалност. В сила е и обратната посока.

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации

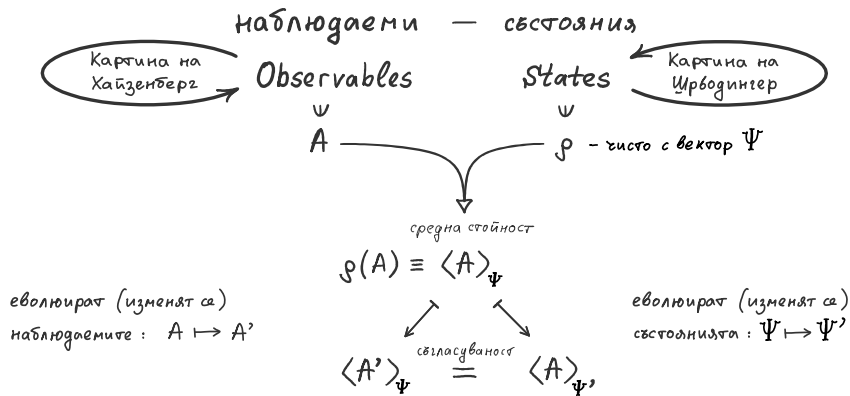
Квантови трансформации



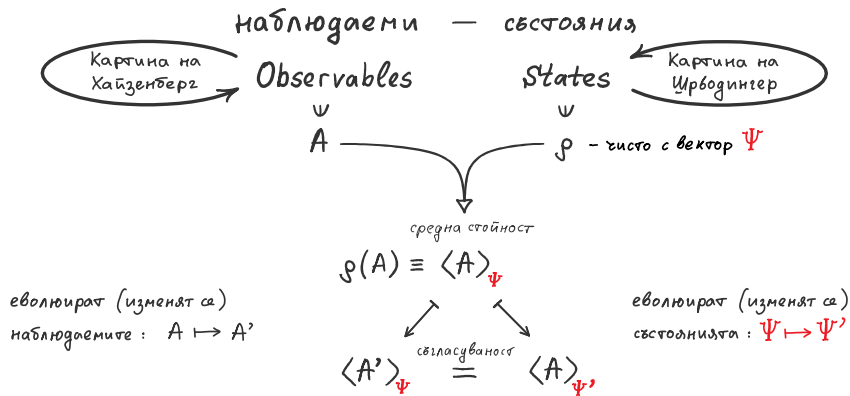
Квантови трансформации



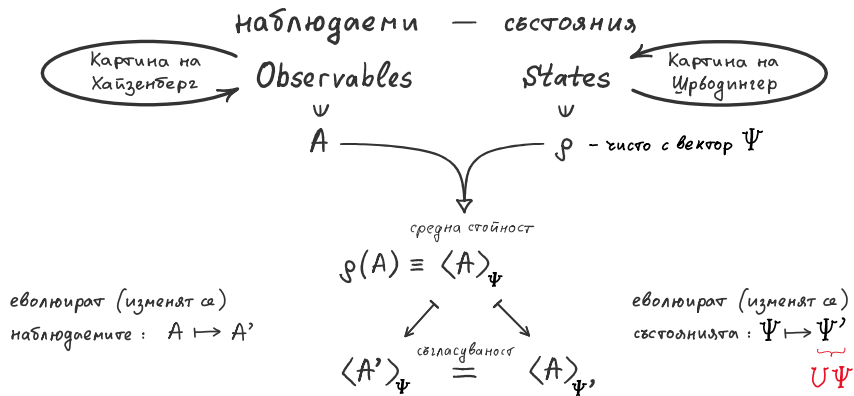
Квантови трансформации



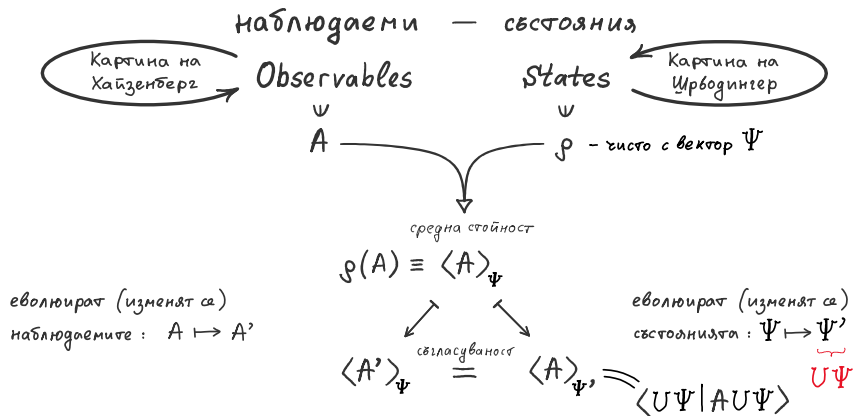
Квантови трансформации



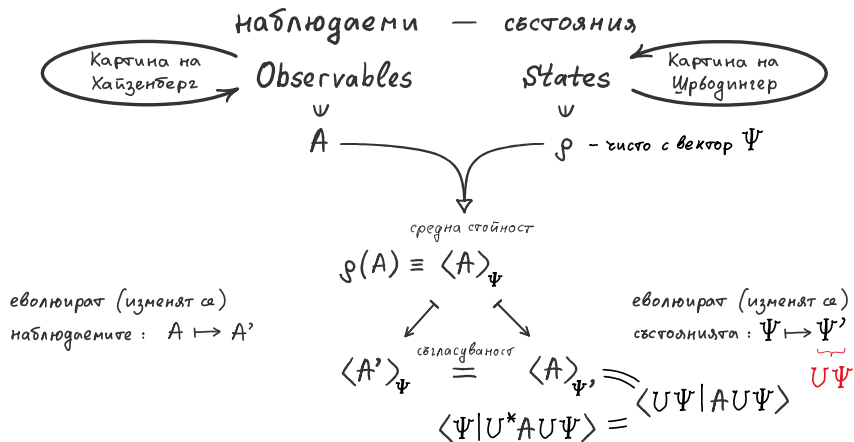
Квантови трансформации



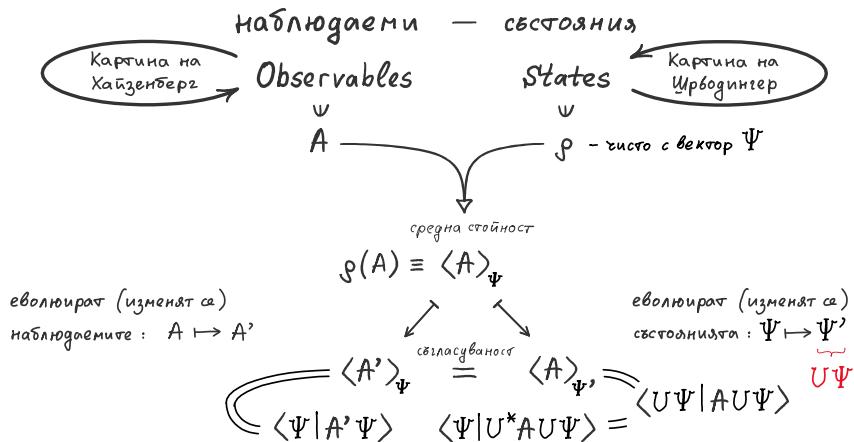
Квантови трансформации



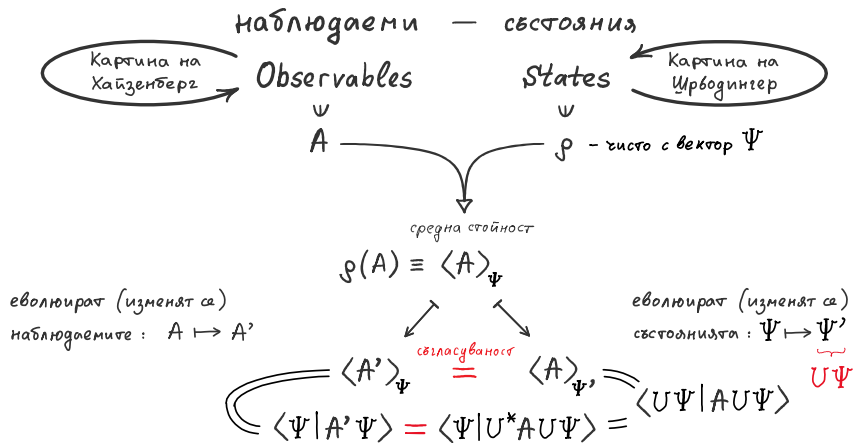
Квантови трансформации



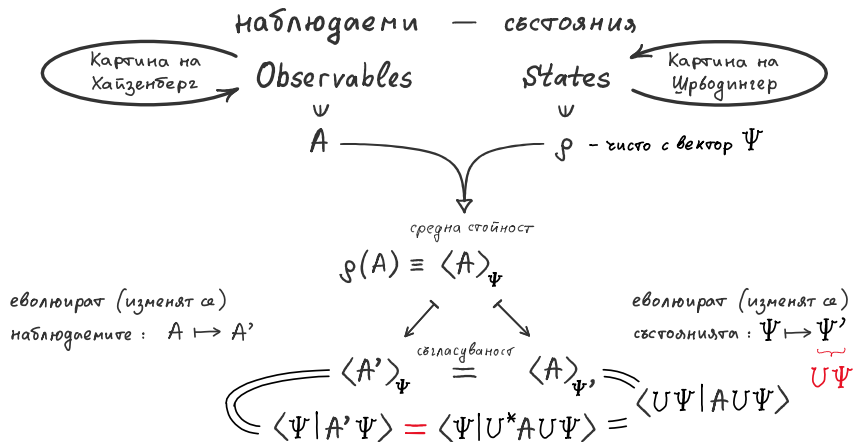
Квантови трансформации



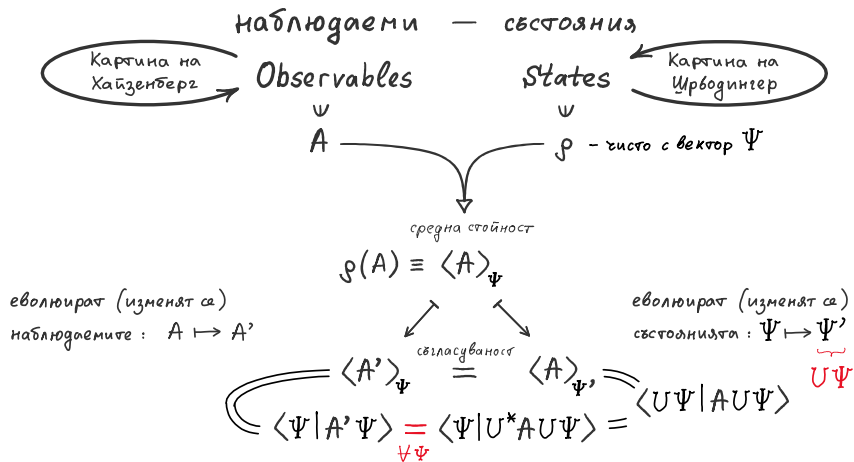
Квантови трансформации



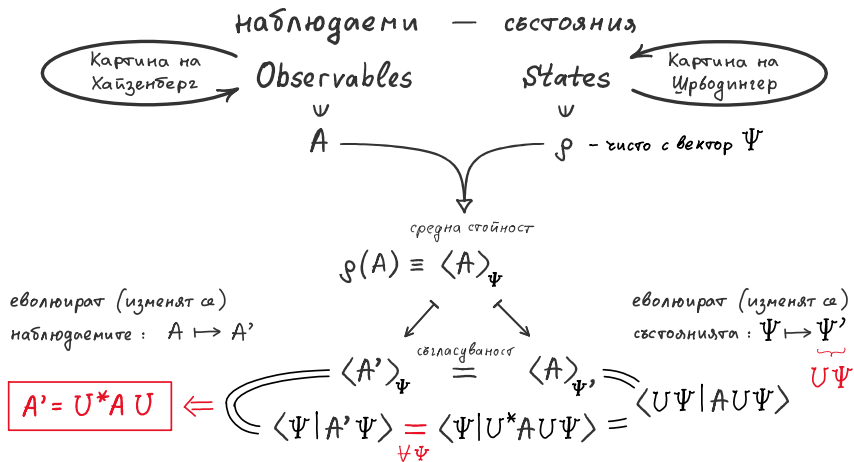
Квантови трансформации



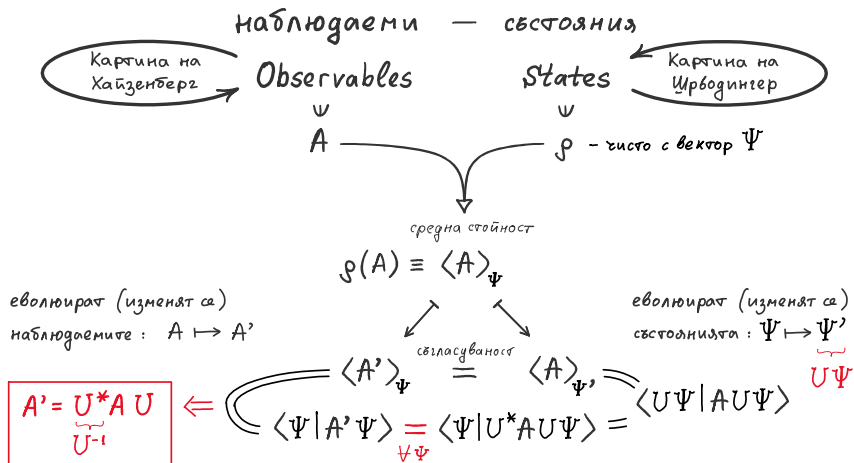
Квантови трансформации



Квантови трансформации



Квантови трансформации



Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойството :

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :
 - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :
 - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$
 - $U^{-1}\hat{I}U = \hat{I}$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :
 - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$
 - $U^{-1}\hat{I}U = \hat{I}$
 - $(U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1*}$

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :
 - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$
 - $U^{-1}\hat{I}U = \hat{I}$
 - $(U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1*}$
- $\Rightarrow$ това е **изоморфизъм** на $*$ -алгебри с единица

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :
 - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$
 - $U^{-1}\hat{I}U = \hat{I}$
 - $(U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1*}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix}} \right\} \Rightarrow$ това е **изоморфизъм** на $*$ -алгебри с единица
- Горният вид **изоморфизми** се наричат "вътрешни" / "inner".

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :
 - $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU)$
 - $U^{-1}\hat{I}U = \hat{I}$
 - $(U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1*}$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \Rightarrow \text{това е изоморфизъм на } * \text{-алгебри с единица}$
- Горният вид изоморфизми се наричат "вътрешни" / "inner".
- Математически резултат: всички $*$ -изоморфизми на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ в себе си са вътрешни.

Квантови трансформации

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Heisenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата :

$$\left. \begin{aligned} & - U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU) \\ & - U^{-1}\hat{I}U = \hat{I} \\ & - (U^{-1}AU)^* = U^*A^*U^{-1*} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{това е изоморфизъм на } * \text{-алгебри с единица}$$
- Горният вид изоморфизми се наричат "вътрешни" / "inner".
- Математически резултат: всички $*$ -изоморфизми на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ в себе си са вътрешни.
- Това показва, че за крайни, чисто квантови системи, двете картини на описание на квантовите трансформации са еквивалентни.