

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Лекция 13 / 15.01.2024, версия 1

*Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023*

КВАНТОВИ ИЗЧИСЛЕНИЯ ОТВЪД ПРИЛОЖНАТА ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА

Николай Митов Николов

http://www.math.bas.bg/smb/2023_PK/tom_2023/pdf/050-068.pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/NMN-52UBM.pdf



THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936



Теми на лекцията

- От квантово-логически и алгебричен към категорен подход в квантовата теория
- Кратък увод в теорията на категориите
и приложението ѝ в математическата логика, компютърните науки и квантовата информатика
- Квантово програмиране

От квантово-логически и алгебричен подход
към категорен подход в квантовата теория

Алгебричният подход може да се прилага и в класическия свят.

Това се основава на следните "категорни" еквивалентности:

Множества

Бүлеви алгебри

Комутативни алгебри

$$\mathcal{S} \longmapsto \mathcal{P}(\mathcal{S}) \cong 2^{\mathcal{S}} \longmapsto \mathbb{C}^{\mathcal{S}} \equiv \text{Func}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S})$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{S}_1 \\ \downarrow f \\ \mathcal{S}_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(\mathcal{S}_1) \cong 2^{\mathcal{S}_1} \\ \uparrow f^* \\ \mathcal{P}(\mathcal{S}_2) \cong 2^{\mathcal{S}_2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Func}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_1) \\ \uparrow f^* \\ \text{Func}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_2) \end{array}$$

където:

PULLBACK

Забележете, че

$$\begin{aligned} \exists \alpha \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_2 \\ f^*(\mathcal{S}) := f^{-1}(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists \alpha \quad A: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{C} \\ f^*(A) := A \circ f \end{aligned}$$

$$f^*(\chi_{\mathcal{S}}) \equiv \chi_{f^{-1}(\mathcal{S})} \equiv \chi_{f^*(\mathcal{S})}$$

Алгебричният подход може да се прилага и в класическия свят.

Това се основава на следните "категорни" еквивалентности:

Множества

Булеви алгебри

Комутативни алгебри

$$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{S}) \cong 2^{\mathcal{S}} \mapsto \mathcal{C}^{\mathcal{S}} \equiv \text{Func}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{S}_1 \\ \downarrow f \\ \mathcal{S}_2 \end{array}$$

$\mapsto$

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(\mathcal{S}_1) \cong 2^{\mathcal{S}_1} \\ \uparrow f^* \\ \mathcal{P}(\mathcal{S}_2) \cong 2^{\mathcal{S}_2} \end{array}$$

$\mapsto$

$$\begin{array}{c} \text{Func}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_1) \\ \uparrow f^* \\ \text{Func}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}_2) \end{array}$$

"Категориите" (https://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory) можем да си мислим, като "видове на математически структури" (например, "множества", "алгебри", "асоциативни алгебри" и т.н.). Точното понятие за категория включва клас на обектите на категорията и клас на морфизмите на категорията. Горните съответствия между различни категории са примери за т.нар. "функтори на категории" (<https://en.wikipedia.org/wiki/Functor>).

Алгебричният подход може да се прилага и в класическия свят.

Това се основава на следните "категорни" еквивалентности:

Множества

FinSet



Комутативни алгебри

FinComAlg **opposite**

На тази еквивалентност (в малко по-общ вид) се основава "алгебричната геометрия" / "algebraic geometry".

Ако заменим категорията на комутативните алгебри с некомутативните - получаваме т.нар. "некомутативна геометрия" / "non-commutative geometry". Във физиката това съответства на преход към "квантовия свят".

За съжаление, категорията на некомутативните алгебри не е толкова богата, колкото категорията на множествата.

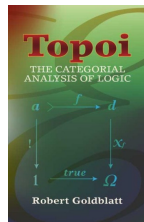
В последните десетилетия има опити към квантовия свят да се приложи обобщен вариант на категорията на множествата, наречен "теория на топосите" (topos theory).

Кратък увод в теорията на категориите

и приложението ѝ в математическата логика, компютърните науки и квантовата информатика

[1984] Topoi The Categorical Analysis of Logic, Goldblatt R.

[http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/\[1984-Gol\]\[cr\]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/[1984-Gol][cr]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf)



CHAPTER 1.

MATHEMATICS = SET THEORY?

- | | |
|---|----|
| 1. Set theory | 6 |
| 2. Foundations of mathematics | 13 |
| 3. Mathematics as set theory | 14 |

CHAPTER 2.

WHAT CATEGORIES ARE

- | | |
|---|----|
| 1. Functions are sets? | 17 |
| 2. Composition of functions | 20 |
| 3. Categories: first examples | 23 |
| 4. The pathology of abstraction | 25 |
| 5. Basic examples | 26 |

CHAPTER 3.

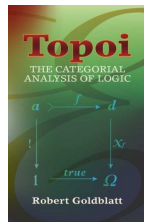
ARROWS INSTEAD OF EPSILON

- | | |
|------------------------------------|----|
| 1. Monic arrows | 37 |
| 2. Epic arrows | 39 |
| 3. Iso arrows | 39 |
| 4. Isomorphic objects | 41 |
| 5. Initial objects | 43 |
| 6. Terminal objects | 44 |
| 7. Duality | 45 |
| 8. Products | 46 |
| 9. Co-products | 54 |
| 10. Equalisers | 56 |
| 11. Limits and co-limits | 58 |
| 12. Co-equalisers | 60 |
| 13. The pullback | 63 |
| 14. Pushouts | 68 |
| 15. Completeness | 69 |
| 16. Exponentiation | 70 |

Това покрива материала по т.нар. "декартово затворени категории" (Cartesian Closed Categories / CCC). Те съответстват на т.нар. "логика от първи ред" и също имат съответствие в базисното "типично λ-смятане."

[1984] **Topoi The Categorical Analysis of Logic**, Goldblatt R.

[http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/\[1984-Gol\]\[cr\]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/[1984-Gol][cr]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf)



CHAPTER 4.	
INTRODUCING TOPOI	75
1. Subobjects	75
2. Classifying subobjects	79
3. Definition of topos	84
4. First examples	85
5. Bundles and sheaves	88
6. Monoid actions	100
7. Power objects	103
8. Ω and comprehension	107

Преходът към "по-висок ред" ("higher order") е свързан с интернализация ("вътрешно потапяне") на понятието за трансформация ("стрелка в категорията"): т.е., това отговаря на образуване на "функции с аргумент други функции". В теория на категориите това води до понятието за топос (topos).

В теорията на топосите се показва, че е достатъчно да се потопи вътрешно понятието за "под-обекти", което води до т.нар. "класификатор на подобекти" Ω .

В категорията на множествата, която е пример за топос, $\Omega = \{0,1\}$. Тоест, това е категорния аналог на понятието "бит". От гледна точка на теорията на типовете и λ -смятане на Ω съответства нов тип - "Bool".

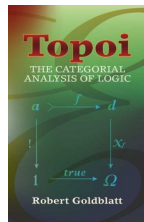
[1984] Topoi The Categorical Analysis of Logic, Goldblatt R.

[http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/\[1984-Gol\]\[cr\]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/[1984-Gol][cr]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf)

CHAPTER 1.		CHAPTER 3.		CHAPTER 4.	
MATHEMATICS = SET THEORY?	6	ARROWS INSTEAD OF EPSILON	37	INTRODUCING TOPOI	75
1. Set theory	6	1. Monic arrows	37	1. Subobjects	75
2. Foundations of mathematics .	13	2. Epic arrows	39	2. Classifying subobjects	79
3. Mathematics as set theory . .	14	3. Iso arrows	39	3. Definition of topos	84
CHAPTER 2.		4. Isomorphic objects	41	4. First examples	85
WHAT CATEGORIES ARE	17	5. Initial objects	43	5. Bundles and sheaves	88
1. Functions are sets?	17	6. Terminal objects	44	6. Monoid actions	100
2. Composition of functions . . .	20	7. Duality	45	7. Power objects	103
3. Categories: first examples . . .	23	8. Products	46	8. Ω and comprehension	107
4. The pathology of abstraction . .	25	9. Co-products	54		
5. Basic examples	26	10. Equalisers	56		
		11. Limits and co-limits	58		
		12. Co-equalisers	60		
		13. The pullback	63		
		14. Pushouts	68		
		15. Completeness	69		
		16. Exponentiation	70		

[1984] **Topoi The Categorical Analysis of Logic**, Goldblatt R.

[http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/\[1984-Gol\]\[cr\]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/[1984-Gol][cr]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf)



AXIOMATIC DEFINITION OF A CATEGORY. A *category* $\mathcal{C}$ comprises

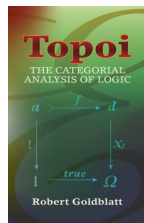
- (1) a collection of things called $\mathcal{C}$ -objects;
- (2) a collection of things called $\mathcal{C}$ -arrows;
- (3) operations assigning to each $\mathcal{C}$ -arrow f a $\mathcal{C}$ -object $\text{dom } f$ (the “domain” of f) and a $\mathcal{C}$ -object $\text{cod } f$ (the “codomain” of f). If $a = \text{dom } f$ and $b = \text{cod } f$ we display this as

$$f: a \rightarrow b \quad \text{or} \quad a \xrightarrow{f} b;$$

- (4) an operation assigning to each pair $\langle g, f \rangle$ of $\mathcal{C}$ -arrows with $\text{dom } g = \text{cod } f$, a $\mathcal{C}$ -arrow $g \circ f$, *the composite of f and g* , having $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f$ and $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod } g$, i.e. $g \circ f: \text{dom } f \rightarrow \text{cod } g$, and such that the following condition obtains:

[1984] **Topoi The Categorical Analysis of Logic**, Goldblatt R.

[http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/\[1984-Gol\]\[cr\]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/[1984-Gol][cr]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf)



AXIOMATIC DEFINITION OF A CATEGORY. A *category* $\mathcal{C}$ comprises

(4) an operation assigning to each pair $\langle g, f \rangle$ of $\mathcal{C}$ -arrows with $\text{dom } g = \text{cod } f$, a $\mathcal{C}$ -arrow $g \circ f$, *the composite of f and g* , having $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f$ and $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod } g$, i.e. $g \circ f: \text{dom } f \rightarrow \text{cod } g$, and such that the following condition obtains:

Associative Law: Given the configuration

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

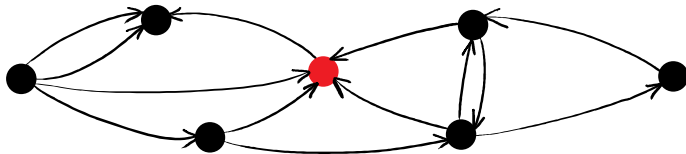
of $\mathcal{C}$ -objects and $\mathcal{C}$ -arrows then $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(5) an assignment to each $\mathcal{C}$ -object b of a $\mathcal{C}$ -arrow $1_b: b \rightarrow b$, called *the identity arrow on b* , such that

Identity Law: For any $\mathcal{C}$ -arrows $f: a \rightarrow b$ and $g: b \rightarrow c$

$$1_b \circ f = f, \quad \text{and} \quad g \circ 1_b = g$$

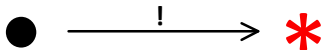
Идейно, при категорния подход обектите с тяхната структура се задават не сами по себе си, а в отношението спрямо останалите обекти, посредством стрелките ("трансформациите") между тях.



Аналогично, всяка стрелка се определя не сама себе си, а посредством структурата на абстрактните композиции между тях.

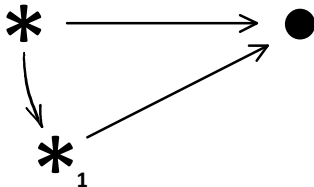
Някои примери:

- "синглетон" (едно-елементно множество) има следната категорна характеристика:



от всеки обект него към има
точно една стрелка.
Наричат се терминални обекти.

- "елемент" на обект е всяка стрелка към него идваща от терминален обект:



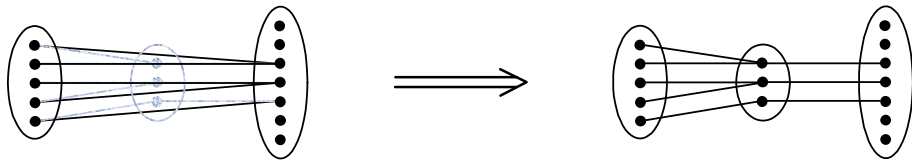
като такива два елемента се
отъждествяват.

Някои примери:

- моно-стрелки ("инекции"): съкратимост от ляво ("отзад") при композиция 
- епи-стрелки ("сюрекции"): съкратимост от дясно ("отпред") при композиция 
- изо-стрелки ("биекции"): двустранна обратимост 
- Внимание: в обща категория - изо $\neq$ моно & епи (!!!); за топоси обаче това се доказва.
- В общи топоси също се доказва съществуване на епи-моно-разложение на всяка стрелка:



В категорията на множествата това съответства на отделянето на "образа" на изображение:

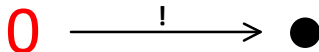


В теорията на категориите възниква следното понятие за "**дуалност**":

това е обръщането на посоките на стрелките в една конструкция или определение.

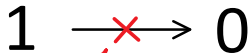
Например: моно и епи-стрелките са взаимно дуални обекти; изо-стрелките са самодуални.

Дуалното понятие на терминален обект е понятието за "начален обект" (обект "0"):



В категорията на множествата: $0 = \emptyset$ - празното множество.

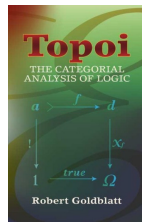
Припомняме, че за всяко множество S съществува единствена функция от празното множество към него, $\emptyset \rightarrow S$, което е "празната функция". В обратната посока обаче, функция $S \rightarrow \emptyset$ може да има само, ако S е също празно!

За специалните категории, *като топоси*, ако съществува стрелка:  **нетривиалност**

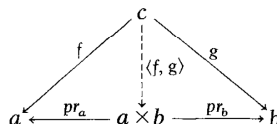
следва, че всички стрелки са изо-стрелки, т.е., всички обекти са изоморфни и то по единствен начин. }

Последен пример:

- объект-произведение (Goldblatt, Ch. 3, § 3.8. Products, p. 47)



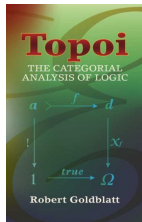
DEFINITION. A *product* in a category $\mathcal{C}$ of two objects a and b is a $\mathcal{C}$ -object $a \times b$ together with a pair $(pr_a: a \times b \rightarrow a, pr_b: a \times b \rightarrow b)$ of $\mathcal{C}$ -arrows such that for *any* pair of $\mathcal{C}$ -arrows of the form $(f: c \rightarrow a, g: c \rightarrow b)$ there is exactly one arrow $\langle f, g \rangle: c \rightarrow a \times b$ making



commute, i.e. such that $pr_a \circ \langle f, g \rangle = f$ and $pr_b \circ \langle f, g \rangle = g$. $\langle f, g \rangle$ is the *product arrow* of f and g with respect to the projections pr_a, pr_b .

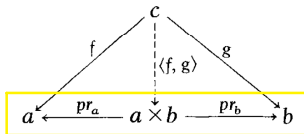
Последен пример:

- обект-произведение (Goldblatt, Ch. 3, § 3.8. Products, p. 47)



В категорията на множествата, обектите-произведения са декартовите произведения на множества и те имат самостоятелен смисъл и в тяхната конструкция са "вградени" изходните множества.

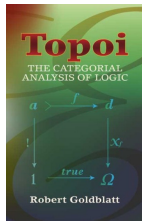
От гледна точка на теория на категориите обектът-произведение няма нито самостоятелен смисъл и конструкция.



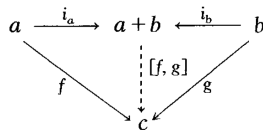
Обектите-произведения имат смисъл и еднозначност (с точност до единствен изоморфизъм) единствено, когато са взети заедно с "привързващите" ги стрелки pr_a и pr_b .

Последен пример:

- обект-ко-произведение (Goldblatt, Ch. 3, § 3.9. Co-products, p. 54)



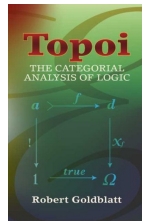
Дуалното понятие на произведението е ко-произведението:



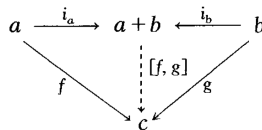
В категорията на множествата ко-произведението е дизюнктивното обединение.

Последен пример:

- объект-ко-произведение (Goldblatt, Ch. 3, § 3.9. Co-products, p. 54)



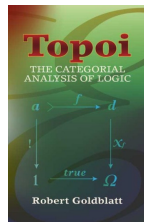
DEFINITION A *co-product* of $\mathcal{C}$ -objects a and b is a $\mathcal{C}$ -object $a + b$ together with a pair $i_a : a \rightarrow a + b$, $i_b : b \rightarrow a + b$ of $\mathcal{C}$ -arrows such that for any pair of $\mathcal{C}$ -arrows of the form $(f : a \rightarrow c, g : b \rightarrow c)$ there is exactly one arrow $[f, g] : a + b \rightarrow c$ making



commute, i.e. such that $[f, g] \circ i_a = f$ and $[f, g] \circ i_b = g$.

[1984] **Topoi The Categorical Analysis of Logic**, Goldblatt R.

[http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/\[1984-Gol\]\[cr\]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf](http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/q121/CatAndProg/[1984-Gol][cr]-Topoi-The_Categorical_Analysis_of_Logic_By-Goldblatt_R.pdf)



CHAPTER 1.		CHAPTER 9.	
MATHEMATICS = SET THEORY?	6	FUNCTORS	194
CHAPTER 2.		CHAPTER 10.	
WHAT CATEGORIES ARE	17	SET CONCEPTS AND VALIDITY	211
CHAPTER 3.		CHAPTER 11.	
ARROWS INSTEAD OF EPSILON	37	ELEMENTARY TRUTH	230
CHAPTER 4.		CHAPTER 12.	
INTRODUCING TOPOI	75	CATEGORIAL SET THEORY	289
CHAPTER 5.		CHAPTER 13.	
TOPOS STRUCTURE: FIRST STEPS	109	ARITHMETIC	332
CHAPTER 6.		CHAPTER 14.	
LOGIC CLASSICALLY CONCEIVED	125	LOCAL TRUTH	359
CHAPTER 7.		CHAPTER 15.	
ALGEBRA OF SUBOBJECTS	146	ADJOINTNESS AND QUANTIFIERS	438
CHAPTER 8.		CHAPTER 16.	
INTUITIONISM AND ITS LOGIC	173	LOGICAL GEOMETRY	458
		REFERENCES	521

Приложение на теория на категориите в компютърните науки.

Обзори: [1986-D] Category Theory and Programming Language Semantics: an Overview,

By: Peter Dybjer, In: Category Theory and Computer Programming, pp. 163-181 (1986)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/1986-D_cr.pdf

[2019-OSY] Relationships between category theory and functional programming with an application,

By: Alper ODABAS, Elis SOYLU YILMAZ, Turk. J. Math., v. 43, pp. 1566–1577

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2019-OSY_cr.pdf

Качествено, имаме 1-1 съответствие:

функционален програмен език $\Leftrightarrow$ **категория** (декартово затворена), при което

типове данни $\Leftrightarrow$ обекти на категорията

функции между типове данни $\Leftrightarrow$ стрелки между обекти на категорията

константи на типове данни $\Leftrightarrow$ елементи на обекти, $1 \rightarrow a$

Всяка стрелка $a \rightarrow b$ трансформира елементите посредством композицията:



Приложение на теория на категориите в компютърните науки.

Допълнителна литература:

[1986-LJ] ***Introduction to Higher-Order Categorical Logic***, J. Lambek, P. J. Scott, (1986)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/1986-IS_cr.pdf

[1991-P] ***Basic Category Theory for Computer Scientists***, Pierce B.C.

<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/1991-P.pdf>

[1995-AL] ***Categories Types and Structures.***

An Introduction to Category Theory for the working computer scientist, Asperti A., Longo G.

<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/1995-AL.pdf>

[1997-S] ***Functionality, polymorphism, and concurrency: a mathematical investigation of programming paradigms.***

Peter Selinger, Ph.D. Thesis, University of Pennsylvania (1997), http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/QProg/1997-S_cr.pdf

[1998-AG] ***The optimal implementation of functional programming languages***, Asperti A., Guerrini S.

<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/1998-AG.pdf>

[2012-BW] ***Category theory for computing science***, Barr M., Wells C.

<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2012-BW.pdf>

[2018-S1] ***Category-theoretic Structure for Independence and Conditional Independence***, By Alex Simpson,

El.Not.Theor.Comp.Sci., Vol. 336, 2018, pp. 281-297, http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/QProg/2018-S1_cr.pdf

Едно от главните приложения на теорията на категориите е, че тя служи, като мост за връзка и пренасяне на понятия между различни области.

В последните десетилетия се развива категорен подход към основите на квантовата теория и заедно с това, и към квантовите изчисления и алгоритми:

[1995-AC] A Sheaf Model for Intuitionistic Quantum Mechanics, M. Adelman and J. V. Corbett,

App. Categor. Struc. 3: 79-104, (1995) <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/1995-AC.pdf>

[2008-DI] A topos foundation for theories of physics, A. Döring and C. J. Isham, JMP. 49, (2008)

I. Formal languages for physics, <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2008-DI-1.pdf>

II. Daseinisation and the liberation of quantum theory, <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2008-DI-2.pdf>

III. The representation of physical quantities with arrows, <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2008-DI-3.pdf>

IV. Categories of systems, <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2008-DI-4.pdf>

[2011-DI] "What is a Thing?": Topos Theory in the Foundations of Physics, A. Döring and C. J. Isham,

<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2011-DI.pdf>, Chapter 13 in, New Structures for Physics: <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2011-C.pdf>

[2013-ZK] A Categorical Semantic Representation of Quantum Event Structures, Zafiris E., Karakostas V.,

Found. Phys.(2013) , <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2013-ZK.pdf>

В последните десетилетия се развива категорен подход към основите на квантовата теория и заедно с това, и към квантовите изчисления и алгоритми:

[2013-F] ***A First Course in Topos Quantum Theory***, Flori C.,

Lecture Notes in Physics 944 (2018), <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2018-F.pdf>

Review of the topos approach to quantum theory, Flori C.,

Can. J. Phys. 91: 471–473 (2013), <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2013-F1.pdf>

[2015-LDR] **Topos logic in measurement-based quantum computation**, Loveridge L., Dridi R., and Raussendorf R.,

Proc. R. Soc. A 471: 20140716 (2015), <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2015-LDR.pdf>

[2015-O_] ***Reality and Measurement in Algebraic Quantum Theory***, Masanao Ozawa at all.,

Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Volume 261, http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2015-O_.pdf

[2017-L] ***Topos theory and quantum logic: From Classical Concepts to Operator Algebras***, Landsman K.,

Fundamental Theories of Physics 188 (2017), <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2017-L.pdf>

[2018-F] ***A Second Course in Topos Quantum Theory***, Flori C.,

Lecture Notes in Physics 944 (2018), <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2018-F.pdf>

[2018-RS] **A Categorical Model for a Quantum Circuit Description Language (Extended Abstract)**, Rios F., Selinger P.,

EPTCS 266, 2018, pp. 64-178, http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/QProg/2018-RS_cr.pdf

[2020-D] **A Critique of Topos Logic in Measurement-Based Quantum Computation**, Diephuis S.

Thesis report for the BSc Applied Physics and BSc Applied Mathematics, <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2020-D.pdf>

[2018-CCS] **Dagger linear logic for categorical quantum mechanics**, Robin Cockett, Cole Comfort, Priyaa V. Srinivasan, <http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/CatAndProg/2018-CCS.pdf>

Квантово програмиране

1) Обзори

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_programming

[2021-GGA] **Quantum Programming Language: A Systematic Review of Research Topic and Top Cited Languages**, By Sunita Garhwal, Maryam Ghorani, Amir Ahmad, Archives of Computational Methods in Engineering (2021) http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2021-gga_ar.pdf

2) Литература с преобладаващ акцент на квантово функционално програмиране и ламбда-смятане

[2020-CdV] **Full Abstraction for the Quantum Lambda-Calculus**, Pierre Clairambault, Marc de Visme, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2020-cdv.pdf>

[2019-S_] **A monadic semantics for quantum computing in an object oriented language**, By Samuel da Silva Feitosa, Juliana Kaizer Vizzotto, Eduardo Kessler Pivetta, Andre Rauber Do Boiss, Sci.Comp.P. (2019) http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2019-s_ar.pdf

[2019-S] **Mathematics Of Quantum Computing An Introduction**, By Wolfgang Scherer (2019), http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2019-s_ar.pdf

[2019-GMV] **Realizability in the Unitary Sphere**, By Alejandro Diaz-Caro, Mauricio Guillermo, Alexandre Miquel, Benoit Valliron, 2019 IEEE, http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2019-gmv_ar.pdf

[2019-DCDR] **Two linearities for quantum computing in the lambda calculus**, Alejandro Diaz-Caro, Gilles Dowek, Juan Pablo Rinaldi, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2019-dcdr.pdf>

[2019-Z] **Quantum Calculi: From Theory to Language Design**, Margherita Zorzi, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2019-z.pdf>

[2018-R] **Formally Verified Quantum Programming**, Robert Rand, Dissertation, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2018-r.pdf>

[2018-S] **Practical Quantum Computing for Developers Programming Quantum Rigs in the Cloud using Python, Quantum Assembly Language and IBM QExperience**, By Vladimir Silva, (2018) http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2018-s_ar.pdf

[2018-CCCS] **From Reversible Programs to Univalent Universes and Back**, By Jacques Carette, Chao-Hong Chen, Vikraman Choudhury, Amr Sabry, ElNot.Theor.Comp.Sci., Vol. 336, (2018), pp. 5-25, http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2018-ccs_ar.pdf

[2018-LMZ] **Enriching a Linear/Non-linear Lambda Calculus: A Programming Language for String Diagrams**, Bert Lindenhovius, Michael Mislove, Vladimir Zamdzhiev, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2018-lmz.pdf>

[2017-YYW] **Invariants of quantum programs-characterisations and generation**, By Mingsheng Ying: Shenggang Ying, Xiaodi Wu, (2017) pp. 818-832, http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2017-yyw_ar.pdf

[2017-AD] **Lineal: A linear-algebraic Lambda-calculus**, Pablo Arrighi, Gilles Dowek, Logical Methods in Computer Science, Vol. 13(1:8)2017, pp. 1-33, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2017-ad.pdf>

[2016-Y] **Foundations of Quantum Programming**, Mingsheng Ying, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2016-y.pdf>

[2016-CEH] **Logic and Algebraic Structures in Quantum Computing**, By Jennifer Chubb, Ali Eskandarian, Valentina Harizanov, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2016-ceh.pdf>

[2016-CW] **Von Neumann Algebras form a Model for the Quantum Lambda Calculus**, Kenta Cho, Abraham Westerbaan, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2016-cw.pdf>

[2015-DFL] **On Coinduction and Quantum Lambda Calculi**, Yuxin Deng, Yuan Feng, Ugo Dal Lago, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2015-dfl.pdf>

[2015-R] **Algebraic and Logical Methods in Quantum Computation**, By Neil I. Ross, PhD-thesis, ArXiv:15.10.02198, http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2015-r_ar.pdf

[2014-R] **A formalization of the Quipper quantum programming language**, Neil I. Ross, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2014-r.pdf>

[2014-PSV] **Applying Quantitative Semantics to Higher-Order Quantum Computing Language**, Michele Pagani, Peter Selinger, Benoit Valliron, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2014-psv.pdf>

[2014-Z] **Programming Languages and Systems**, By-Shao, Z. (Ed.), Lect.Not.Comp.Sci. (2014), <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2014-z.pdf>

[2014-A] **The dagger lambda calculus**, Philip Azzemoglu, EPTCS 172, 2014, pp. 217-235, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2014-a.pdf>

[2012-M] **High-level Structures in Quantum Computing**, By-Jaroslav A. Mischak, http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2012-m_ar.pdf

[2012-V] **On Polymorphic Types with Enforceable Linearity for a Quantum Lambda Calculus**, Marco Voigt, Diplomarbeit, <http://theses.univ-bas.fr/memoir/q21/qprog/2012-v.pdf>

1) Обзори

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_programming

[2021-GGA] **Quantum Programming Language: A Systematic Review of Research Topic and Top Cited Languages**, By Sunita Garhwal, Maryam Ghorani, Amir Ahmad, Archives of Computational Methods in Engineering (2021) http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2021-GGA_v1.pdf

2) Литература с преобладаващ акцент на квантово функционално програмиране и ламбда-смятане

[2012-YFDL] **Quantum programming: From theories to implementation**, Mingsheng Ying, Yuan Feng, Run Yao Duan, Yangjia Li, Chinese Science Bulletin 57(16) (2012), <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2012-YFDL.pdf>

[2009-SV] **Quantum Lambda Calculus**, By-Peter Selinger, Benoit Vallron (2009), http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2009-SV_v1.pdf

[2010-LMZ] **Quantum implicit computational complexity**, Ugo Dal Lago, Andrea Masini, Margherita Zorzi, Theoretical Computer Science 411 (2010) 377–409, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2010-LMZ.pdf>

[2009-SI] **Semantic Techniques in Quantum Computation**, Gay Simon, Mackie Iain, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2009-SI.pdf>

[2008-LMZ] **On a Measurement-Free Quantum Lambda Calculus with Classical Control**, Ugo Dal Lago, Andrea Masini, Margherita Zorzi, Under consideration for publication in Math. Struct. in Comp. Science <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2008-LMZ.pdf>

[2008-Se] **On a Fully Abstract Model for a Quantum Linear Functional Language**, Peter Selinger, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 210 (2008) 123–137, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2008-Se.pdf>

[2008-S] **A Survey of Quantum Programming Languages - History, Methods, and Tools**, Donald A. Sofge, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2008-S.pdf>

[2008-G] **An overview of QML with a concrete implementation in Haskell**, Jonathan Gratigne, 0806.2735, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2008-G.pdf>

[2007-S] **Automatic Quantum Computer Programming A Genetic Programming Approach**, By-Lee Spector (eds.), <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2007-S.pdf>

[2006-SV] **A lambda calculus for quantum computation with classical control**, By-Peter Selinger and Benoit Vallron, Math.Struc.Comp.Sci., 16(3), 527 (2006), http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2006-SV_v1.pdf

[2006-G] **A functional quantum programming language**, By-Jonathan James Gratigne, BSc (Hons), thesis, http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2006-G_v1.pdf

[2006-AG] **SLIDES ON Functional Quantum Programming**, By-Thorsten Altenkirch, Jonathan Gratigne, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2006-AG.pdf>

[2005-AG] **A functional quantum programming language**, By-Thorsten Altenkirch and Jonathan Gratigne, http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2005-AG_v1.pdf

[2005-Z1] **Nondeterministic Quantum Programming**, By-Paolo Zuliani, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2005-Z1.pdf>

[2005-Z] **Compiling quantum programs**, By-Paolo Zuliani, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2005-Z.pdf>

[2004-S] **Towards a quantum programming language**, By-Peter Selinger, Math.Struc.Comp.Sci. 14(4) pp.527-586, 2004, http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2004-S_v1.pdf

[2004-vT] **A Lambda Calculus for Quantum Computation**, By-Andre van Tonder, SIAM J. COMPUT. Vol. 33, No. 5, pp. 1109–1135 (2004), http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2004-vT_v1.pdf Brown preprint: BROWN-HET-1366, http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2004-vT_v2.pdf

[2004-FKS] **Linear Dependent Type Theory for Quantum Programming Languages**, By-Peng Fu, Kohel Kishida, Peter Selinger, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2004-FKS.pdf>

[2000-SZ] **Quantum Programming**, By-J. W. Sanders and P. Zuliani, In: R. Backhouse and J. N. Oliveira (Eds.): MPC 2000, LNCS 1837, pp. 80–99, 2000, <http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/2000-SZ.pdf>

[1997-S] **Functionality, polymorphism, and concurrency: a mathematical investigation of programming paradigms**, By-Peter Selinger, Ph.D. Thesis, University of Pennsylvania (1997) http://theses.univ-bas.fr/memo/q21/QPprog/1997-S_v1.pdf

3) Допълнителни източници

Microsoft: Quantum computing

- Linear algebra for quantum computing

<https://docs.microsoft.com/en-us/quantum/overview/algebra-for-quantum-computing>

https://cds.cern.ch/record/1522001/files/978-1-4614-6336-8_BookBackMatter.pdf

<https://www.math.ubc.ca/%7Ecarrell/NB.pdf>

Quantum Computation Primer by Daniel Vaughan

<https://www.codeproject.com/Articles/5155638/Quantum-Computation-Primer-Part-1>

<https://www.codeproject.com/Articles/5160469/Quantum-Computation-Primer-Part-2>

<https://www.codeproject.com/Articles/5160472/Quantum-Computation-Primer-Part-3>

Learn Quantum Computation using Qiskit

<https://qiskit.org/>

<https://qiskit.org/textbook/preface.html>