КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 9 / 04.12.2023, версия 1

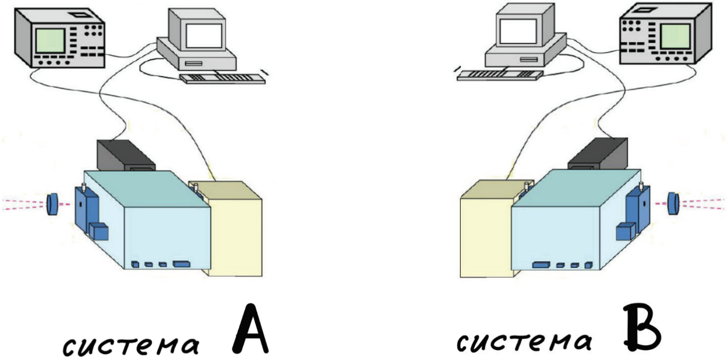
ТЕМИ НА ЛЕКЦИЯТА

- Съставни системи: преговор с алтернативно въведение
- Квантови трансформации: преговор с алтернативно въведение
- Комбиниране на квантови трансформации: НОВО $\downarrow$
- Квантови трансформации: примери и дискусия
- Теория на измерването: аксиоми и следствия
- Теория на измерването: дискусия и парадокси
    - Колапсът на вълновата функция
    - Парадоксът на котката на Шрьодингер
    - Куриозният "бомбен тест" на Елицур - Вайдман
    - "Квантов реализъм" срещу "класически реализъм"

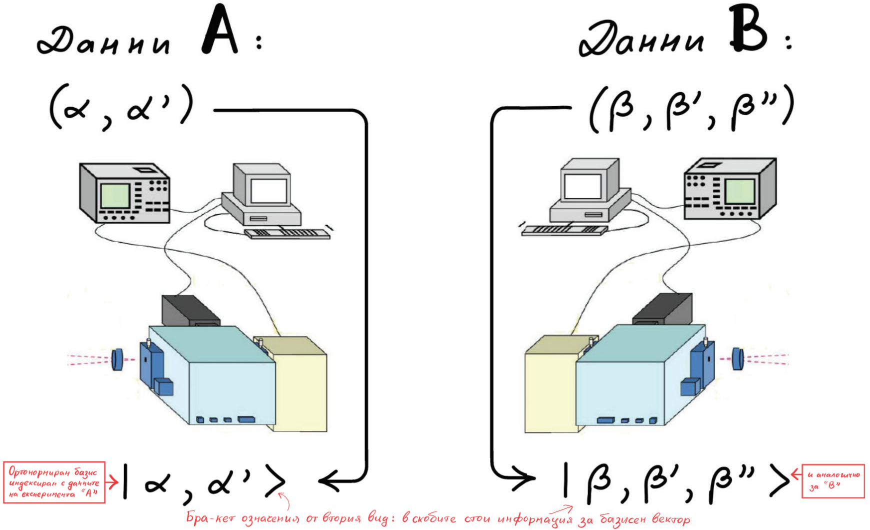
Съставни системи: преговор с алтернативно въведение

Съставни системи: преговор с алтернативно въведение

Съставни системи



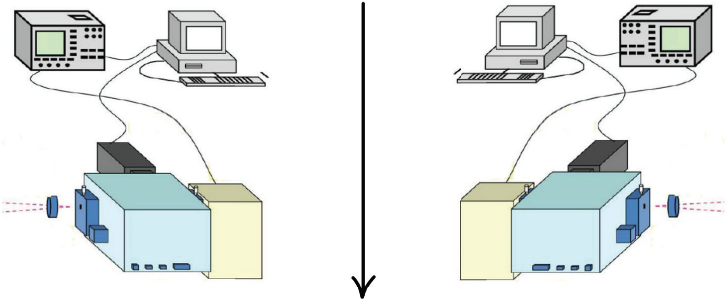
Съставни системи: преговор с алтернативно въведение



Съставни системи: преговор с алтернативно въведение

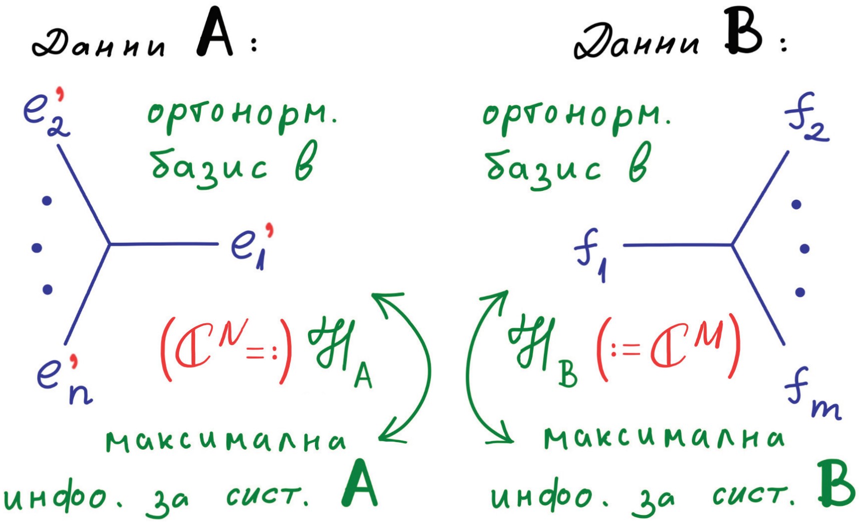
Данни $A \cup B$:

$$(\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta'')$$



$$\boxed{\text{Ортонормиран базис за съставната система "A∪B". Той е индексиран с данните на двата експеримента}} \rightarrow |\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta''\rangle$$

Съставни системи: преговор с алтернативно въведение



Съставни системи: преговор с алтернативно въведение

Дадени $\mathbf{A}$:

произволен ортонорм. базис

$e_j = |e_j\rangle$

в $\mathcal{H}_A$

максимална инфо. за сист. $\mathbf{A}$

Дадени $\mathbf{B}$:

ортонорм. базис

$f_k = |f_k\rangle$

в $\mathcal{H}_B$

максимална инфо. за сист. $\mathbf{B}$

Данни $A \cup B$:

ортонорм. базис

$$|e_j\rangle|f_k\rangle \equiv e_j \otimes f_k$$

алтернативни матем. означения

$$\text{в } \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Хилбертово пространство за $A \cup B$

$\updownarrow$

максимална инфо. за сист. $A \cup B$

$\Longrightarrow$

Необходимо ни е хилб. прост-во на състоянията $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, което е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$u, v \longmapsto u \otimes v .$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$u, v \longmapsto u \otimes v.$$

а) $\forall$ два базиса $\{e_j\} \subset \mathcal{H}_A$ и $\{f_k\} \subset \mathcal{H}_B$ се изобразяват във базис $\{e_j \otimes f_k\}$.

$$\Longrightarrow \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$
$$u, v \longmapsto u \otimes v.$$

= разделна линейност

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes v = \lambda_1 (u_1 \otimes v) + \lambda_2 (u_2 \otimes v)$$
$$u \otimes (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u \otimes v_1) + \lambda_2 (u \otimes v_2)$$

Съставни системи: преговор с алтернативно въведение

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$
$$u, v \longmapsto u \otimes v.$$

= разделна линейност

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

Физиците казват

$\underbrace{\text{„суперпозиция}}_{=\text{ линейна комбинация}} \longmapsto$ суперпозиция"

Конструиране (модел) на тенз. произведение

посредством произведението на Кронекер

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & \cdots & a_{11} b_{1n} & & a_{1\ell} b_{11} & \cdots & a_{1\ell} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} b_{m1} & \cdots & a_{11} b_{mn} & & a_{1\ell} b_{m1} & \cdots & a_{1\ell} b_{mn} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{k1} b_{11} & \cdots & a_{k1} b_{1n} & & a_{k\ell} b_{11} & \cdots & a_{k\ell} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} b_{m1} & \cdots & a_{k1} b_{mn} & & a_{k\ell} b_{m1} & \cdots & a_{k\ell} b_{mn} \end{pmatrix}$$

за: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\ell} \end{pmatrix}$ $k \times \ell$ - матрица и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ - матрица

Конструиране (модел) на тенз. произведение

За $\left.\begin{array}{l}\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N \\ \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M\end{array}\right\}$ линейни пространства от вектор-стълбове

тази конструкция не зависи от избора на базиси

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \; (= \mathcal{H}_{AB}) := \overbrace{\mathbb{C}^{NM}}$$

с операция:
- по Кронекер

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B & \longrightarrow & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v & \longmapsto & u \otimes v \end{array}$$

Основен принцип:

Елементите от вида $u \otimes v \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

– разложими елементи (има и неразложими!)

Тогава, за да се определи (поли) линейно изображение е достатъчно то да се определи коректно за разложими елементи:

(поли) линейно

$$\varphi(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \dots)$$

Неразложимите вектори на състояния в $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ се наричат във физиката

сплетени състояния (entangled states)

Пример: $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{ A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A \}$

$$\mathcal{B} := Op\,\mathcal{H}_B \equiv \{ B : \mathcal{H}_B \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_B \}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ действа върху $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) & \times & (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) & \longrightarrow & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ A \otimes B & , & u \otimes v & \longmapsto & (Au) \otimes (Bv) \end{array}$$

абстрактно определение на тензорно произведение на линейни оператори

Тензорното произведение на лин. оператори може да се представи в матричен вид чрез кронекеровото произведение:

Нека $t = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} t_{j,k}\, e_j \otimes f_k = \begin{pmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{1m} \\ \vdots \\ t_{n1} \\ \vdots \\ t_{nm} \end{pmatrix}$

лексикографска наредба

Тогава имаме съгласуваност: $(A \otimes B)t =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} & \cdots & a_{nn}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{1m} \\ \vdots \\ t_{n1} \\ \vdots \\ t_{nm} \end{vmatrix}$$

Забележете, че ако работим с $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N$ и $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M$, то при модела с тензорно произведение на Кронекер тензорните произведения на векторите от стандартните базиси $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ са отново от стандартния базис на $\mathbb{C}^{NM}$, при това, в лексикографски ред.

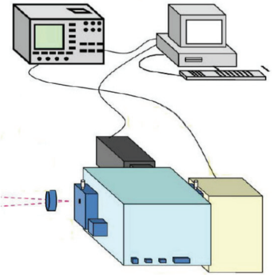
Това е всъщност и характеризация на модела на тензорно произведение на Кронекер.

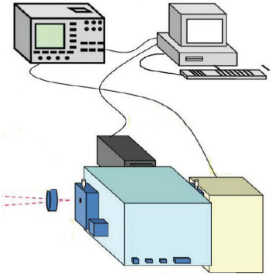
Квантови трансформации: преговор с алтернативно въведение

Картина на Шрьодингер: трансформират се състоянията

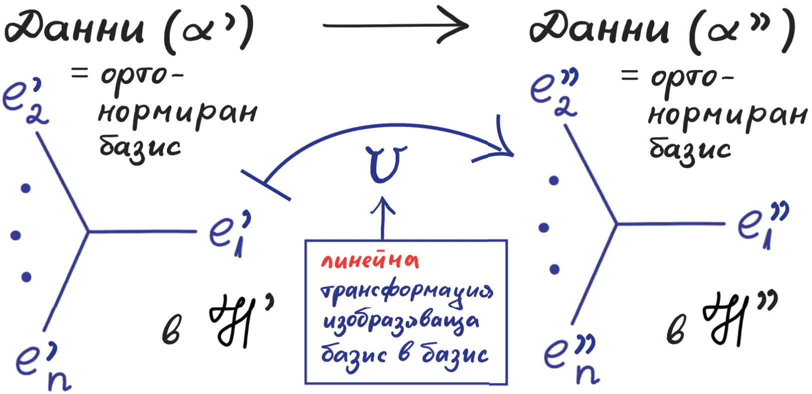
Квантовата трансформация моделира трансформация на данни (експериментални!) за квантова система

Данни (α') $\longrightarrow$ Данни (α'')





Квантовата трансформация моделира трансформация на данни (експериментални!) за квантова система



<u>Теорема</u> (Сведение от линейната алгебра)

а) Ако $U: \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}''$ е линейно изображение, което изобразява един ортонормиран базис отново в ортонормиран базис, то U е изоморфизъм на хилбертови пространства (т.е., линейна биекция, която запазва скаларните произведения).

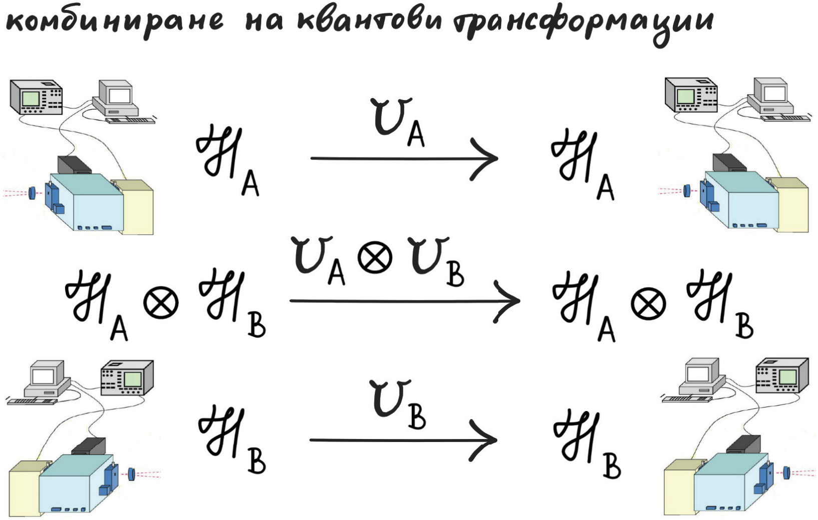
<u>Теорема</u> (Сведение от линейната алгебра)

б) Ако $U : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ е отново линейно изображение, което изобразява един ортонормиран базис отново в ортонормиран базис, то U се задава от унитарна матрица,

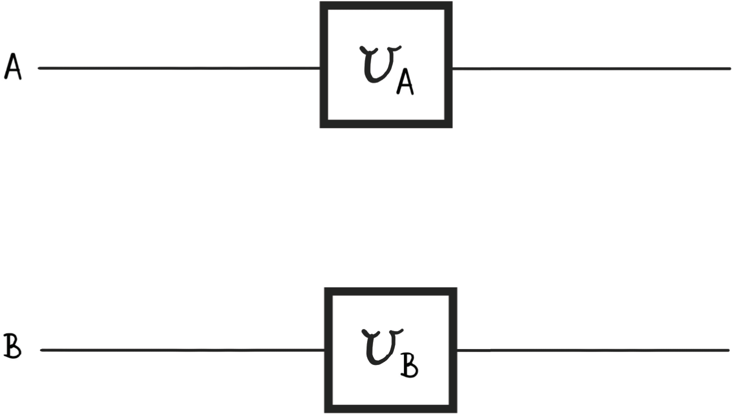
т.е., $$\boxed{U^* = U^{-1}}$$

Вярно е и твърдението в обратната посока.

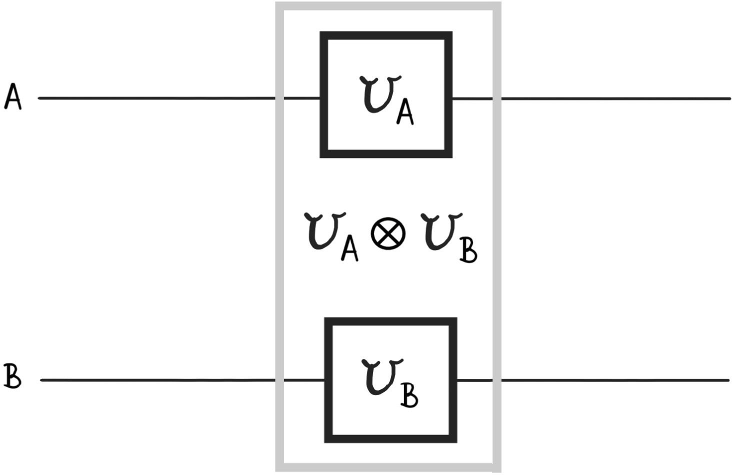
Комбиниране на квантови трансформации: НОВО


комбиниране на квантови трансформации
$\mathcal{H}_A \xrightarrow{U_A} \mathcal{H}_A$
$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \xrightarrow{U_A \otimes U_B} \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
$\mathcal{H}_B \xrightarrow{U_B} \mathcal{H}_B$

означение с квантова верига (quantum circuit)

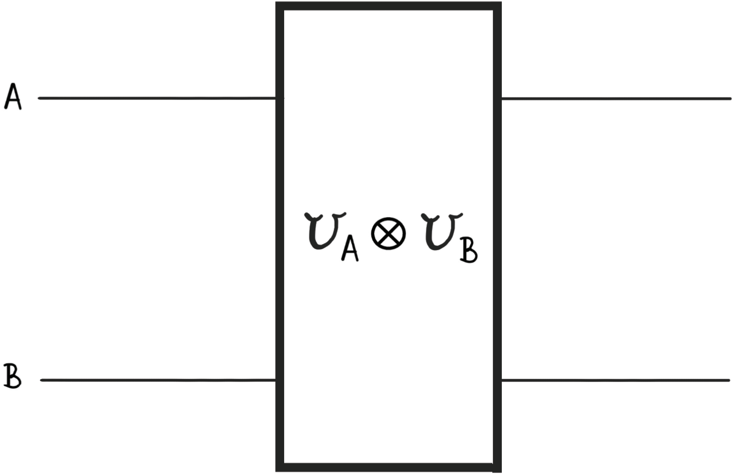


означение с квантова верига (quantum circuit)



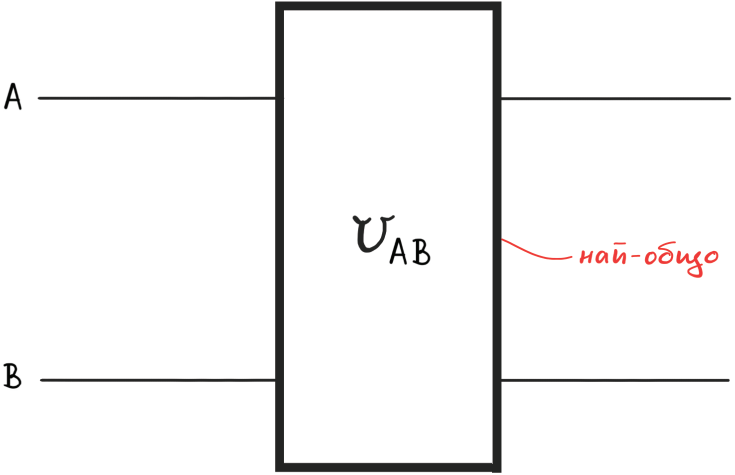
Комбиниране на квантови трансформации: НОВО

означение с квантова верига (quantum circuit)



Комбиниране на квантови трансформации: НОВО

означение с квантова верига (quantum circuit)



Квантови трансформации: примери и дискусия

Унитарни матрици и ортонормирани базиси

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar u_{11} & \bar u_{21} & \bar u_{31} & \cdots & \bar u_{n1} \\ \bar u_{12} & \bar u_{22} & \bar u_{32} & \cdots & \bar u_{n2} \\ \bar u_{13} & \bar u_{23} & \bar u_{33} & \cdots & \bar u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar u_{1n} & \bar u_{2n} & \bar u_{3n} & \cdots & \bar u_{nn} \end{pmatrix}}_{U^*} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{1}}$$

$$e_j \overset{U}{\longmapsto} u_j$$

$$u_{\bullet 1} \quad u_{\bullet 2} \quad u_{\bullet 3} \quad \cdots \quad u_{\bullet n}$$

U е унитарна $\iff$ колоните (или редовете) са ортонормиран базис

$$U^* U = \hat{1}$$

$$\iff \langle u_j | u_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

$$U U^* = \hat{1}$$

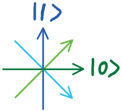
$$\iff |u_1\rangle\langle u_1| + \cdots + |u_n\rangle\langle u_n| = \hat{1}$$

Унитарни матрици и ортонормирани базиси

– пример 1.: гейт на Адамар / Hadamard gate

$$H := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} e_0 \equiv |0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{H}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ e_1 \equiv |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{H}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{matrix}\right\} \text{———} \boxed{H} \text{———} \left\{\begin{matrix} 2^{-1/2}|0\rangle + 2^{-1/2}|1\rangle \\ 2^{-1/2}|0\rangle - 2^{-1/2}|1\rangle \end{matrix}\right.$$



– пример 2: Ротация на ъгъл α :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

В заключение:

Обръщаме внимание, че
КВАНТОВИТЕ ТРАНСФОРМАЦИИ СА ВИНАГИ ОБРАТИМИ!

Няма задоволителна и общоприета теория за прозволни квантови квантови трансформации.

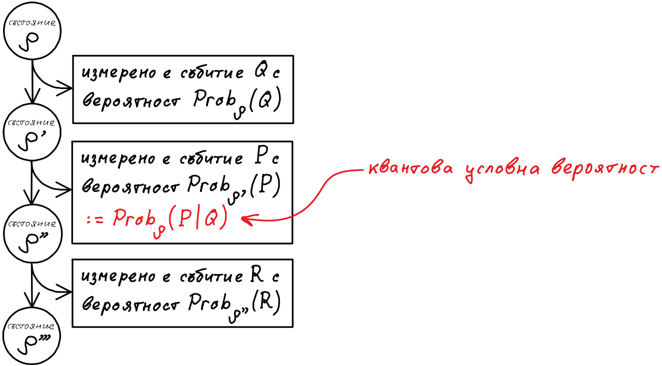
Обратимостта на квантовите трансформации при квантовите изчисления е аналог на т.нар. ОБРАТИМИ ИЗЧИСЛЕНИЯ.

en.wikipedia.org/wiki/Reversible_computing

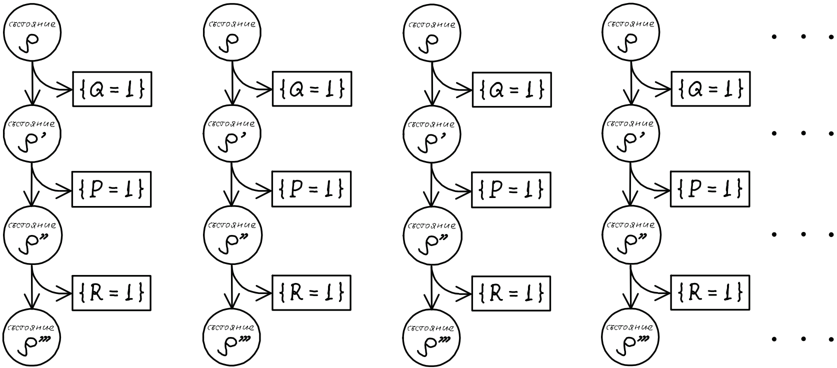
Теория на измерването: аксиоми и следствия

В тази част на презентацията, в **зелен цвят** са поставени части, които се считат извън материала на курса и са предназначени за читатели с допълнителен интерес към теоретичните основи на областта.

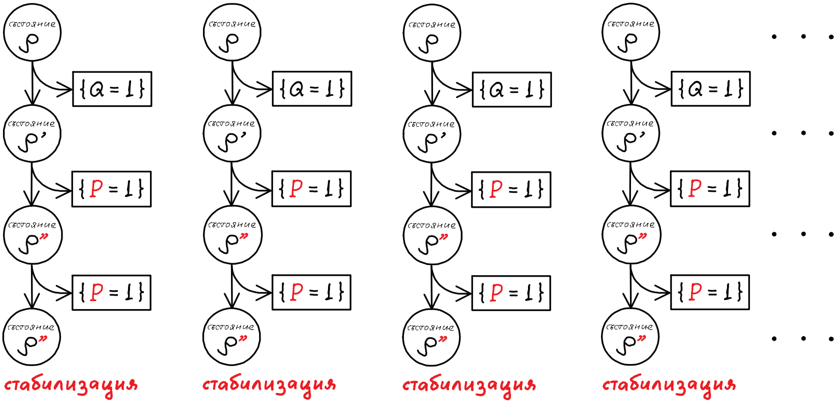
Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$



Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$



Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$



Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Коректност: ρ' е състояние — наистина,

понеже алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$ се поражда линейно от събитията P

(поради спектралната теорема), то: $\rho'(A) = \dfrac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$ — като линеен функционал $\rho' : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.

Освен това, този линеен функционал е

нормиран: $\rho'(\hat{1}) = \dfrac{\rho(Q\hat{1}Q)}{\rho(Q)} = \dfrac{\rho(Q^2)}{\rho(Q)} = 1$

и положителен: $\rho'(A^*A) = \dfrac{\rho(QA^*AQ)}{\rho(Q)} = \dfrac{\rho((AQ)^*AQ)}{\rho(Q)} \geq 0$. $\square$

Теория на измерването: аксиоми и следствия

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho (P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 1.: за $\forall A \in \mathcal{A}$, $\rho'(A) = \dfrac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 2.: Ако ρ е състояние с матрица на плътността $\hat{\rho}$, то след настъпване на Q матрицата на плътността става: $\hat{\rho}' = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q\hat{\rho}Q$

Наистина: за $\forall A \in \mathcal{A}$ имаме $\rho'(A) \equiv \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}' A = \dfrac{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}QAQ}{\rho(Q)} = \dfrac{\mathrm{Tr}\,Q\hat{\rho}QA}{\rho(Q)}$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\left(\hat{\rho}' - \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q\hat{\rho}Q\right)A\right) = 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$. Полагайки $A = |\Psi\rangle\langle\Phi|$, то за $\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ имаме $\langle\Phi|\underbrace{\left(\hat{\rho}' - \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q\hat{\rho}Q\right)}_{\Rightarrow\, 0}|\Psi\rangle = 0$. $\square$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 3.: ако ρ е чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ (единичен), то състоянието ρ' след настъпване на Q е отново чисто и има вектор $\Phi = \dfrac{1}{\|Q\Psi\|} \underbrace{Q\Psi}$

векторът на състояние се проектира ортогонално след измерване

Наистина: ако $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, то $\hat{\rho}' = const \cdot Q|\Psi\rangle\langle\Psi|Q = const . |Q\Psi\rangle\langle Q\Psi|$.

$\Rightarrow$ ρ' също е чисто и има вектор Φ, пропорционален на $Q\Psi$. $\Box$

Забележете: $\|Q\Psi\|^2 = \mathrm{Prob}_\rho(Q)$ (от лекция 7) и $\Rightarrow$ ако Q настъпва в ρ, то $\|Q\Psi\| \neq 0$.

Теория на измерването: аксиоми и следствия

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xmapsto[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \ \left(\equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Забележете: в класически системи имаме $PQ = QP = P$ и Q. Затова: $\|$

формулата на Бейс / Bayes $\leftarrow$ $\mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q) = \dfrac{\mathrm{Prob}_{\rho}(P \text{ и } Q)}{\mathrm{Prob}_{\rho}(Q)} \equiv \dfrac{\rho(QP)}{\rho(Q)}$

Закон на Бейс:

$$\mathrm{Prob}_{\rho}(P \text{ и } Q) = \mathrm{Prob}_{\rho}(Q) . \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q)$$

$$= \mathrm{Prob}_{\rho}(Q \text{ и } P) = \mathrm{Prob}_{\rho}(P) . \mathrm{Prob}_{\rho}(Q|P)$$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xmapsto[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Теорема. Нека положим $\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ след } Q) := \mathrm{Prob}_\rho(Q) . \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)$

Тогава: $\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ след } Q) = \mathrm{Prob}_\rho(Q \text{ след } P)$ $(\forall \rho - \text{сст.})$ $\Longleftrightarrow$ $PQ = QP$

В този случай: $\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ и } Q)$

т.е., независимостта от реда на измерване е $\Longleftrightarrow$ комотируемост, т.е., на съвместна измеримост

Доказателство. L.H.S.: $\rho(PQP) = \rho(QPQ)$ $(\forall \rho - \text{състояние})$.

$\Rightarrow PQP = QPQ$. $\Rightarrow (PQ - QP)^2 = \underbrace{PQPQ}_{QPQ} + \underbrace{QPQP}_{PQP} - P\underbrace{QQ}_{Q}P - Q\underbrace{PP}_{P}Q = 0$. $\square$

Теория на измерването: аксиоми и следствия

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xmapsto{\{Q=1\}} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P)\ \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Теорема. $PQ = QP$ ← $\boxed{\text{събитията } P \text{ и } Q \text{ комутират, т.е. са съвместно измерими}}$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & \rho' \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"] & \\ \rho \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"'] & & \rho'' \\ & \rho'_1 \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"'] & \end{tikzcd}$$

– за всяко състояние ρ.

Доказателство.

R.H.S: $\hat\rho'' = \dfrac{P\hat\rho' P}{\mathrm{Tr}(\hat\rho' P)} = \dfrac{PQ\hat\rho QP}{\mathrm{Tr}(\hat\rho QPQ)} \overset{\text{от друга страна}}{=} \dfrac{QP\hat\rho PQ}{\mathrm{Tr}(\hat\rho PQP)}$

($\forall \hat\rho$ - матрица на плътността)

за $\boxed{\mathrm{Tr}\, Q\cdot}$

$\mathrm{Tr}(\hat\rho QPQPQ) = \mathrm{Tr}(\hat\rho QPQ)$ $(\forall \hat\rho)$.

$\Longrightarrow$ QPQ е събитие.

$(QP - QPQ)\underbrace{(PQ - QPQ)}_{=0} = 0$

$PQ = (PQ)^* = QP$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Мотивация: проекционният постулат може да се изведе от следните по-прости принципи

- Принцип за стабилизация: ако след измерване на събитие Q в състояние ρ се е установило състояние ρ' и ако тогава измерим Q в ρ', то Q ще настъпи в ρ' с вероятност 1 и състоянието повече няма да се промени (т.е., ще остане ρ').
- Принцип за "потвърждение": ако Q настъпва в състояние ρ вероятност 1, то след настъпване на Q състоянието остава същото.

  (в тази връзка е и т.нар. "квантов ефект на Зенон": https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Zeno_effect)
- Принцип на "смесване": ако $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ и имаме $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'$, $\rho_j \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho_j'$,

  за $j=1,2$, то $\mathrm{Prob}_{\rho'}(P \text{ след } Q) = q_1\, \mathrm{Prob}_{\rho_1'}(P \text{ след } Q) + q_2\, \mathrm{Prob}_{\rho_2'}(P \text{ след } Q)$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xmapsto[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \; (\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 1.: за $\forall A \in \mathcal{A}$, $\rho'(A) = \dfrac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 2.: Ако ρ е състояние с матрица на плътността $\hat{\rho}$, то след настъпване на Q матрицата на плътността става: $\hat{\rho}' = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho} Q)} Q \hat{\rho} Q$

Следствие 3.: Ако ρ е чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ (единичен), то състоянието ρ' след настъпване на Q е отново чисто и има вектор $\Phi = \dfrac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi$

Теорема.

$$PQ = QP \iff \begin{tikzcd} & \rho' \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"] & \\ \rho \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"'] & & \rho'' \\ & \rho'_1 \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"'] & \end{tikzcd} \; (\forall \rho) \iff \begin{aligned} &\mathrm{Prob}_\rho(Q) . \mathrm{Prob}_\rho(P|Q) \\ &= \mathrm{Prob}_\rho(P) . \mathrm{Prob}_\rho(Q|P) \quad (\forall \rho) \end{aligned}$$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q) \right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие

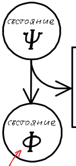
Нека A е наблюдаема със спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_m Q_m$, ако при измерване на A в чисто състояние с вектор Ψ е измерена стойност α_k, то системата преминава отново в чисто състояние с вектор $\Phi = \dfrac{1}{\|Q_k \Psi\|} Q_k \Psi$, който е собствен вектор за A със собствена стойност α_k

Теория на измерването: аксиоми и следствия

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xmapsto[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P)\ \left(\equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Преход между състояния и вероятност за преход: допълнителна интерпретация



измерено е **елементарно** събитие $Q = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, съответстващо на вектор Φ с вероятност $p_{\Psi\mapsto\Phi}$

Векторът на състоянието след измерването:

$$\frac{1}{\|Q\Psi\|}Q\Psi = \frac{1}{|\langle\Psi|\Phi\rangle|^2}\,|\Phi\rangle\langle\Phi|\Psi\rangle = \overbrace{\boxed{\frac{\overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}}{\langle\Psi|\Phi\rangle}}}^{e^{i\varphi}}\,|\Phi\rangle$$

Нека: $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ - единични

$$\underbrace{p_{\Psi\mapsto\Phi}}_{\text{вероятност за преход}} = \big|\underbrace{\langle\Psi|\Phi\rangle}_{a_{\Psi\mapsto\Phi}}\big|^2$$

амплитуда на прехода

$$\mathrm{Prob}_{\Psi}(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = \langle\Psi|\Phi\rangle\underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}}$$

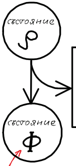
Теория на измерването: аксиоми и следствия

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P)\ \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Наблюдение: след настъпване на елементарно събитие винаги се установява чисто състояние

Нека: $\Phi \in \mathbb{C}^n$ - единичен



измерено е елементарно събитие $Q = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, съответстващо на вектор Φ

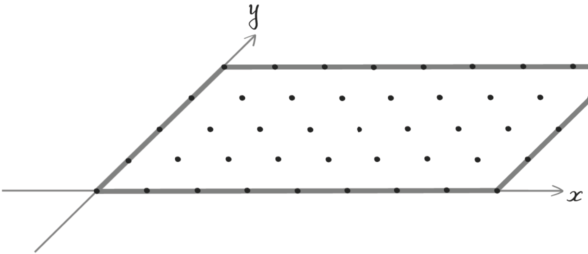
състоянието след измерването:

$$\hat\rho' = \frac{Q\hat\rho Q}{\mathrm{Tr}(\hat\rho Q)} = \frac{|\Phi\rangle\cancel{\langle\Phi|\hat\rho|\Phi\rangle}\langle\Phi|}{\cancel{\mathrm{Tr}(\hat\rho|\Phi\rangle\langle\Phi|)}} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$$

матрица на плътността на чисто състояние с вектор Φ

Теория на измерването: дискусия и парадокси

Колапсът на вълновата функция

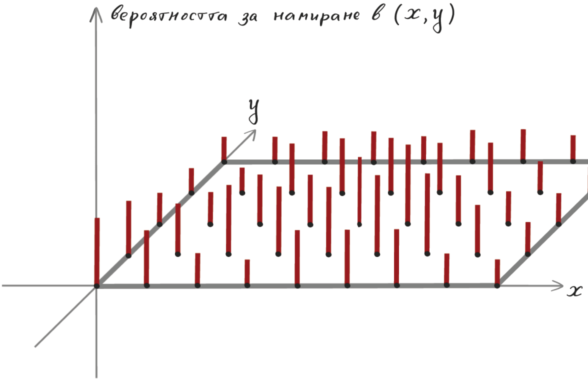


Разглеждаме частица в равнина.

За постигане на крайно описание, първо се ограничаваме в крайна област.

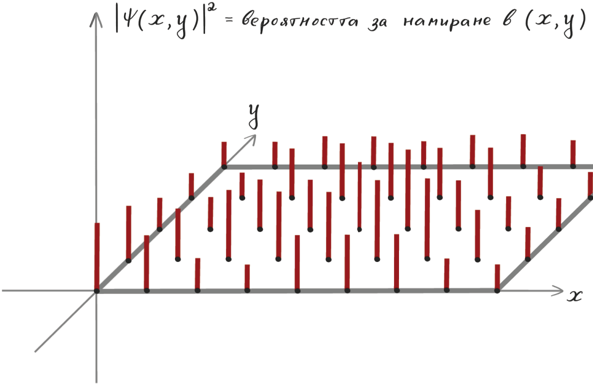
И второ, минаваме върху решетка (като върху монитор на компютър).

Колапсът на вълновата функция



Чатицата може да се намери с определени вероятности в отделните точки на пространството (в случая – на решетката).

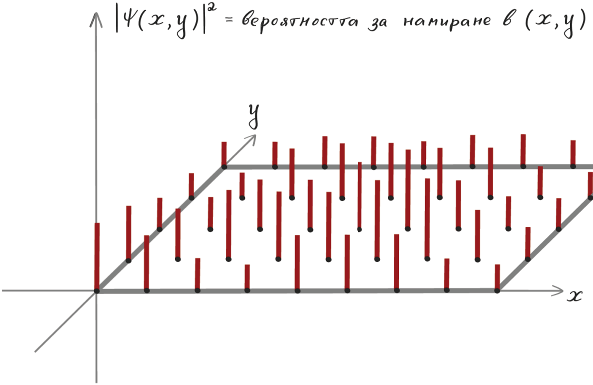
Колапсът на вълновата функция



Чатицата може да се намери с определени вероятности в отделните точки на пространството (в случая – на решетката).

Тези вероятности се определят от вектора на състояние Ψ на частицата.

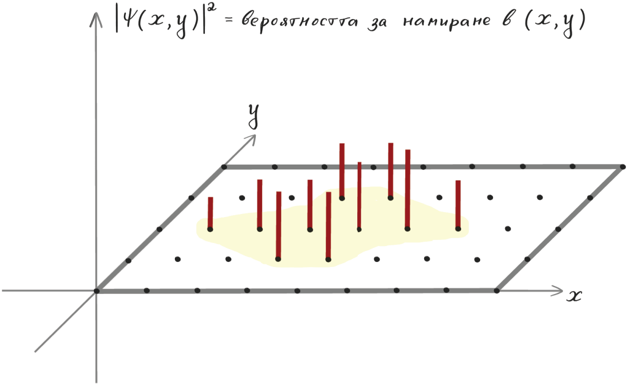
Колапсът на вълновата функция



Векторът на състоянието може да се запише, като "вълнова функция"

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(0,0) \\ \vdots \\ \psi(0,M) \\ \vdots \\ \psi(x,y) \\ \vdots \\ \psi(N,0) \\ \vdots \\ \psi(N,M) \end{pmatrix}$$

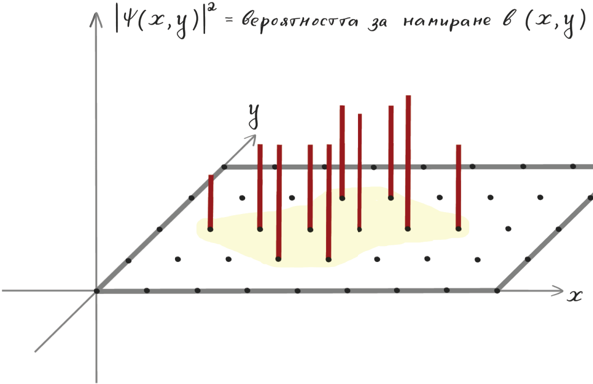
Колапсът на вълновата функция



При измерване, векторът на състоянието първо се проектира

$$\Pi\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \psi(x,y) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

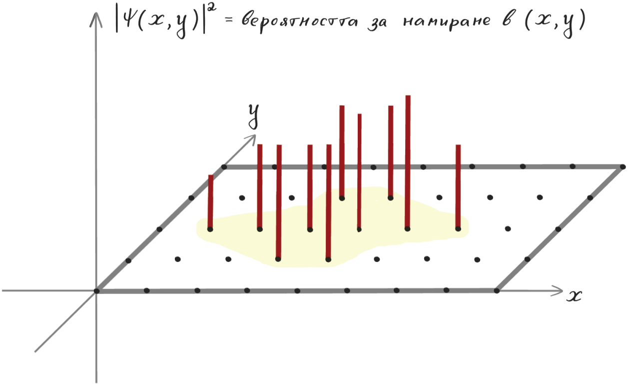
Колапсът на вълновата функция



След това се нормира

$$\frac{1}{\|\Pi\Psi\|}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \psi(x,y) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Колапсът е къде: в нас или извън нас?



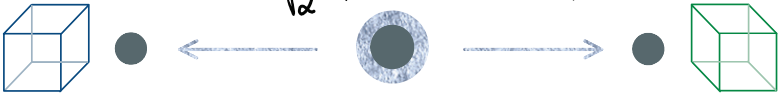
Измерване в сплетено състояние

Ψ в предходна презентация

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1\right)$$

"X"- тест

"Y"- тест



$$X_{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{X} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Y_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e_0 \otimes e_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{f_0}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \otimes f_0$$

Но:

$$e_0 \neq f_0$$

Измерване в сплетено състояние

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_0 \otimes e_0 \arrow[dr, mapsto, "\{Y_{(2)} = 1\}"] & \\
\Theta \arrow[ur, mapsto, "\{X_{(1)} = 1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{Y_{(2)} = 1\}"'] & & \frac{1}{2}\, e_0 \otimes f_0 \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, f_0 \otimes f_0 \arrow[ur, mapsto, "\{X_{(1)} = 1\}"'] &
\end{tikzcd}$$

Понеже:

$$X_{(1)}\, Y_{(2)} = Y_{(2)}\, X_{(1)}$$

$$(= X \otimes Y)$$

(въпреки, че $XY \neq YX$)

$\rightarrow$ възстановява се „противоречието“

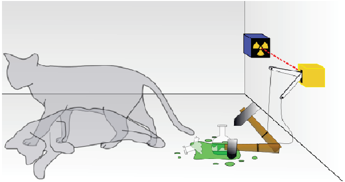
припомняне

Теорема.

$$PQ = QP \iff \begin{tikzcd}
 & \rho' \arrow[dr, mapsto, "\{P = 1\}"] & \\
\rho \arrow[ur, mapsto, "\{Q = 1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{P = 1\}"'] & & \rho'' \\
 & \rho'_1 \arrow[ur, mapsto, "\{Q = 1\}"'] &
\end{tikzcd} \quad (\forall \rho) \iff \begin{aligned} & \mathrm{Prob}_\rho(Q) . \mathrm{Prob}_\rho(P|Q) \\ & = \mathrm{Prob}_\rho(P) . \mathrm{Prob}_\rho(Q|P) \end{aligned} \quad (\forall \rho)$$

Котката на Шрьодингер https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger's_cat

Erwin Schrödinger
1887 – 1961



$|dead\rangle + |alive\rangle$

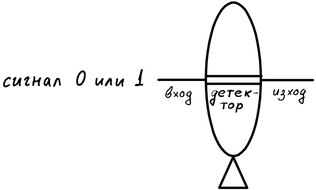
– сплитане между микро и макро-системи ?

Теория на измерването: дискусия и парадокси “бомбен тест”

"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман

https://en.wikipedia.org/wiki/Elitzur–Vaidman_bomb_tester

а) Предположения: разполагаме с бомби, задействани с детектори. Една част са със здрави детектори, а другата – с повредени.

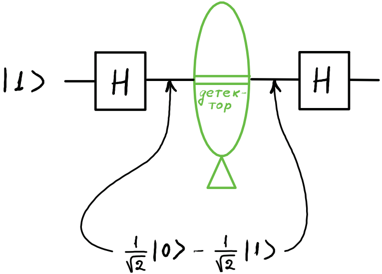


- а) при здрава бомба (детектор) се извършва измерване: при резултат 1 – задейства се
- б) при повредена бомба (детектор) считаме, че сигнала не се повлиява, т.е., все едно че няма детектор (вход ≡ изход).

б) Задачата е да тестваме бомбите (детекторите) без да ги задействаме.

“Бомбен” тест на Елицур-Вайдман – квантово решение I

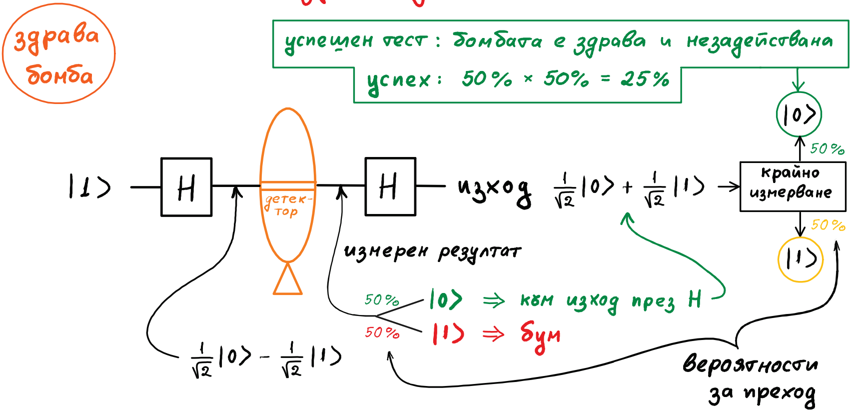
повредена бомба



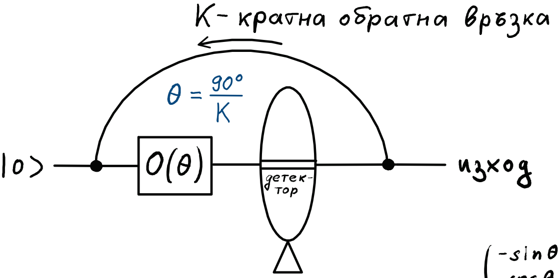
изход ≡ вход ≡ $|1\rangle$

понеже $H^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)^2 = \hat{1}$

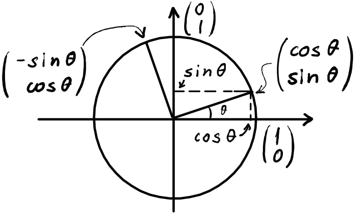
“Бомбен” тест на Елицур-Вайдман – квантово решение I



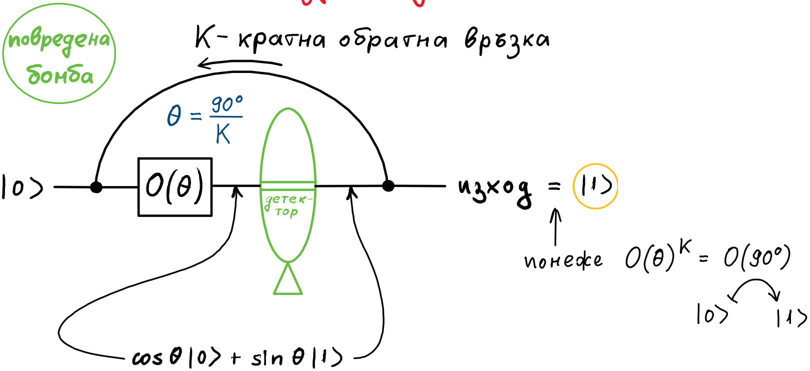
"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



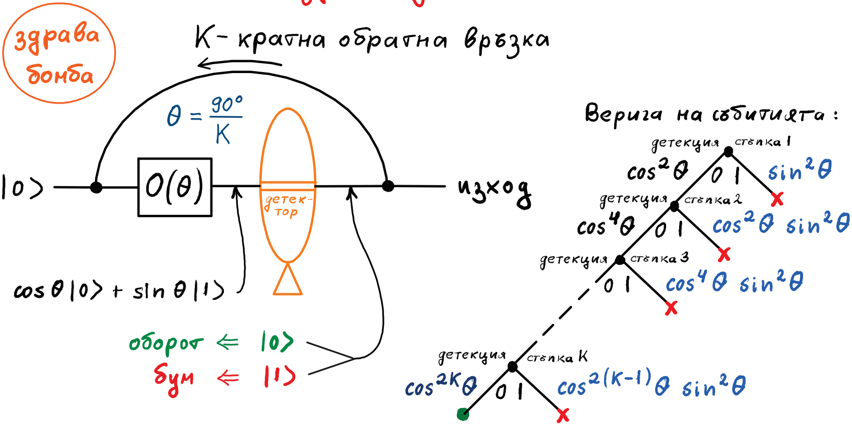
$$O(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



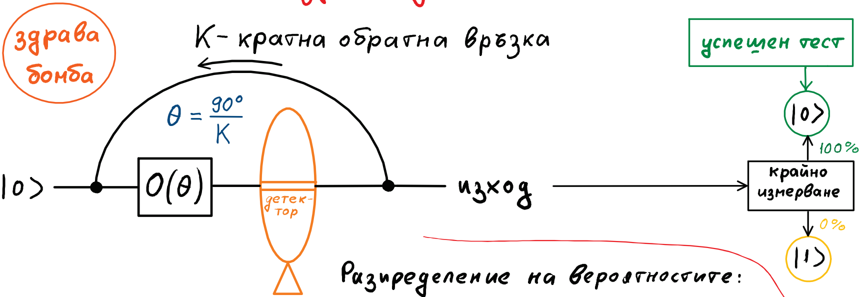
"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



Разпределение на вероятностите:

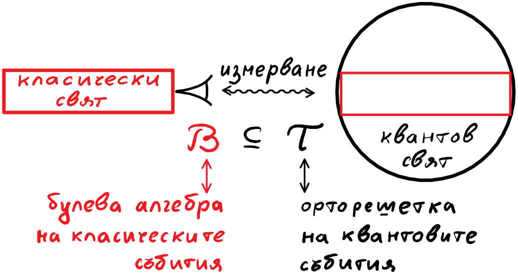
$$\underbrace{\cos^{2K}\theta}_{\text{не се задейства и изхода е 0}} + \underbrace{\cos^{2(K-1)}\theta\,\sin^2\theta + \dots + \cos^4\theta\,\sin^2\theta + \sin^2\theta}_{\text{задейства се}} = 1$$

с вероятност $1-\cos^{2K}\theta$

$\equiv 1-\cos^{2K}\frac{\pi}{2K} \approx \frac{\pi^2}{4K} \to 0$ при $K\to\infty$

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"

Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"

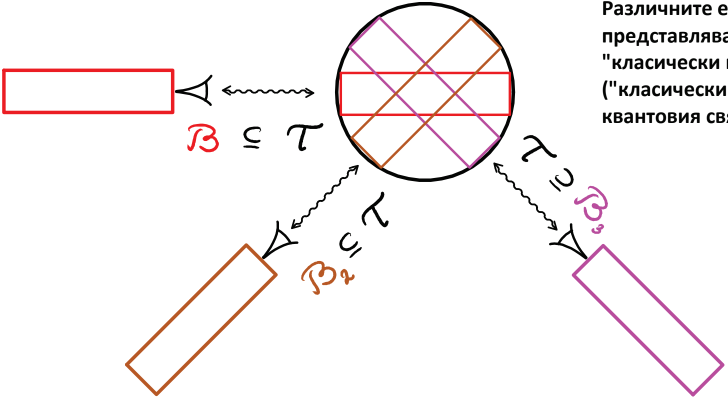


Това става посредством понятието "наблюдаема" и аксиомата за измерването на наблюдаеми (проекционния постулат).

В класическата физика измерването е "безобидно".

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"

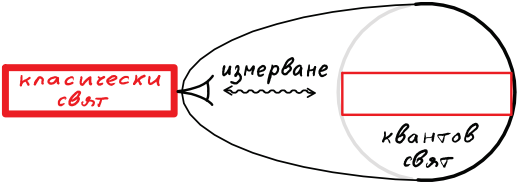
Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"



Различните експерименти представляват различни "класически гледни точки" ("класически рамки") към квантовия свят.

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"

Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"

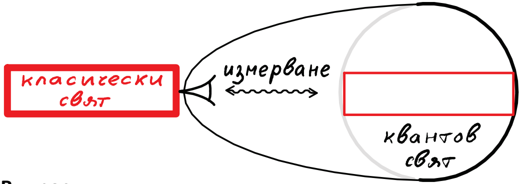


Можем да присъединим към квантовото описание и измервателния прибор, както и самия измервателен процес.

Винаги обаче ще остане класическата "проекция", в която отчитаме резултата от измерването.

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"

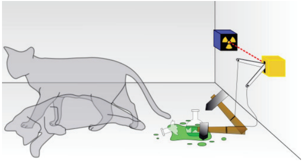
Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"



Класическата "проекция", в която отчитаме резултата от измерването винаги остава.

Въпрос:

а нужно ли е въобще да се въвежда "измерване"?

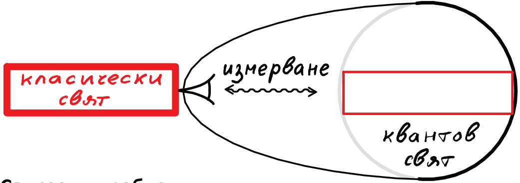


По принцип, това е финален етап в квантово-теоретичното описание, след което то се "рестартира" съгласно проекционния постулат.

Ако го няма обаче получаваме парадокси, като този с котката на Шрьодингер", която е в чисто състояние на суперпозиция на "жива" и "умряла".

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"

Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"



Класическата "проекция", в която отчитаме резултата от измерването винаги остава.

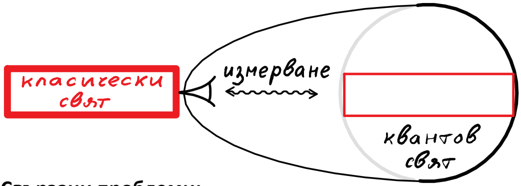
Свързани проблеми:

1. **В "квантовата космология": в затворените системи, като вселената - като цяло, няма външен наблюдател.**

   Днес обаче наблюдаваме класически макро-обекти.
   Как е станала "проекцията"?

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"

Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"



Класическата "проекция", в която отчитаме резултата от измерването винаги остава.

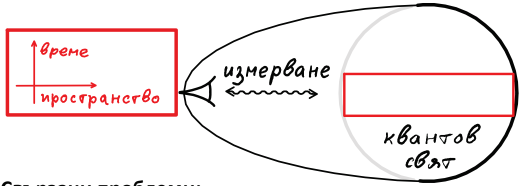
Свързани проблеми:

1. В "квантовата космология": в затворените системи, като вселената - като цяло, няма външен наблюдател.

Днес обаче наблюдаваме класически макро-обекти. Как е станала "проекцията"?

В случая, цялата вселена се оказва в положението на "котката на Шрьодингер"

"КВАНТОВ РЕАЛИЗЪМ" срещу "КЛАСИЧЕСКИ РЕАЛИЗЪМ"
Основната отличителна черта на квантовата теория е, че въвежда "наблюдател"



Класическата "проекция", в която отчитаме резултата от измерването винаги остава.

Свързани проблеми:

2. Квантовата гравитация:
постигането на такава теория изисква пространството и времето да се потопят в "квантовия свят".

Времето и пространството обаче са неотменна част и на "класическия свят".

И все пак, за да стигнем до условията на "квантова гравитация" ние трябва да постигнем енергии от порядъка на около 10^{15} пъти по-големи от най-високите енергии достъпни на човека.