

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 11 / 18.12.2023, версия 0

В тази лекция ще представим квантов алгоритъм.

Това ще бъде първо въвеждане на това [↑] понятие
върху пример.

В следващата лекция ще дадем общи определения:
варианти и дискусия.

В тази лекция ще представим квантов алгоритъм за следната задача:

Нека $f: \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ е такава, че съществува $P \in \{1, 2, \dots, N\}$, $N := 2^n$, така че

- $f(X + P) = f(X)$ - периодичност с период P
- $f: \{0, 1, 2, \dots, P-1\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1, 2, \dots, P-1\}$ е биекция.

Квантов алгоритъм за следната задача:

Нека $f: \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ е такава, че съществува $P \in \{1, 2, \dots, N_0\}$, $N_0 := 2^{n_0}$, така че

- $f(X + P) = f(X)$ - периодичност с период P
- $f: \{0, 1, 2, \dots, P-1\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1, 2, \dots, P-1\}$ е биекция.

Търси се P .

Считаме, че f ни е зададена като "черна кутия",

$$n_0 \text{ бита } \left\{ \overline{X} \boxed{f} \overline{X'} = f(X) \right.$$

която "бързо" изчислява $f(X)$ (т.е., за време $\sim$ полином на n_0)

Бихме могли да започнем да смятаме:

$$F := f(0), f(1), \dots, F = f(P) \text{ до първото повторение}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}} = \underbrace{\hspace{10em}}$$

Считаме, че f ни е зададена като "черна кутия",

$$n_0 \text{ бита } \{ \overline{X} \boxed{f} \overline{X'} = f(X) \}$$

$\Rightarrow$ търсенето ще продължи за време $\sim P \sim 2^{n_0}$

-експоненциално време спрямо броя битовете n_0 на резултата

За сравнение:  един електрон би направил $\sim 2^{150}$ обиколки във водородния атом за предполагаемото време на фивот на вселената

Считаме, че f ни е зададена като "черна кутия",

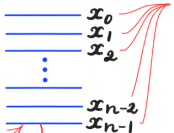
$$n_0 \text{ бита } \left\{ \overline{X} \boxed{f} \overline{X'} = f(X) \right.$$

$\Rightarrow$ търсенето ще продължи за време $\sim P \sim 2^{n_0}$

-експоненциално време спрямо броя битовете n_0 на резултата

Квантовият алгоритъм ще даде време $\sim$ полином от n_0 ,
(това ще дойде от вградената в алгоритъма Фурие-трансформация)

Данните се задават и четат във формата на



$\in \{0,1\}$
битове $\rightarrow$ задаващи двоично число

$$X := x_0 + x_1 2^1 + \dots + x_{n-1} 2^{n-1}$$

всяка линия ще означава бит

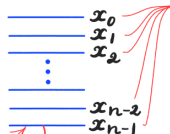
Ако това са класически битове, то състоянието им е

$\rightarrow (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^{x_n}$ - n -та декартова степен

$\rightarrow X$

$\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}$

Данните
се задават
и четат във
формата на



$\in \{0, 1\}$

битове

→ задаващи двоично число

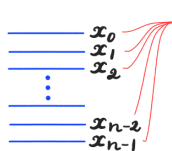
$$X := x_0 + x_1 2^1 + \dots + x_{n-1} 2^{n-1}$$

→ всяка линия ще означава бит

Ако това са **квантови** битове, то състоянието им е
вектор $\Psi \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ - n -та тензорна степен

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ times}} = \mathbb{C}^{2^n}$$

Данните
се задават
и четат във
формата на



$\in \{0, 1\}$

битове

задаващи двоично число

$$X := x_0 + x_1 2^1 + \dots + x_{n-1} 2^{n-1}$$

Съответствие между класически и квантови данни ползваваме
в изчислителния базис

$$|x_0\rangle \otimes |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_{n-1}\rangle \equiv: |x_0\rangle |x_1\rangle \dots |x_{n-1}\rangle \equiv: |x_0 x_1 \dots x_{n-1}\rangle$$

$$\hookrightarrow \text{виз. Лекция 8: "Описание на паметта на квантов компютър"} \equiv |X\rangle$$

квантови регистри $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$ В междинни етапи на изчисление състоянието на регистрите е линейна комбинация

$$\Psi = \sum_{X=0}^{N-1} \psi_X |X\rangle \quad (N = 2^n)$$

$$\equiv \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}=0}^1 \psi_{x_0 x_1 \dots x_{n-1}} |x_0 x_1 \dots x_{n-1}\rangle$$

$$|x_0\rangle \otimes |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_{n-1}\rangle \equiv: |x_0\rangle |x_1\rangle \dots |x_{n-1}\rangle \equiv: |x_0 x_1 \dots x_{n-1}\rangle$$

$$\hookrightarrow \text{виз. Лекция 8: "Описание на паметта на квантов компютър"} \equiv |X\rangle$$

квантови
регистри $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$

В междинни етапи на изчисление състоянието на регистрите е линейна комбинация

$$\Psi = \sum_{X=0}^{N-1} \psi_X |X\rangle$$

$$(N = 2^n)$$



Ако направим
измерване в

изчислителен базис, то резултата ще е

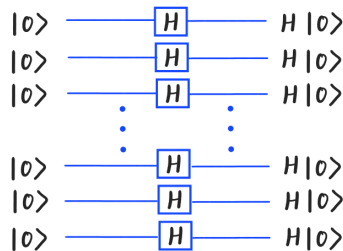
с вероятност $|\psi_{x_0 x_1 \dots x_{n-1}}|^2$

$$\equiv \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}=0}^1 \psi_{x_0 x_1 \dots x_{n-1}} |x_0 x_1 \dots x_{n-1}\rangle$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{---} x_0 \\ \text{---} x_1 \\ \text{---} x_2 \\ \vdots \\ \text{---} x_{n-2} \\ \text{---} x_{n-1} \end{array} \right\}$$

Например:

при вход



означава:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$$

→ означава: $H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes \dots \otimes H|0\rangle$

Гейт на Адамар: виж Лекция 9 в точката
"квантови трансформации: примери и дискусия".

Например:

при входе

$$\left\{ \begin{array}{l} |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ \vdots \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \end{array} \right\} \otimes$$

Припомним:

→ означава: $H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes \dots \otimes H|0\rangle$

$$H|0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Например:

при вход

$$\left\{ \begin{array}{l} |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ \vdots \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \end{array} \right\} \otimes$$

$$2^{-n/2} (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle + \dots)$$

$$= 2^{-n/2} \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{n-1} = 0}^1 |x_0\rangle \otimes |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_{n-1}\rangle = 2^{-n/2} \sum_{X=0}^{N-1} |X\rangle$$

сума по всички възможни

Например:

при вход

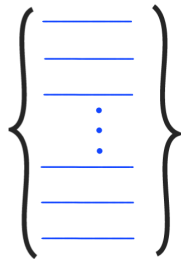
$$\left\{ \begin{array}{lcl} |0\rangle & \text{---} \boxed{H} & H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle & \text{---} \boxed{H} & H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle & \text{---} \boxed{H} & H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ & \vdots & \vdots \\ |0\rangle & \text{---} \boxed{H} & H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle & \text{---} \boxed{H} & H|0\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle & \text{---} \boxed{H} & H|0\rangle = 2^{-1/2}(\textcolor{brown}{|0\rangle} + \textcolor{green}{|1\rangle}) \end{array} \right\} \otimes$$

Ако в този момент ние направим измерване в изчислителен базис, то с равна вероятност ще получим всички възможности $X \leftrightarrow (x_0, \dots, x_{n-1})$

$$\left\{ \leftarrow 2^{-n/2} \sum_{X=0}^{N-1} |X\rangle \right.$$

но ние не спираме тук!

Анонс: в края
на алгоритъма
ще има група
регистри



такива че



ако направим измерване в изчислителен
базис, то с **вероятност близка до 1 ***)
ще получим резултат

$$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \leftrightarrow Y$$

таков, че Q дели P , където ****)**

$Q :=$ най-близкото цяло число
до $2^n / Y$

→ Преминаване към $f_1(X) := f(QX)$ и т.н.

Забележки :

*) "вероятност близка до 1"

означава, че за $\forall \epsilon > 0$
существува $n = n(\epsilon)$,
така че при този брой
използвани битовете
вероятността е $1 - \epsilon (\rightarrow 1)$
Времето е $\text{Time}(n)$

ако направим измерване в изчислителен
базис, то с вероятност близка до 1 *)
ще получим резултат



$$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \leftrightarrow Y$$

таков, че Q дели P , където **)

$Q :=$ най-близкото цяло число
до $2^n / Y$

Забележки :

**) "Q дели P"

резултата от първото изпълнение на алгоритъма е делител на периода P, а не кратно !!!

(корекция към написаното на дъската - в записките няма корекция)

ако направим измерване в изчислителен базис, то с вероятност близка до 1 *) ще получим резултат



$$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \leftrightarrow Y$$

таков, че Q дели P, където **)

Q := най-близкото цяло число до $2^n / Y$

Забележки :

****) "Q дели P"**

резултата от първото
изпълнение на алгоритъма
е делител на периода P,
а не кратко !!!

(корекция към написаното
на дъската - в записките
няма корекция)

Допълнително пояснение :

ако търсим връзка с "кратно", а не
"делител", то това не е спрямо периода,
а спрямо честота

$$K \approx \frac{N}{P}$$

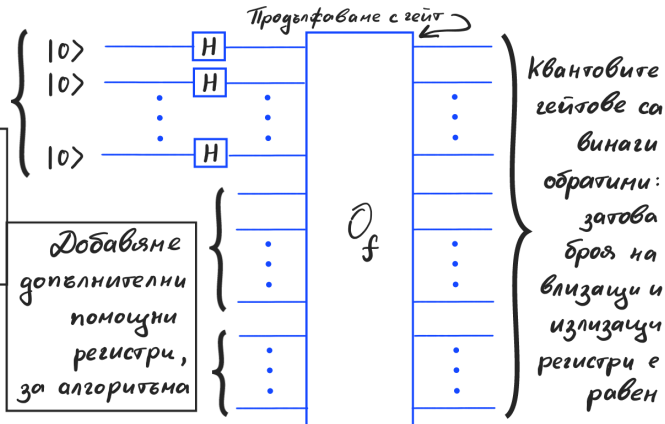
-виж точка 7 на Лекция 10.

(Преди периода беше означен с T
а честотата с S.)

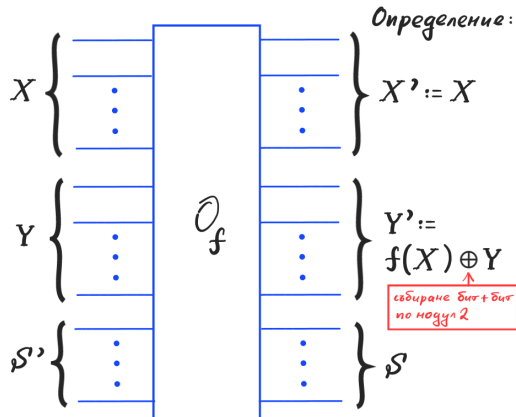
Алгоритъмът
до сук:

↖ n q -бита

$n > n_0$ е избрано
за да се осигури
добра вероятност
 $1 - \varepsilon \approx 1$ за успех



Продължаваме с гейт O_f ,
който "имплементира"
("внедрява") f
в алгоритма и има
смисъл на "входни
данни" ("input") за
алгоритма.
 O_f - от оракул на f
- "черна кутия".



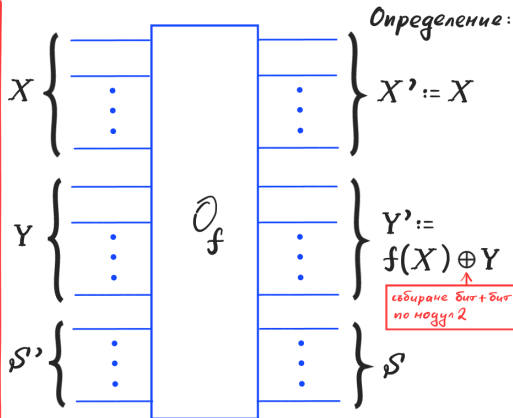
Забележете, че O_f е определен като класически гейт.

Той се пренася като квантов гейт в изчислителен базис

$$O_f(|X\rangle \otimes |Y\rangle \otimes |S'\rangle) \\ := |X'\rangle \otimes |Y'\rangle \otimes |S\rangle$$

За тях е нужно
едно условие
(S') – по-късно

Ангажирани са
← допълнително
ако има нужда



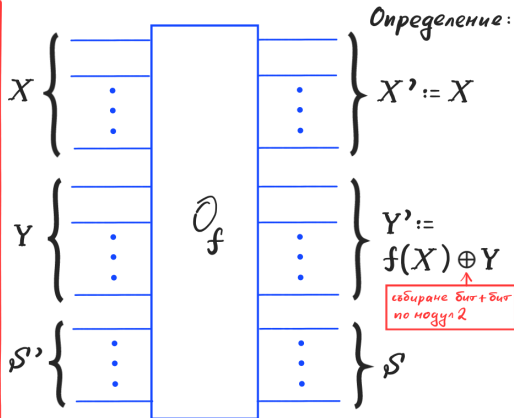
Забележете, че O_f е определен като класически гейт.

Той се пренася като квантов гейт в изчислителен базис

$$O_f(|X\rangle \otimes |Y\rangle \otimes |S'\rangle) \\ := |X'\rangle \otimes |Y'\rangle \otimes |S\rangle$$



главното условие за да е квантов гейт е унитарността: в случая означава да е биекция на базиса (орто-нормиран).



$$O_f(|X\rangle \otimes |Y\rangle \otimes |S'\rangle)$$

$$:= |X'\rangle \otimes |Y'\rangle \otimes |S\rangle$$

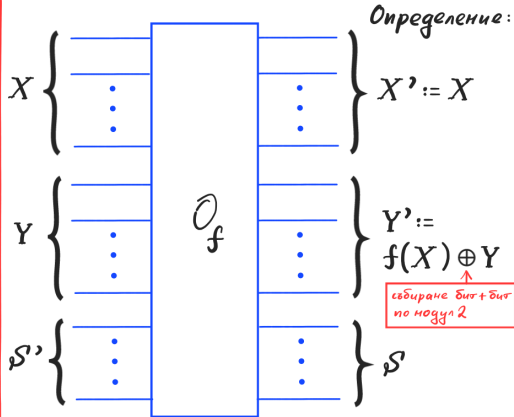


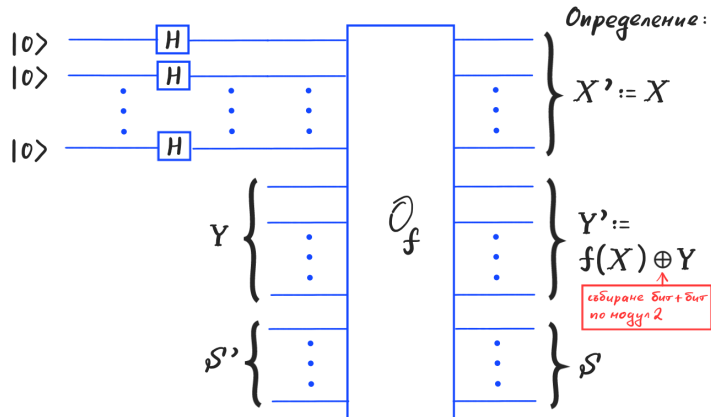
главното условие за да е квантов гейт е унитарността: в случая означава да е биекция на базиса (орто-нормиран).

→ изпълнено е, защото:

$$\begin{array}{l|l} X' = X & X = X' \\ Y' = f(X) \oplus Y & Y = f(X') \oplus Y' \end{array}$$

собирането по модул 2 е и изваждане

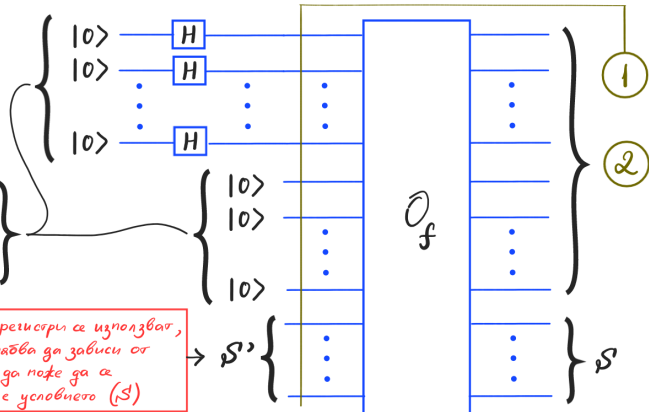




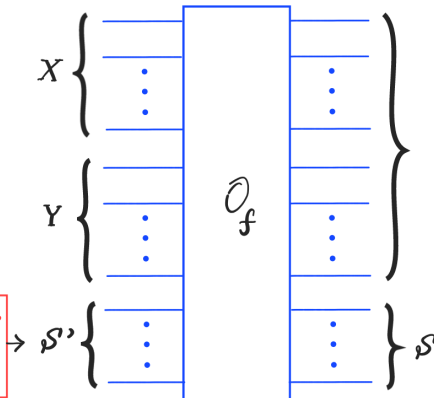
До тук
изпълнихме
две стъпки в
в алгоритма.

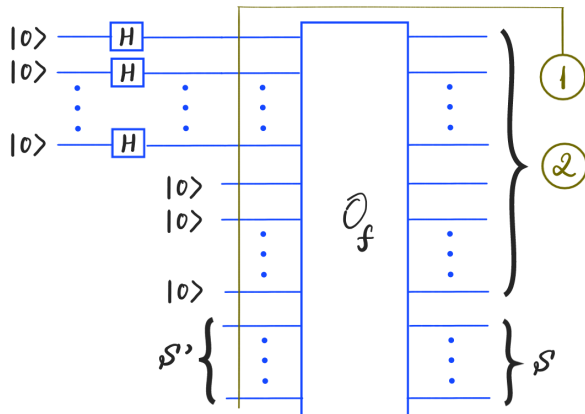
В началото се
зачуват и
двете групи

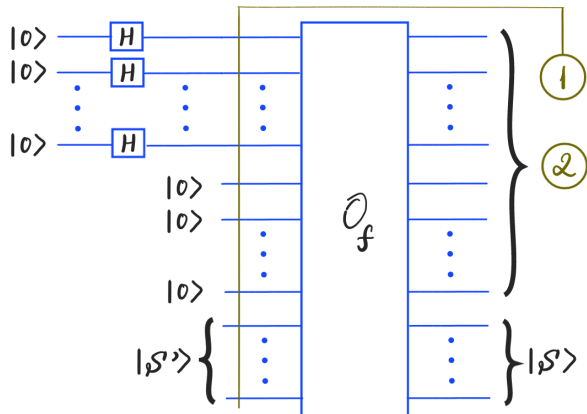
Ако такива помощни регистри се използват,
то резултата S не трябва да зависи от
първата група X за да може да се
факторизира - това е условието (S)

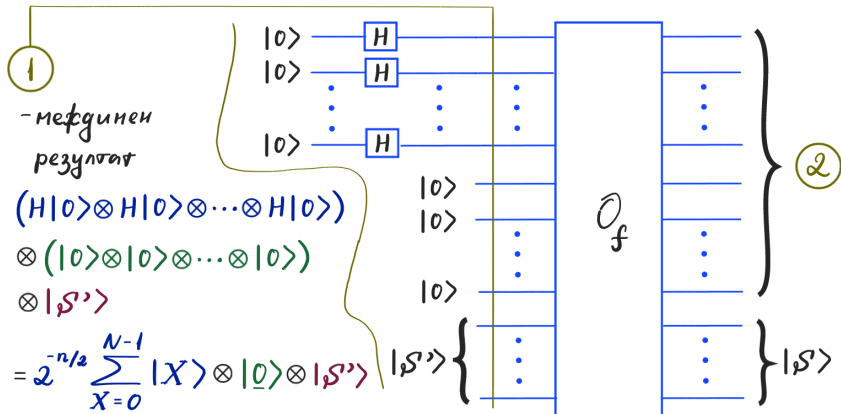


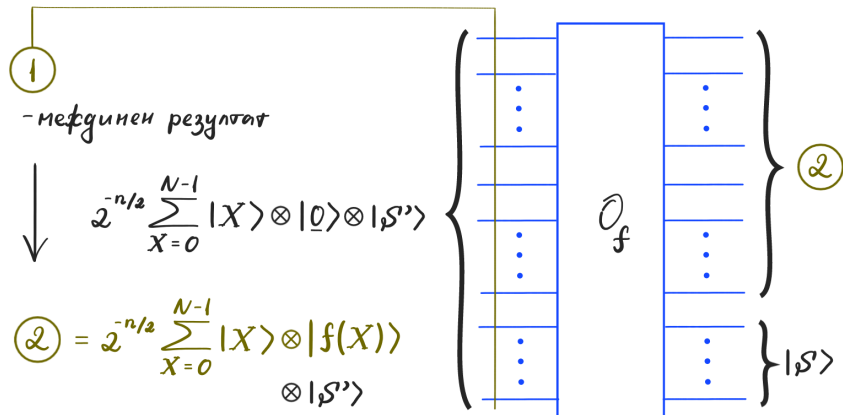
Ако такива помощни регистри се използват, то резултата S не трябва да зависи от първата група X за да може да се факторизира - това е условието (S)











Преработваме :

$$\textcircled{2} = 2^{-n/2} \sum_{X=0}^{N-1} |X\rangle \otimes |f(X)\rangle$$

използване
периодичността



$$= 2^{-n/2} \left(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle + |1\rangle \otimes |f(1)\rangle + \dots + |P-1\rangle \otimes |f(P-1)\rangle \right. \\ \left. + |P\rangle \otimes |f(P)\rangle + \dots + |2P-1\rangle \otimes |f(P-1)\rangle \right. \\ \left. \vdots \right. \\ \left. + |KP\rangle \otimes |f(P)\rangle + \dots + |KP-1\rangle \otimes |f(P-1)\rangle \right)$$

+ remainder $\leftarrow R = N - KP$ на брой остатъчни членове

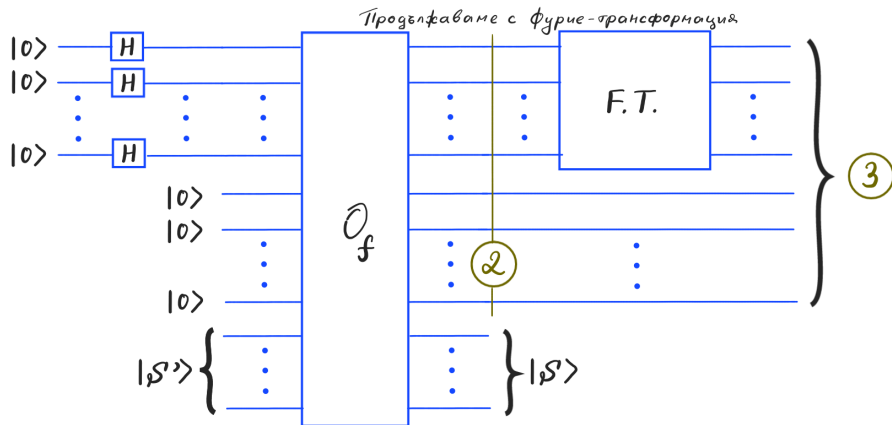
Преработваме :

$$\textcircled{2} = 2^{-n/2} \sum_{X=0}^{N-1} |X\rangle \otimes |f(X)\rangle$$

понеже f е биекция върху периода си

$$= 2^{-n/2} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{L=0}^{K-1} |X_C + LP\rangle \otimes |C\rangle + \text{remainder}$$

това е най-малкото неотрицателно решение на
 $f(X) = C$



Преработваме :

$$\textcircled{2} = 2^{-n/2} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{L=0}^{K-1} |X_C + LP\rangle \otimes |C\rangle + \text{remainder}$$

↓ F.T.

$$\textcircled{3} = 2^{-n/2} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{L=0}^{K-1} \text{F.T.}(|X_C + LP\rangle) \otimes |C\rangle + \text{remainder}'$$

тук ще я определим
с обратно разчитане
на битовете на Y

По определение : $\text{F.T.}(|X\rangle) = 2^{-n/2} \sum_{Y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} X \bar{Y}\right) |Y\rangle$

Преработваме :

$$\textcircled{3} = 2^{-n/2} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{L=0}^{K-1} \text{F.T.}(|X_C + LP\rangle) \otimes |C\rangle + \text{remainder}'$$

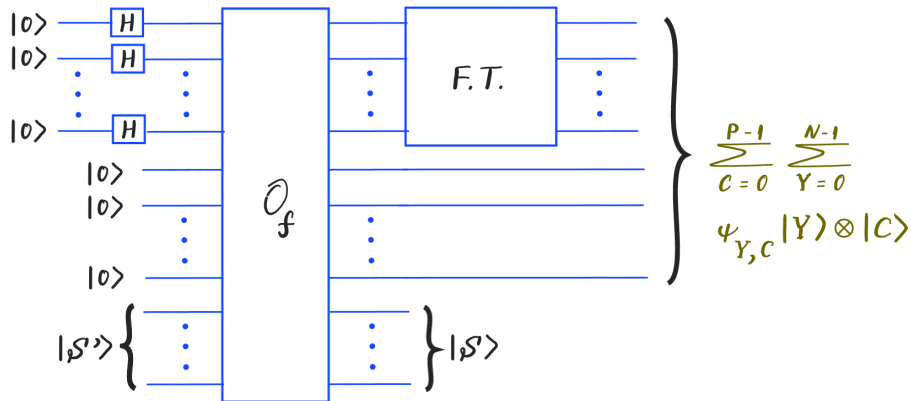
По определение : $\text{F.T.}(|X\rangle) = 2^{-N/2} \sum_{Y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} X \bar{Y}\right) |Y\rangle$

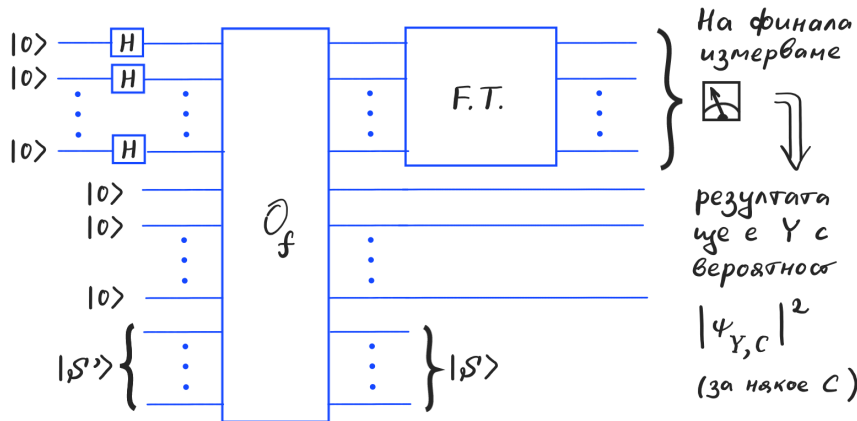
Преработваме :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} &\approx 2^{-n} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{L=0}^{K-1} \sum_{Y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} (X_C + LP) \bar{Y}\right) |Y\rangle \otimes |C\rangle \\
 &= 2^{-n} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{Y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} X_C \bar{Y}\right) \underbrace{\sum_{L=0}^{K-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y}\right)^L}_{\frac{e^{\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y} K} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y}} - 1}} |Y\rangle \otimes |C\rangle
 \end{aligned}$$

Преработваме :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} &\approx 2^{-n} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{L=0}^{K-1} \sum_{Y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} (X_C + LP) \bar{Y}\right) |Y\rangle \otimes |C\rangle \\
 &= 2^{-n} \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{Y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} X_C \bar{Y}\right) \underbrace{\frac{e^{\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y} K} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y}} - 1}}_{=: \psi_{Y,C} 2^n} |Y\rangle \otimes |C\rangle \\
 &= \sum_{C=0}^{P-1} \sum_{Y=0}^{N-1} \psi_{Y,C} |Y\rangle \otimes |C\rangle
 \end{aligned}$$





Анализ кога е максимална вероятността

при предположение, че
остатъка

$$|\psi_{Y,C}|^2 = \left| \frac{e^{\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y} K} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N} P \bar{Y}} - 1} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\pi \frac{P \bar{Y} K}{N}\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{P \bar{Y}}{N}\right)}$$

$$R = N - PK \ll N (= 2^n)$$

не зависи
от C

Условието е приблизително анулиране на знаменателя

за което е нужно $\frac{P}{N/\bar{Y}}$ да е $\approx$ цяло число $Q (\Rightarrow \text{делител на } P)$.

(Аналогичен анализ има и в точка 9 на Лекция 10).

Квантова префа на Фурие-трансформацията



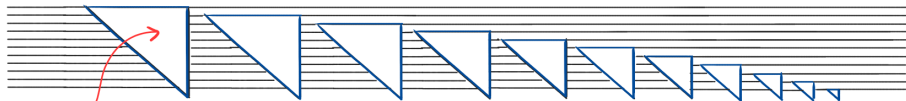
Основният изчислителен елемент на представения квантов алгоритъм е дискретната Фурие трансформация.

От нейната реализация като квантова префа (quantum circuit) се определя и изчислителното време: то е пропорционално на броя на използваните елементарни квантови гейтове.

Квантова префа на Фурие-трансформацията



Схематично :



триъгълните
блокове се
сроят от

$$n + n-1 + n-2 + \dots$$

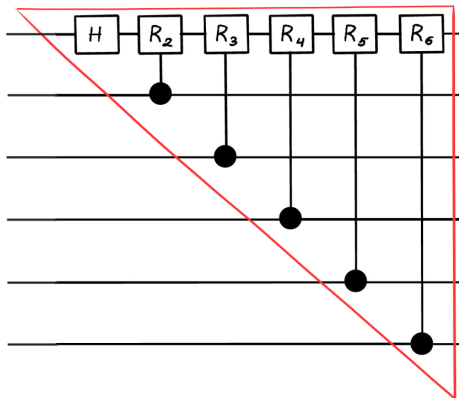
$$3+2+1$$

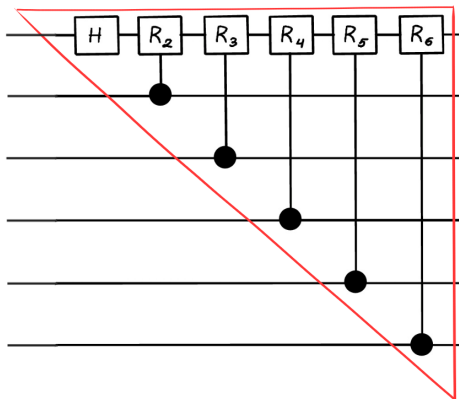
$$= \frac{n(n+1)}{2} \text{ базисни квантови гейта}$$

Всеки триъгълен блок
се строи така :

(пример за триъгълния
блок с 6 линии)

където ↘





където използваните базисни
гейтове са :

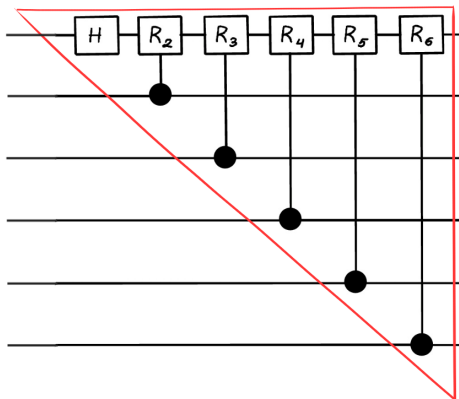
• гейта на Адамар $\text{---} \boxed{H} \text{---}$

Отговаря на
матрицата

$$2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H|x\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle + (-1)^x |1\rangle)$$

$$= 2^{-1/2} \sum_{y=0,1} \exp\left(2\pi i \frac{xy}{2}\right) |y\rangle$$



където използваните базисни
гейтове са :

• гейта на Адамар $\text{---} \boxed{H} \text{---}$

$$H|x\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle + (-1)^x |1\rangle)$$

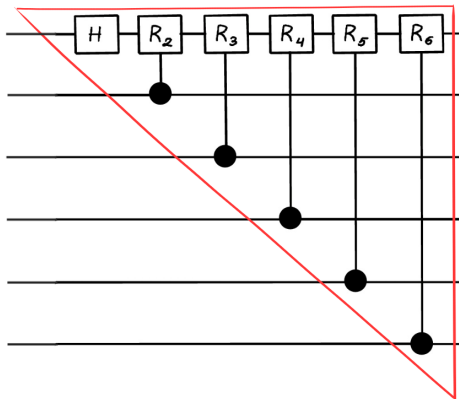
$$= 2^{-1/2} \sum_{y=0,1} \exp\left(2\pi i \frac{xy}{2}\right) |y\rangle$$

$$1 = e^0$$

$$y=0$$

$$y=1$$

$$\boxed{e^{\frac{2\pi i}{2} x} = (-1)^x}$$

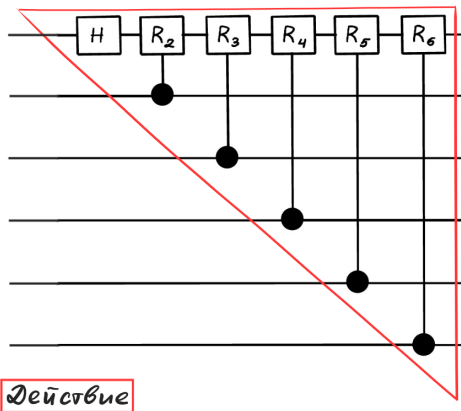


където използваните базисни гейтове са :

- **гейтове** за всяко $a \in \{1, 2, \dots\}$

$\left. \begin{array}{l} \text{---} [R_a] \text{---} \\ \text{---} [R_a] \text{---} \end{array} \right\}$ алтернативно
 означение
 (тип "условна
 операция")

$$R_a |xy\rangle := \exp\left(2\pi i \frac{xy}{2^a}\right) |xy\rangle$$



$$|x_1\rangle \xrightarrow{\text{H}} 2^{-1/2} (|0\rangle + (-1)^{x_1} |1\rangle)$$

$$|x_2\rangle \longrightarrow |x_2\rangle$$

$$|x_3\rangle \longrightarrow |x_3\rangle$$

$$|x_4\rangle \longrightarrow |x_4\rangle$$

$$|x_5\rangle \longrightarrow |x_5\rangle$$

$$|x_6\rangle \longrightarrow |x_6\rangle$$

Действие

$$|x_1\rangle \xrightarrow{\text{H}} 2^{-1/2} (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x_1}{2}} |1\rangle)$$

$$|x_2\rangle \longrightarrow |x_2\rangle$$

$$|x_3\rangle \longrightarrow |x_3\rangle$$

$$|x_4\rangle \longrightarrow |x_4\rangle$$

$$|x_5\rangle \longrightarrow |x_5\rangle$$

$$|x_6\rangle \longrightarrow |x_6\rangle$$

Действие

$$|x_1\rangle \xrightarrow{\text{H}} 2^{-1/2} (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_1]_2} |1\rangle)$$

$$|x_2\rangle \longrightarrow |x_2\rangle$$

$$|x_3\rangle \longrightarrow |x_3\rangle$$

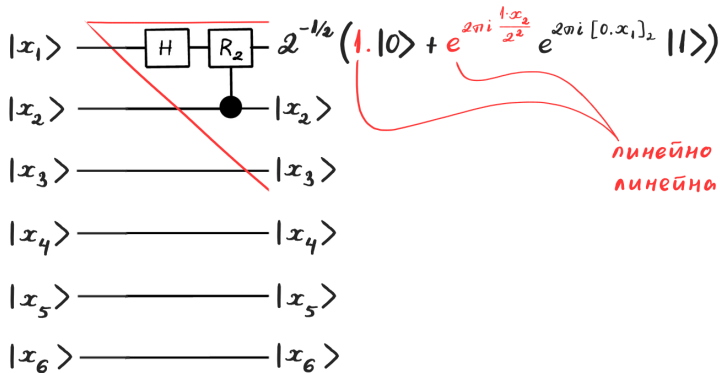
$$|x_4\rangle \longrightarrow |x_4\rangle$$

$$|x_5\rangle \longrightarrow |x_5\rangle$$

$$|x_6\rangle \longrightarrow |x_6\rangle$$

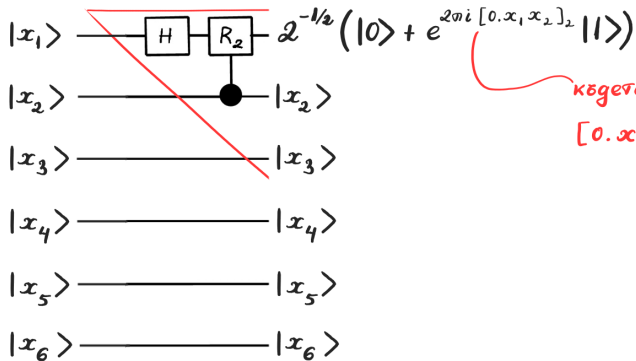
където това е двоична дроб
 $[0.x_1]_2 := x_1 2^{-1}$

Действие



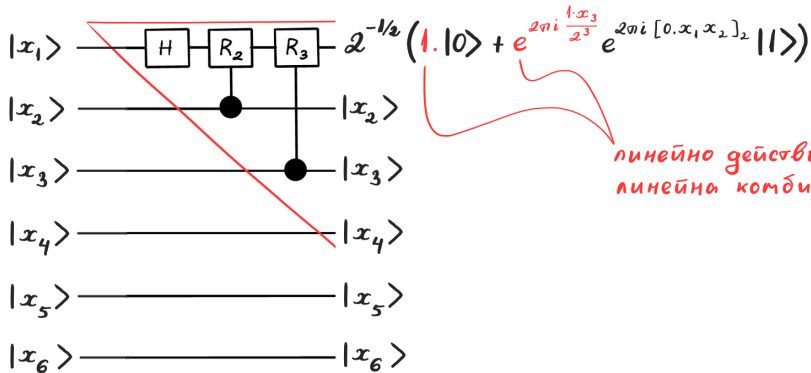
линейно действие върху
линейна комбинация

Действие



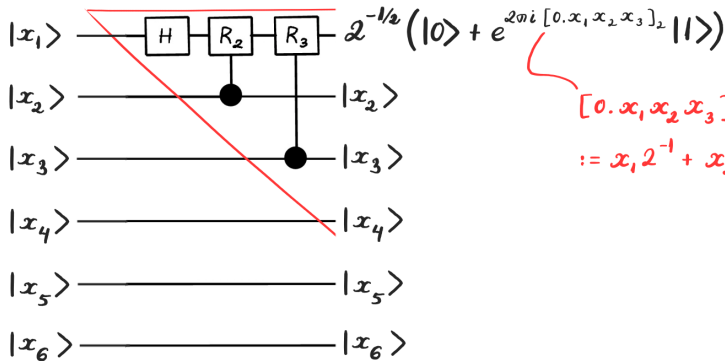
където това е двоична дроб
 $[0.x_1 x_2]_2 := x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2}$

Действие



линейно действие върху
линейна комбинация

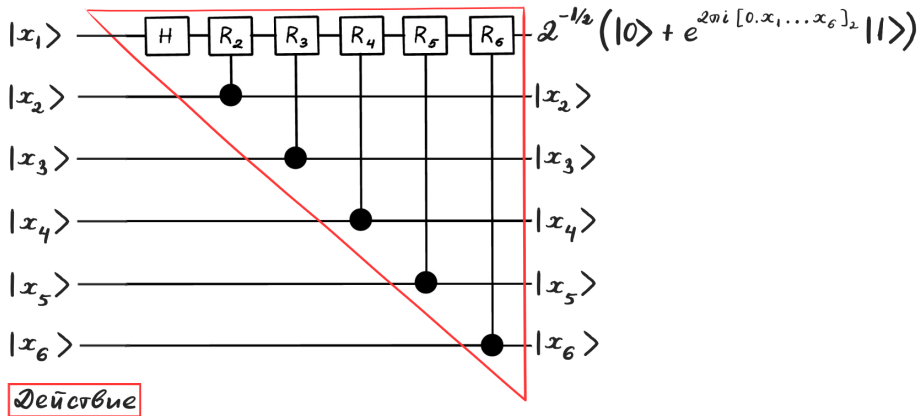
Действие

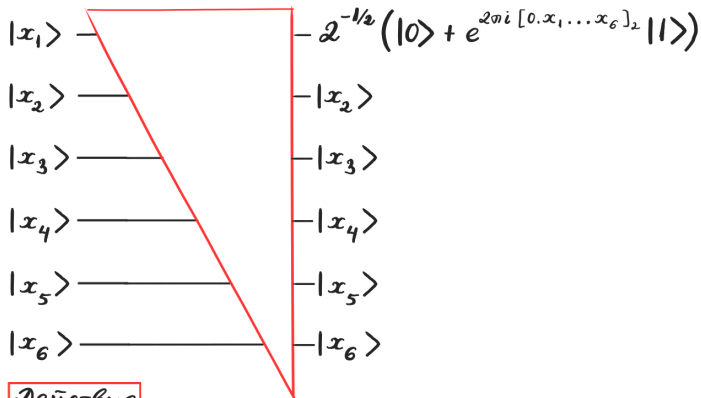


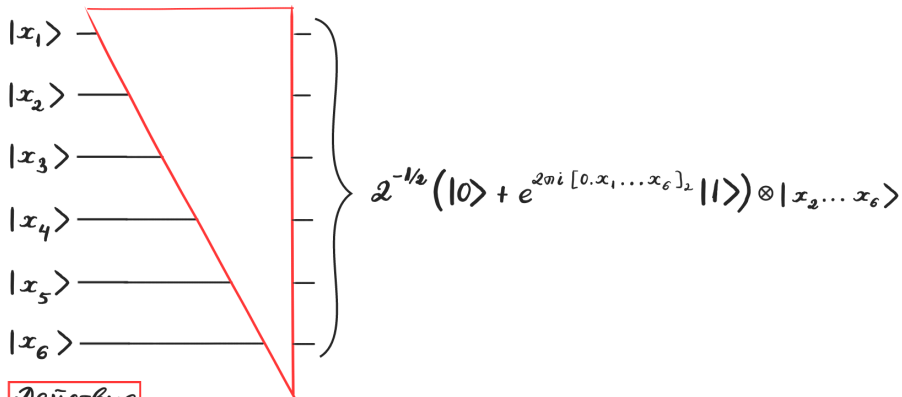
$$[0.x_1 x_2 x_3]_2$$

$$:= x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2} + x_3 2^{-3}$$

Действие

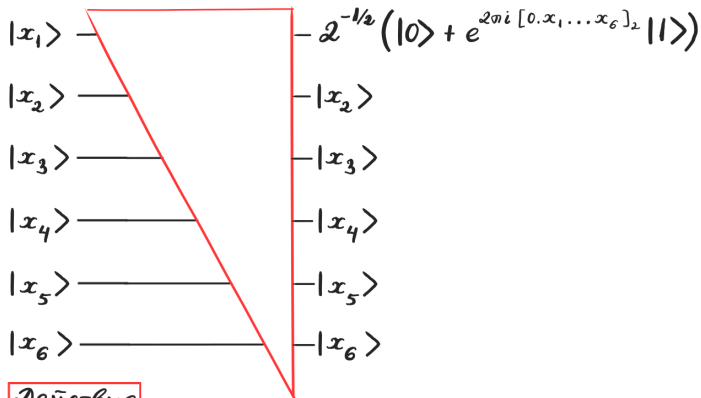


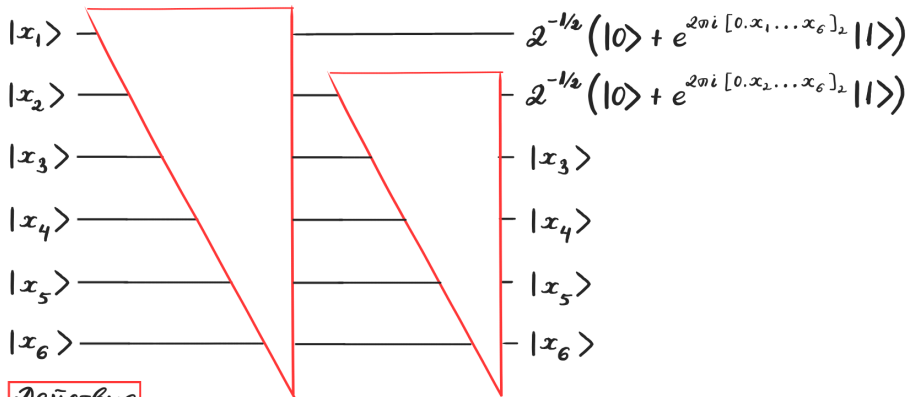


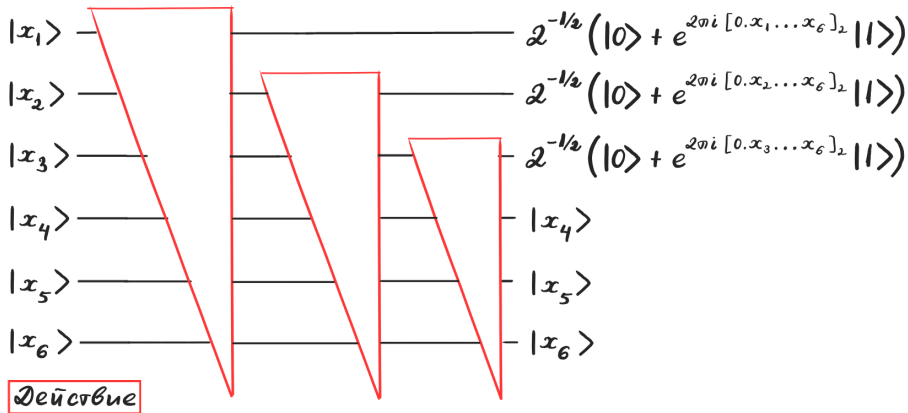


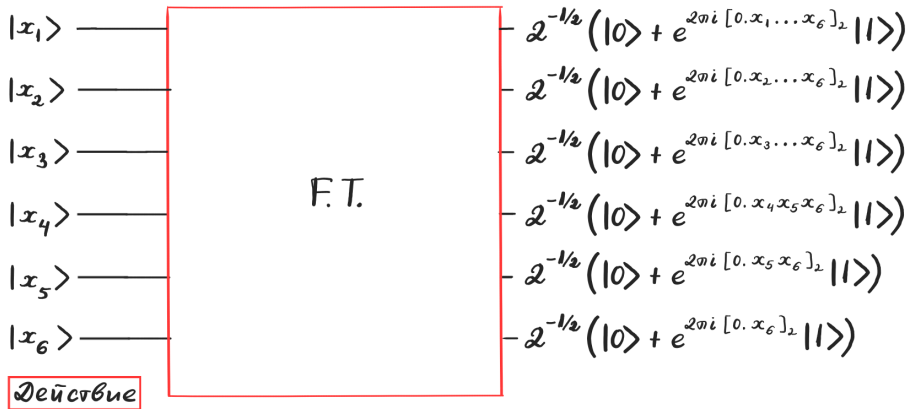
$$2^{-1/2} (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_1 \dots x_6]_2} |1\rangle) \otimes |x_2 \dots x_6\rangle$$

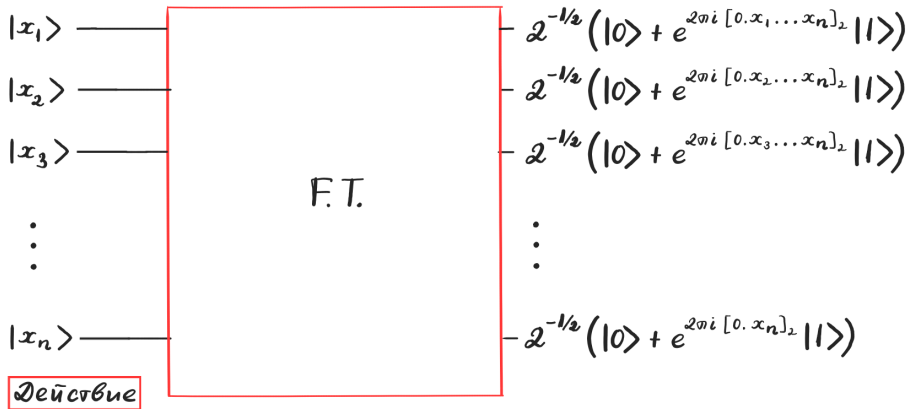
Действие











$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}$$

$\Downarrow$ F.T.

$$2^{-n/2} (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_1 \dots x_n]_2} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_2 \dots x_n]_2} |1\rangle) \\ \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_3 \dots x_n]_2} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_n]_2} |1\rangle)$$

$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}$$

$\downarrow$ F.T.

$$2^{-n/2} (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_1 \dots x_n]_2} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_2 \dots x_n]_2} |1\rangle) \\ \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_3 \dots x_n]_2} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i [0.x_n]_2} |1\rangle)$$

Нека $X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$

$\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$

$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}$$

$\Downarrow$ F.T.

$$2^{-n/2} (|0\rangle + e^{2\pi i \bar{X}/2^n} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \bar{X}/2^{n-1}} |1\rangle) \\ \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \bar{X}/2^{n-2}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \bar{X}/2} |1\rangle)$$

Нека $X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$

$\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$

$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}$$

$\downarrow$ F.T.

$$2^{-n/2} (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X} 2} |1\rangle) \\ \otimes (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X} 2^2} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X} 2^{n-1}} |1\rangle)$$

Нека $X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$

$\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$

$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}_{\downarrow \text{F.T.}}$$

$\downarrow \text{F.T.}$

$$2^{-n/2} \left(e^0 |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(1 \cdot 2^0)} |1\rangle \right) \otimes \left(e^0 |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(1 \cdot 2^1)} |1\rangle \right) \\ \otimes \left(e^0 |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(1 \cdot 2^2)} |1\rangle \right) \otimes \dots \otimes \left(e^0 |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(1 \cdot 2^{n-1})} |1\rangle \right)$$

↑ Разкриваме скобите: получаваме 2^n събираеми, в които ако сме избрали в първия член лявото събираемо пишем $y_1 = 0$, а ако десното - $y_1 := 1$; за втория член имаме $y_2 = 0$ или 1 и т.н.

Нека $X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$

$\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$

$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}_{\downarrow \text{F.T.}}$$

$\downarrow \text{F.T.}$

$$2^{-n/2} \sum_{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n=0}^1 e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(y_1 2^0)} e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(y_2 2^1)} e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(y_3 2^2)} \dots e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(y_n 2^{n-1})} \\ \times |y_1\rangle \otimes |y_2\rangle \otimes |y_3\rangle \otimes \dots \otimes |y_n\rangle$$

↑ Разкриваме скобите: получаваме 2^n събираеми, в които ако сме избрали в първия член лявото събираемо пишем $y_1 = 0$, а ако десното - $y_1 := 1$; за втория член имаме $y_2 = 0$ или 1 и т.н.

Нека $X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$
 $\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$

$$\underbrace{|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle}$$

↓ F.T.

$$2^{-n/2} \sum_{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n=0}^1 e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}(y_1 2^0 + y_2 2^1 + y_3 2^2 + \dots + y_n 2^{n-1})}$$

$$\times |y_1\rangle \otimes |y_2\rangle \otimes |y_3\rangle \otimes \dots \otimes |y_n\rangle$$

Нека $X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$

$\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$

$Y := y_1 + y_2 2^1 + \dots + y_n 2^{n-1}$

$$|X\rangle$$

$$\downarrow \text{F.T.}$$

$$2^{-n/2} \sum_{Y=0}^{2^n-1} e^{\frac{2\pi i}{2^n} \bar{X}Y} |Y\rangle$$

$$\text{Нека } X := x_1 + x_2 2^1 + \dots + x_n 2^{n-1}$$

$$\bar{X} := x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \dots + x_n 2^0$$

$$Y := y_1 + y_2 2^1 + \dots + y_n 2^{n-1}$$

Всъщност, ние използвахме друга формула:

$$|X\rangle \xrightarrow{\text{F.T.}} 2^{-n/2} \sum_{Y=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} X\bar{Y}} |Y\rangle$$

- не е проблем: просто трябва обърнем мрежата по вертикала.

И така, намерихме мрежа за Фурие трансформацията.

Упражнение (извън основния материал).

Сравнете с последната точка на Лекция 10, където работата на мрежата е дадена върху координатите на вектор, докато тук е пресмятана върху базисен вектор.

От линейната алгебра знаем, че ако $A(e_j) := \sum_{k=1}^N \overbrace{a_{jk}}^{\text{матрица}} e_k$
- трансформация на базис

тогава $y_k = \sum_{j=1}^N a_{jk} x_j$ - трансформация на координати

Затова в лекция 10 посоката на изпълнение вървеше на обратно.