

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА

Николай М. Николов

Допълнение 1, версия 0

Теорема 10

Доказателство на основната структурна теорема за ниво 2

Това допълнение е направено да бъде максимално самостоятелно.

Алтернативно изложение с допълнителен материал може да се намери тук:

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QI0822/QI_bk_BG_a4c_Pi-v0130.pdf (A4 - cropped)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QI0822/QI_bk_BG_rdr_Pi-v0130.pdf (Малък формат - 1)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QI0822/QI_bk_BG_pho_Pi-v0130.pdf (Малък формат - 2)

Напомняне:

комплексна алгебра $\mathcal{A}$

линейно пространство над $\mathbb{C}$

снабдено с бинарна операция $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathcal{A}$
такава, че за $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) = \alpha_1 \beta_1 A_1 B_1 + \alpha_1 \beta_2 A_1 B_2 + \alpha_2 \beta_1 A_2 B_1 + \alpha_2 \beta_2 A_2 B_2$$

$\mathcal{A}$ е асоциативна: $(AB)C = A(BC)$ за $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ има единица: $\hat{1} \in \mathcal{A}$, така че $A\hat{1} = A = \hat{1}A$

$\mathcal{A}$ е $*$ -алгебра: $\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ $\begin{cases} (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*, \\ A^{**} = A, (AB)^* = B^* A^* \end{cases}$

$\mathcal{A}$ е положителна: $A_1^* A_1 + \dots + A_n^* A_n = \hat{0} \Rightarrow A_1 = \dots = A_n = \hat{0}$

Напомняне :

Питомна алгебра := крайно-мерна ,
положителна ,
 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ - алгебри асоциативна ,
комплексна ,
 $A, B, C, \dots$ - елементи *-алгебра с единица

Напомняне :

Питомна алгебра := крайно-мерна ,
 положителна ,
 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ - алгебри асоциативна ,
 комплексна ,
 $A, B, C, \dots$ - елементи *-алгебра с единица

Самоспрегнат идемпотент $Q \in \mathcal{A}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{асоциативна,} \\ \text{комплексна,} \\ \text{*-алгебра} \end{array} \right.$

$$Q^* = Q = Q^2$$

За краткост: всички алгебри по-долу ще се предполагат
питомни, въпреки че не навсякъде в определенията или
твърденията ще са нужни всички свойства (т.е., крайно-
мерност или положителност, или наличие на единица)

За краткост: всички алгебри по-долу ще се предполагат
питомни, въпреки че не навсякъде в определенията или
твърденията ще са нужни всички свойства (т.е., крайно-
мерност или положителност, или наличие на единица)

Асоциативността е нужна навсякъде в това изложение и
практически в целия курс по квантова информатика.
Ето защо в някои от записките по курса тя се изпуска и
се предполага, че всички λ -алгебри, с които работим са по условие
и асоциативни.

Зададете: единствената едномерна питомна алгебра е $\mathbb{C}$.

Забележете: единствената едномерна питомна алгебра е $\mathbb{C}$.

По-точно, всяка такава $\mathcal{A}$ може да се отъждесоби с / е изоморфна на $\mathbb{C}$.
При това, по единствен начин

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \cong & \mathbb{C} \\ \psi & & \psi \\ \uparrow & \longleftrightarrow & 1 \end{array}$$

Забележете: единствената едномерна питомна алгебра е $\mathbb{C}$.

По-точно, всяка такава $\mathcal{A}$ може да се отъждесви с/е изоморфна на $\mathbb{C}$.
При това, по единствен начин

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \cong & \mathbb{C} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{1} & \longleftrightarrow & 1 \\
 \hookrightarrow & & \\
 a\hat{1} & \longleftrightarrow & a1 = a, \text{ за } \forall a \in \mathbb{C}
 \end{array}$$

Забележете: единствената едномерна питомна алгебра е $\mathbb{C}$.

По-точно, всяка такава $\mathcal{A}$ може да се отъждесви с / е изоморфна на $\mathbb{C}$.
При това, по единствен начин

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \cong & \mathbb{C} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{1} & \longleftrightarrow & 1 \\
 \hookrightarrow & & \\
 a\hat{1} & \longleftrightarrow & a1 = a, \text{ за } \forall a \in \mathbb{C}
 \end{array}$$

(На тази страница не се използва положителност).

За доказателството на основната структурна теорема ще ни бъде нужно само следното твърдение

Теорема 1 Нека $\mathcal{A}$ е питомна алгебра и $\dim \mathcal{A} > 1$
Тогави $\exists$ самоспрегнат идемпотент $Q \in \mathcal{A}$, такъв че $Q \neq \hat{0}, \hat{1}$.

За доказателството на основната структурна теорема ще ни бъде нужно само следното твърдение

Теорема 1 Нека $\mathcal{A}$ е питомна алгебра и $\dim \mathcal{A} > 1$.
Тогави $\exists$ самоспрегнат идемпотент $Q \in \mathcal{A}$, такъв че $Q \neq 0, 1$.

Тази теорема е непосредствено следствие от спектралната теорема за питомни алгебри. Наистина: ако $\dim \mathcal{A} > 1$, то $\exists$ самоспрегнат $A \in \mathcal{A}$, такъв че $A \neq c1$ за всяко $c \in \mathbb{C}$. Тогави всеки спектрален идемпотент на A дава търсеното Q . $\square$

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра. Означаваме

$$SAI(\mathcal{A}) := \{ Q \in \mathcal{A} \mid Q \text{ е самоспрегнат идемпотент} \}$$

self-adjoint idempotent

Забележете:

$$\hat{0}, \hat{1} \in SAI(\mathcal{A}).$$

$$Q^* = Q = Q^2$$

Забележка В курса по квантова информатика предполагаме, че следните изрази са синоними

- (Q е самоспрегнат идемпотент)
- (Q е ортогонален проектор)
- (Q е свдигание)
- ($Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$)
- ($Q^* = Q = Q^2$)

Забележка В курса по квантова информатика предполагаме, че следните изрази са синоними

- ((Q е самоспрегнат идемпотент
- ((Q е ортогонален проектор
- ((Q е събитие
- (($Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$
- (($Q^* = Q = Q^2$

В настоящото изложение ще използваме основно това $\Rightarrow$

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра. Означаваме

$$SAI(\mathcal{A}) := \{ Q \in \mathcal{A} \mid Q \text{ е самоспрегнат идемпотент} \}$$

self-adjoint idempotent

Забележете:

$$\hat{0}, \hat{1} \in SAI(\mathcal{A}).$$

$$Q^* = Q = Q^2$$

Нека $\mathcal{A}$ е питомна алгебра. Означаваме

$$SAI(\mathcal{A}) := \{ Q \in \mathcal{A} \mid Q \text{ е самоспразнат идемпотент} \}$$

self-adjoint idempotent

Забележете:

$$\hat{0}, \hat{1} \in SAI(\mathcal{A}).$$

$$Q^* = Q = Q^2$$

Теорема 2 Нека $P, Q \in SAI(\mathcal{A})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

По определение: $\curvearrowright P \preceq Q$

Теорема 2 Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

Теорема 2 Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

Доказателство

$$(1) \Rightarrow (2) \quad QP = P \stackrel{*}{\vdash} \Rightarrow PQ = Q^*P^* = P^* = P.$$

Теорема 2 Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

Доказателство

$$(1) \iff (2) \iff QP = P \stackrel{*}{\iff} PQ = Q^*P^* = P^* = P. \quad *$$

Теорема 2 Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

Доказателство

$$(1) \iff (2) \quad QP = P \stackrel{*}{\iff} PQ = Q^*P^* = P^* = P. \quad \textcolor{red}{\square}^*$$

$$(1, 2) \Rightarrow (3) \quad \underline{Q \cdot} \mid PQ = P. \Rightarrow QPQ = QP = P.$$

Теорема 2 Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

Доказателство

$$(1) \iff (2) \quad QP = P \stackrel{*}{\iff} PQ = Q^*P^* = P^* = P. \quad *$$

$$(1, 2) \implies (3) \quad \underline{Q \cdot} \mid PQ = P. \implies QPQ = QP = P.$$

$$(3) \implies (1) \quad Q \underbrace{QPQ}_Q = P$$

□

Теорема 2 Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$. Тогава

$$(1) \quad QP = P \iff (2) \quad PQ = P \iff (3) \quad QPQ = P$$

Доказателство

$$(1) \iff (2) \quad QP = P \stackrel{*}{\iff} PQ = Q^*P^* = P^* = P. \quad *$$

$$(1, 2) \implies (3) \quad \underline{Q \cdot} \mid PQ = P. \implies QPQ = QP = P.$$

$$(3) \implies (1) \quad Q \underbrace{QPQ}_Q = P$$

□

(Крайно-мерност, положителност и единица не бяха нужни за Теорема 2.)

Забележка В положителни (асоциативни) $\ast$ -алгебри е в сила още

$$P \preceq Q \iff PQP = P$$

Забележка В положителни (асоциативни) $\ast$ -алгебри е в сила още

$$P \preceq Q \iff PQP = P$$

Тази характеристикация на $\preceq$ тук няма да използваме, но за пълнота я споменаваме и доказваме.

Ще докажем, че: $QP = P \iff PQP = P$

Забележка В положителни (асоциативни) $\ast$ -алгебри е в сила още

$$P \preceq Q \iff PQP = P$$

Тази характеристикация на $\preceq$ тук няма да използваме, но за пълнота я споменаваме и доказваме.

$$\text{Ще докажем, че: } QP = P \iff PQP = P$$

$$\Rightarrow) PQP = P(QP) = PP = P$$

Забележка В положителни (асоциативни) $\ast$ -алгебри е в сила още

$$P \preceq Q \iff PQP = P$$

Тази характеристикация на $\preceq$ тук няма да използваме, но за пълнота я споменаваме и доказваме.

$$\text{Ще докажем, че: } QP = P \iff PQP = P$$

$$\Rightarrow) PQP = P(QP) = PP = P$$

$$\Leftarrow) (QP - P)^* (QP - P) = (PQ - P)(QP - P)$$

Забележка В положителни (асоциативни) $\ast$ -алгебри е в сила още

$$P \preceq Q \iff PQP = P$$

Тази характеристикация на $\preceq$ тук няма да използваме, но за пълнота я споменаваме и доказваме.

$$\text{Ще докажем, че: } QP = P \iff PQP = P$$

$$\Rightarrow) PQP = P(QP) = PP = P$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow) (QP - P)^* (QP - P) &= (PQ - P)(QP - P) = \\ &= \underbrace{PQP}_{Q} - \underbrace{PQP}_{P} - PQP + P = -PQP + P = \hat{0}. \end{aligned}$$

Забележка В положителни (асоциативни) $\ast$ -алгебри е в сила още

$$P \preceq Q \iff PQP = P$$

Тази характеристикация на $\preceq$ тук няма да използваме, но за пълнота я споменаваме и доказваме.

$$\text{Ще докажем, че: } QP = P \iff PQP = P$$

$$\Rightarrow) PQP = P(QP) = PP = P$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow) (QP - P)^* (QP - P) &= (PQ - P)(QP - P) = \\ &= \underbrace{PQP}_{Q} - \underbrace{PQP}_{P} - PQP + P = -PQP + P = 0. \Rightarrow QP = P. \square \end{aligned}$$

от положителността

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.
 $\hat{0}$ и $\hat{1}$ са съответно най-малкия и най-големия елемент.

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.
 $\hat{0}$ и $\hat{1}$ са съответно най-малкия и най-големия елемент.

Доказателство

а) Рефлексивност: $P \preceq P$? - понеже $PP = P$.

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.
 $\hat{0}$ и $\hat{1}$ са съответно най-малкия и най-големия елемент.

Доказателство

а) Рефлексивност: $P \preceq P$? - понеже $PP = P$.

б) Антисиметрия: $P \preceq Q$ и $Q \preceq P \Rightarrow P = Q$?

-наистина: $P \stackrel{(1)}{=} QP \stackrel{(2)}{=} Q$

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.
 $\hat{0}$ и $\hat{1}$ са съответно най-малкия и най-големия елемент.

Доказателство

а) Рефлексивност: $P \preceq P$? - понеже $PP = P$.

б) Антисиметрия: $P \preceq Q$ и $Q \preceq P \Rightarrow P = Q$?

-наистина: $P \stackrel{(1)}{=} QP \stackrel{(2)}{=} Q$

в) Транзитивност: $P \preceq Q$ и $Q \preceq S \Rightarrow P \preceq S$? Тоест, $SP = P$?

Но: $SP = S(QP) = (SQ)P = QP = P$

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.
 $\hat{0}$ и $\hat{1}$ са съответно най-малкия и най-големия елемент.

Доказателство

а) Рефлексивност: $P \preceq P$? - понеже $PP = P$.

б) Антисиметрия: $P \preceq Q$ и $Q \preceq P \Rightarrow P = Q$?

-наистина: $P \stackrel{(1)}{=} QP \stackrel{(2)}{=} Q$

в) Транзитивност: $P \preceq Q$ и $Q \preceq S \Rightarrow P \preceq S$? Тоест, $SP = P$?

Но: $SP = S(QP) = (SQ)P = QP = P$

$\Rightarrow \preceq$ е релация на частично наредба.

Теорема 3 $SAI(\mathcal{E})$ е частично наредено множество спрямо $\preceq$.
 $\hat{0}$ и $\hat{1}$ са съответно най-малкия и най-големия елемент.

Доказателство

2) Остана: защо $\hat{0} \preceq P \preceq \hat{1}$ за $\forall P \in SAI(\mathcal{E})$?

-наистина: $P\hat{0} = \hat{0}$ и $\hat{1}P = P$. $\square$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$a) P \not\preceq Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \preceq Q \text{ и } P \neq Q$$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{E})$

$$\text{a) } P \not\preceq Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \preceq Q \text{ и } P \neq Q$$

$$\text{б) } P \dot{\preceq} Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \not\preceq Q \text{ и за } \forall S \in \text{SAI}(\mathcal{E}), \\ \uparrow \\ \text{"покрива"} \quad \text{ако } P \preceq S \preceq Q, \text{ то } P = S \text{ или } S = Q$$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$\text{a) } P \not\leq Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \leq Q \text{ и } P \neq Q$$

$$\text{б) } P \overset{\uparrow}{\leq} Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \not\leq Q \text{ и за } \forall S \in \text{SAI}(\mathcal{A}),$$

"покрива"

ако $P \leq S \leq Q$, то $P = S$ или $S = Q$

$$\text{в) } Q \text{ е атом (} = \text{ атомарен самоспрегнат идемпотент) } \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{0} \leq Q$$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{E})$

$$a) P \not\preceq Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \preceq Q \text{ и } P \neq Q$$

$$b) P \dot{\preceq} Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \not\preceq Q \text{ и за } \forall S \in \text{SAI}(\mathcal{E}), \\ \uparrow \text{ "покрива" } \text{ ако } P \preceq S \preceq Q, \text{ то } P = S \text{ или } S = Q$$

$$в) Q \text{ е атом (} = \text{ атомарен самоспрегнат идемпотент) } \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{0} \dot{\preceq} Q$$

$$2) \text{ Верига в } \text{SAI}(\mathcal{E}) : \hat{0} = P_0 \not\preceq P_1 \not\preceq \cdots \not\preceq P_{n-1} \not\preceq P_n = \hat{1}.$$

Определение За $P, Q \in SAI(\mathcal{E})$

$$a) P \not\preceq Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \preceq Q \text{ и } P \neq Q$$

$$b) P \prec Q \stackrel{\text{def}}{\iff} P \not\preceq Q \text{ и за } \forall S \in SAI(\mathcal{E}),$$

$\uparrow$
 "покрива"

$$\text{ако } P \preceq S \preceq Q, \text{ то } P = S \text{ или } S = Q$$

$$в) Q \text{ е атом (} = \text{ атомарен самоспрегнат идемпотент) } \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{0} \prec Q$$

$$г) \text{ Вери́га в } SAI(\mathcal{E}) : \hat{0} = P_0 \not\preceq P_1 \not\preceq \cdots \not\preceq P_{n-1} \not\preceq P_n = \hat{1}.$$

$$д) \text{ Максима́лна вери́га : } \hat{0} = P_0 \prec P_1 \prec \cdots \prec P_{N-1} \prec P_N = \hat{1}.$$

Забележки а) В приложението към квантовата теория:

- $SAI(e) = Events$

Установяването на тези съответствия не е цел на тази презентация

Забележки а) В приложението към квантовата теория:

- $SAI(\mathcal{E}) = \text{Events}$
- елемент $Q \in SAI(\mathcal{E}) \iff Q$ е събитие

Установяването на тези съответствия не е цел на тази презентация

Забележки а) В приложението към квантовата теория:

- $SAI(et) = Events$
- елемент $Q \in SAI(et) \iff Q$ е събитие
- $P \preceq Q$ за $P, Q \in SAI(et) \iff$ събитието P е мажорира от събитието Q

Установяването на тези съответствия не е цел на тази презентация

Забележки а) В приложението към квантовата теория:

- $SAI(\mathcal{E}) = \text{Events}$
- елемент $Q \in SAI(\mathcal{E}) \iff Q$ е събитие
- $P \preceq Q$ за $P, Q \in SAI(\mathcal{E}) \iff$ събитието P α мажорира от събитието Q
- атом $Q \in SAI(\mathcal{E}) \iff Q$ е елементарно събитие

Установяването на тези съответствия не е цел на тази презентация

Забележки б) Ще докажем след малко, че максимални вериги съществуват.

От финала на това изложение може да се докаже, че всички максимални вериги имат еднаква дължина.

Преди това обаче, последният факт няма да е нужен и няма да се използва.

Теорема 4 $\exists \alpha \ P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

a) $P \preceq P_1 \iff P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$.

Теорема 4 За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$\alpha) \quad P \preceq P_1 \iff P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}).$$

$$\delta) \quad P + Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \iff PQ = \hat{0} \iff QP = \hat{0}.$$

В тези случаи, $P \preceq P_1$ за $P_1 := P + Q$.

Теорема 4 За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

а) $P \preceq P_1 \iff P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$.

б) $P + Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \iff PQ = \hat{0} \iff QP = \hat{0}$.

В тези случаи, $P \preceq P_1$ за $P_1 := P + Q$.

По определение : такива P и Q ще наричаме дизюнктивни.

Теорема 4 За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{E})$

а) $P \preceq P_1 \iff P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{E})$.

б) $P + Q \in \text{SAI}(\mathcal{E}) \iff PQ = \hat{0} \iff QP = \hat{0}$.

В тези случаи, $P \preceq P_1$ за $P_1 := P + Q$.

По определение: такива P и Q ще наричаме дизюнктивни.

в) По индукция: за $Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{E})$

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{E}) \iff Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = (P_1 - P)(P_1 - P) = P_1^{\cancel{2}} - P_1 P - P P_1 + P^{\cancel{2}} = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

$$(P + Q)^2 = (P + Q)(P + Q) = P^{\cancel{2}} + P Q + Q P + Q^{\cancel{2}} = P + P Q + Q P + Q$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

 (ϕ_1)

$$(P + Q)^2 = P + P Q + Q P + Q$$

 (ϕ_2)

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(\phi_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(\phi_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

↑
взаимно спрегнати равенства

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(\phi_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

$\implies) PQ = \hat{0} ?$

взаимно спрегнати равенства

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(ϕ_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

$\implies) PQ = \hat{0} ?$ взаимно спрегнати равенства

$$(P+Q)^2 = P+Q \text{ и } (\phi_2) \implies PQ + QP = \hat{0}$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(ϕ_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

$$\implies) PQ = \hat{0}?$$

взаимно спрегнати равенства

$$(P+Q)^2 = P+Q \text{ и } (\phi_2) \implies PQ + QP = \hat{0}$$

$$\begin{aligned} \implies PQ &= PPQ = -PQP = -(P^*Q^*P^*) = -(PQP)^* = -(-PQ)^* \\ &= (PQ)^* = Q^*P^* = QP = -PQ \end{aligned}$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{H})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(ϕ_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{H}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

$$\implies) PQ = \hat{0}?$$

взаимно спрегнати равенства

$$(P+Q)^2 = P+Q \text{ и } (\phi_2) \implies PQ + QP = \hat{0}$$

$$\begin{aligned} \implies PQ &= PPQ = -PQP = -(P^*Q^*P^*) = -(PQP)^* = -(-PQ)^* \\ &= (PQ)^* = Q^*P^* = QP = -PQ, \text{ т.е., } PQ = \hat{0}. \end{aligned}$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(ϕ_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

взаимно спрегнати равенства

$\Leftarrow$)

$$(P+Q)^* \stackrel{?}{=} P+Q \stackrel{?}{=} (P+Q)^2$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(\phi_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

взаимно спрегнати равенства

$$\leftarrow) \quad \begin{array}{c} \text{ясно} \\ (P+Q)^* \stackrel{?}{=} P+Q \stackrel{?}{=} (P+Q)^2 \end{array}$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

($\phi 2$)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

↑
взаимно спрегнати равенства

$\Leftarrow$) ясно

$$(P+Q)^* \stackrel{?}{=} P+Q \stackrel{?}{=} (P+Q)^2$$

от ($\phi 2$): $(P+Q)^2 = P + \underbrace{PQ}_{\hat{0}} + \underbrace{QP}_{\hat{0}} + Q = P + Q.$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P+Q)^2 = P + PQ + QP + Q$$

(ϕ_2)

$$\delta) P+Q \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} PQ = \hat{0} \stackrel{?}{\iff} QP = \hat{0}.$$

взаимно спрегнати равенства

$\Leftarrow$) ясно

$$(P+Q)^* \stackrel{?}{=} P+Q \stackrel{?}{=} (P+Q)^2$$

от (ϕ_2): $(P+Q)^2 = P + \underbrace{PQ}_{\hat{0}} + \underbrace{QP}_{\hat{0}} + Q = P + Q.$

С това част δ) е доказана.

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(ϕ1)

$$\text{a) } P \preceq P_1 \stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(φ1)

$$\begin{aligned} \text{a) } P \preceq P_1 &\stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \\ P \preceq P_1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \end{aligned}$$

?

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(ϕ1)

$$\begin{aligned} \text{a) } P \preceq P_1 &\stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \\ P \preceq P_1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \end{aligned}$$

$\implies$

$$(P_1 - P)^* \stackrel{?}{=} P_1 - P \stackrel{?}{=} (P_1 - P)^2$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(φ1)

$$\begin{aligned} \text{a) } P \preceq P_1 &\stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \\ P \preceq P_1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies) \quad \text{ясно} \\ (P_1 - P)^* &\stackrel{?}{=} P_1 - P \stackrel{?}{=} (P_1 - P)^2 \end{aligned}$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(ϕ)

$$\begin{aligned} \text{a) } P \preceq P_1 &\stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \\ P \preceq P_1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow) & \quad (P_1 - P)^* \stackrel{?}{=} P_1 - P \stackrel{?}{=} (P_1 - P)^2 \\ & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ясно} \\ \text{от } (\phi): (P_1 - P)^2 = \\ = P_1 - \underbrace{P_1 P}_P - \underbrace{P P_1}_P + P = P_1 - P \end{array} \right. \end{aligned}$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(φ1)

$$\text{a) } P \preceq P_1 \stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$$

$$P \preceq P_1 \stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \quad \text{?}$$

$\Leftarrow$) Ако $Q := P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, то $P + Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

и съгласно част δ) : $Q P = \hat{0} \Rightarrow (P_1 - P) P = \hat{0}$.

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(ϕ1)

$$\begin{aligned} \text{a) } P \preceq P_1 &\stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \\ P \preceq P_1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \end{aligned}$$

$$\Leftarrow) \text{ Ако } Q := P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}), \text{ то } P + Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$$

$$\text{и съгласно част б) : } QP = \hat{0} \Rightarrow (P_1 - P)P = \hat{0} \Rightarrow P_1 P = P.$$

Доказателство За $P, P_1, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$$(P_1 - P)^2 = P_1 - P_1 P - P P_1 + P$$

(φ1)

$$\begin{aligned} \text{a) } P \preceq P_1 &\stackrel{?}{\iff} P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \\ P \preceq P_1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1 P = P (= P P_1) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Ако $Q := P_1 - P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, то $P + Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

и съгласно част δ) : $Q P = \hat{0} \Rightarrow (P_1 - P) P = \hat{0} \Rightarrow P_1 P = P$.

С това част а) е доказана.

Доказателство на Теорема 4 в) За $Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\Longleftarrow} Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

Доказателство на Теорема 4 в) За $Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\iff} Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

С индукция по n : за $n=2$ това е част б)

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\Leftarrow} Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

Нека за $n > 2$ е установено, че за $\forall Q_1, \dots, Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \Leftarrow Q_j Q_k = \hat{0}$ при $1 \leq j < k \leq n-1$.

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{E}) \stackrel{?}{\Leftarrow} Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

Нека за $n > 2$ е установено, че за $\forall Q_1, \dots, Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{E})$

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{E}) \Leftarrow Q_j Q_k = \hat{0}$ при $1 \leq j < k \leq n-1$.

Тогав за $\forall Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{E})$, такива че $Q_j Q_k = \hat{0}$ за $1 \leq j < k \leq n$:

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{E})$ и $PQ_n = Q_1 Q_n + \dots + Q_{n-1} Q_n = \hat{0}$.

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\Longleftarrow} Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

Нека за $n > 2$ е установено, че за $\forall Q_1, \dots, Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \Longleftarrow Q_j Q_k = \hat{0}$ при $1 \leq j < k \leq n-1$.

Тогав за $\forall Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, такива че $Q_j Q_k = \hat{0}$ за $1 \leq j < k \leq n$:

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ и $PQ_n = Q_1 Q_n + \dots + Q_{n-1} Q_n = \hat{0}$.

$\Rightarrow Q_1 + \dots + Q_n = P + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$Q_1 + \dots + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\Leftarrow} Q_1, \dots, Q_n$ са две по две дизюнктивни.

Нека за $n > 2$ е установено, че за $\forall Q_1, \dots, Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A}) \Leftarrow Q_j Q_k = \hat{0}$ при $1 \leq j < k \leq n-1$.

Тогав за $\forall Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, такива че $Q_j Q_k = \hat{0}$ за $1 \leq j < k \leq n$:

$P := Q_1 + \dots + Q_{n-1} \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ и $PQ_n = Q_1 Q_n + \dots + Q_{n-1} Q_n = \hat{0}$.

$\Rightarrow Q_1 + \dots + Q_n = P + Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Теорема 4 е доказана. $\square$

Следствие 5 $P \preceq P_i \iff P_i - P$ е атом на $SAI(et)$

Следствие 5 $P \preceq P_1 \iff P_1 - P$ е атом на $SAI(\mathcal{E})$

-Истина Нека $Q := P_1 - P$.

Ако $P \preceq P_1$ и $S \preceq Q$, то $P \preceq P + S \preceq P_1 (= P + S + Q - S)$.

За това $S = \hat{0}$ или $= Q$.

Следствие 5 $P \preceq P_1 \iff P_1 - P$ е атом на $SAI(et)$

-Истинна Нека $Q := P_1 - P$.

Ако $P \preceq P_1$ и $S \preceq Q$, то $P \preceq P + S \preceq P_1 (= P + S + Q - S)$.

Загова $S = \hat{0}$ или $= Q$.

Обратно, ако $\hat{0} \preceq Q$ и $P \preceq R \preceq P_1$, то $\hat{0} \preceq R - P \preceq Q$ защото :

Следствие 5 $P \preceq P_1 \iff P_1 - P$ е атом на $SAI(\mathcal{A})$

-Истинна Нека $Q := P_1 - P$.

Ако $P \preceq P_1$ и $S \preceq Q$, то $P \preceq P + S \preceq P_1 (= P + S + Q - S)$.

Загова $S = \hat{0}$ или $= Q$.

Обратно, ако $\hat{0} \preceq Q$ и $P \preceq R \preceq P_1$, то $\hat{0} \preceq R - P \preceq Q$ защото :

$$(R - P)Q = (R - P)(P_1 - P) = RP_1 - RP - PP_1 + PP = R - P - \cancel{P} + \cancel{P}.$$

Следствие 5 $P \preceq P_1 \iff P_1 - P$ е атом на $SAI(\mathcal{A})$

-Истинна Нека $Q := P_1 - P$.

Ако $P \preceq P_1$ и $S \preceq Q$, то $P \preceq P + S \preceq P_1 (= P + S + Q - S)$.

За това $S = \hat{0}$ или $= Q$.

Обратно, ако $\hat{0} \preceq Q$ и $P \preceq R \preceq P_1$, то $\hat{0} \preceq R - P \preceq Q$ защото :

$$(R - P)Q = (R - P)(P_1 - P) = RP_1 - RP - PP_1 + PP = R - P - \cancel{P} + \cancel{P}.$$

$$\Rightarrow R = P, P_1. \quad \square$$

Определение Разбиване на $P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ се нарича всяко представяне

$$P := Q_1 + \dots + Q_n \text{ за } Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{A})$$

Определение Разбиване на $P \in \text{SAI}(\mathcal{E})$ се нарича всяко представяне

$$P := Q_1 + \dots + Q_n \text{ за } Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{E})$$

При това:

- Ако $P = \hat{1}$ казваме, че е разбиване на $\hat{1}$.

Определение Разбиване на $P \in \text{SAI}(\mathcal{E})$ се нарича всяко представяне

$$P := Q_1 + \dots + Q_n \text{ за } Q_1, \dots, Q_n \in \text{SAI}(\mathcal{E})$$

При това:

- Ако $P = \hat{1}$ казваме, че е разбиване на $\hat{1}$.
 - Ако всички $Q_1, \dots, Q_n$ са атоми казваме, че разбиването е атомарно.
- В определен смисъл, атомарните разбивания се оказват максимални.

Следствие 6 Има 1-1 съответствие между вериги с n елемента

$$\hat{0} = P_0 \preceq P_1 \preceq \cdots \preceq P_{n-1} \preceq P_n = \hat{1}.$$

и разбивания на единицата с n елемента

$$\hat{1} = Q_1 + \cdots + Q_n,$$

определено от връзките

$$| Q_j = P_j - P_{j-1} \text{ за } j=1, \dots, n \iff | P_j = Q_1 + \cdots + Q_j \text{ за } j=1, \dots, n$$

При това: веригата е максимална $\iff$ съответното ѝ разбиване е атомарно

Доказателство: непосредствено. $\square$

Теорема 7 Нека $\mathcal{A}$ - пълномощна, $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Нека $\mathcal{A}_Q := Q\mathcal{A}Q := \{QAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

Теорема 7 Нека $\mathcal{A}$ - питомна, $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Нека $\mathcal{A}_Q := Q\mathcal{A}Q := \{QAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

Теорема 7 Нека $\mathcal{A}$ - питомна, $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Нека $\mathcal{A}_Q := Q\mathcal{A}Q := \{QAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

- а) $\mathcal{A}_Q$ е $\ast$ -подалгебра на $\mathcal{A}$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра е питомна, но единицата на $\mathcal{A}_Q$ е Q .

Теорема 7 Нека $\mathcal{A}$ - питомна, $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Нека $\mathcal{A}_Q := Q\mathcal{A}Q := \{QAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

- а) $\mathcal{A}_Q$ е $\ast$ -подалгебра на $\mathcal{A}$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра е питомна, но единицата на $\mathcal{A}_Q$ е Q .
- б) За $P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$: $P \preceq Q \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$

Теорема 7 Нека $\mathcal{A}$ - питомна, $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Нека $\mathcal{A}_Q := Q\mathcal{A}Q := \{QAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

- а) $\mathcal{A}_Q$ е $\ast$ -подалгебра на $\mathcal{A}$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра е питомна, но единицата на $\mathcal{A}_Q$ е Q .
- б) За $P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$: $P \preceq Q \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$
- в) Q е атом на $\text{SAI}(\mathcal{A}) \iff \dim \mathcal{A}_Q = 1$
 $\iff \mathcal{A}_Q = \mathbb{C}.Q$.

Теорема 7 Нека $\mathcal{A}$ - питомна, $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$

Нека $\mathcal{A}_Q := Q\mathcal{A}Q := \{QAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

а) $\mathcal{A}_Q$ е $*$ -подалгебра на $\mathcal{A}$, която като самостоятелна $*$ -алгебра е питомна, но единицата на $\mathcal{A}_Q$ е Q .

б) За $P \in \text{SAI}(\mathcal{A})$: $P \preceq Q \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$

в) Q е атом на $\text{SAI}(\mathcal{A}) \iff \dim \mathcal{A}_Q = 1$
 $\iff \mathcal{A}_Q = \mathbb{C}.Q$.

Последното означава, че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $QAQ = aQ$ за $a \in \mathbb{C}$.

Доказателство а) • $\mathcal{E}_Q$ е линейно подпространство:

$$\alpha Q A Q + \beta Q B Q = Q (\alpha A + \beta B) Q \quad - \text{при линейна комбинация формата в } \mathcal{E}_Q \text{ се запазва}$$

Доказателство а) • $\mathcal{E}T_Q$ е линейно подпространство:

$$\alpha Q A Q + \beta Q B Q = Q(\alpha A + \beta B) Q \quad - \text{при линейна комбинация формата в } \mathcal{E}T_Q \text{ се запазва}$$

• $\mathcal{E}T_Q$ е подалгебра на $\mathcal{E}T$:

$$(Q A Q)(Q B Q) = Q(A Q B) Q \quad - \text{произведението запазва формата в } \mathcal{E}T_Q$$

Доказателство а) • $\mathcal{EQ}$ е линейно подпространство:

$$\alpha Q A Q + \beta Q B Q = Q(\alpha A + \beta B) Q \quad \text{— при линейна комбинация формата в } \mathcal{EQ} \text{ се запазва}$$

• $\mathcal{EQ}$ е подалгебра на $\mathcal{E}$:

$$(Q A Q)(Q B Q) = Q(A Q B) Q \quad \left. \begin{array}{l} \text{— произведението} \\ \text{и спрегнението} \end{array} \right\} \text{ запазват формата в } \mathcal{EQ}$$

• $\mathcal{EQ}$ е $*$ -подалгебра на $\mathcal{E}$: $(Q A Q)^* = Q A^* Q$

Доказателство а) • $\mathcal{e}\mathcal{t}_Q$ е линейно подпространство:

$$\alpha Q A Q + \beta Q B Q = Q(\alpha A + \beta B)Q \quad \text{— при линейна комбинация формата в } \mathcal{e}\mathcal{t}_Q \text{ се запазва}$$

• $\mathcal{e}\mathcal{t}_Q$ е подалгебра на $\mathcal{e}\mathcal{t}$:

$$(Q A Q)(Q B Q) = Q(A Q B)Q \quad \left. \begin{array}{l} \text{— произведението} \\ \text{и спрегнението} \end{array} \right\} \text{ запазват формата в } \mathcal{e}\mathcal{t}_Q$$

• $\mathcal{e}\mathcal{t}_Q$ е $*$ -подалгебра на $\mathcal{e}\mathcal{t}$: $(Q A Q)^* = Q A^* Q$

• Положителността винаги се наследява

Доказателство а) • $\mathcal{E}t_Q$ е линейно подпространство:

$$\alpha QAQ + \beta QBQ = Q(\alpha A + \beta B)Q \quad \text{— при линейна комбинация формата в } \mathcal{E}t_Q \text{ се запазва}$$

• $\mathcal{E}t_Q$ е подалгебра на $\mathcal{E}t$:

$$(QAQ)(QBQ) = Q(AQB)Q \quad \left. \begin{array}{l} \text{— произведението} \\ \text{и спрегнението} \end{array} \right\} \text{ запазват формата в } \mathcal{E}t_Q$$

• $\mathcal{E}t_Q$ е $*$ -подалгебра на $\mathcal{E}t$: $(QAQ)^* = QA^*Q$

• Положителността винаги се наследява

• Q е единица в $\mathcal{E}t_Q$: $Q(QAQ) = QAQ = (QAQ)Q$

Доказателство $\delta) P \preceq Q \iff Q P Q = P \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q).$

Теорема 2 (3)

Доказателство δ) $P \preceq Q \iff QPQ = P \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$.
Теорема 2 (3)

в) Това следва пряко от Теорема 1 и забележката в началото за едномерните пикомни алгебри. $\square$

Доказателство $\delta) P \preceq Q \iff QPQ = P \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$.
Теорема 2 (3)

в) Това следва пряко от Теорема 1 и забележката в началото за едномерните пикомни алгебри. $\square$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ аналогично на Теорема 7
 въвеждаме $P \mathcal{A} Q := \{ PAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A} \}$

Доказателство $\delta) P \preceq Q \iff Q P Q = P \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$.
Теорема 2 (3)

в) Това следва пряко от Теорема 1 и забележката в началото за едномерните пикомни алгебри. $\square$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ аналогично на Теорема 7
 въвеждаме $P \mathcal{A} Q := \{ P A Q \mid \text{за } A \in \mathcal{A} \}$

Доказателство δ) $P \preceq Q \iff QPQ = P \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$.
Теорема 2 (3)

в) Това следва пряко от Теорема 1 и забележката в началото за едномерните пикомни алгебри. $\square$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ аналогично на Теорема 7
 въвеждаме $P\mathcal{A}Q := \{PAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

Аналогично на случай а) по-горе се доказва, че това са линейни подпространства на $\mathcal{A}$.

Доказателство $\delta) P \preceq Q \iff QPQ = P \iff P \in \text{SAI}(\mathcal{A}_Q)$.
Теорема 2 (3)

в) Това следва пряко от Теорема 1 и забележката в началото за едномерните питомни алгебри. $\square$

Определение За $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$ аналогично на Теорема 7
 въвеждаме $P \mathcal{A} Q := \{PAQ \mid \text{за } A \in \mathcal{A}\}$

Аналогично на случай а) по-горе се доказва, че това са линейни подпространства на $\mathcal{A}$. *Но само до тук в общия случай !*

Следствие 8. Всяка питомна алгебра $\mathcal{A}$ съдържа максимална верига.
Еквивалентно: $\mathcal{A}$ съдържа атомарно разбиване на единицата.

Следствие 8. Всяка питомна алгебра $\mathcal{A}$ съдържа максимална верига.
Еквивалентно: $\mathcal{A}$ съдържа атомарно разбиване на единицата.

Доказателство: Ако $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}1$, то $\mathcal{A}$ съдържа $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, $Q \neq \hat{0}, \hat{1}$.
Тогава $\hat{1} = Q_1 + Q_2$ за $Q_1 := Q$ и $Q_2 := \hat{1} - Q$ е разбиване на $\hat{1}$.

Следствие 8. Всяка питомна алгебра $\mathcal{A}$ съдържа максимална верига.
Еквивалентно: $\mathcal{A}$ съдържа атомарно разбиване на единицата.

Доказателство: Ако $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}1$, то $\mathcal{A}$ съдържа $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, $Q \neq \hat{0}, \hat{1}$.

Тогава $\hat{1} = Q_1 + Q_2$ за $Q_1 := Q$ и $Q_2 := \hat{1} - Q$ е разбиване на $\hat{1}$.

Препиначане към $\mathcal{A}_{Q_1}$ и $\mathcal{A}_{Q_2}$, където единици са Q_1 и Q_2 , съответно,
както ги разбиваме $Q_1 = Q_{1,1} + Q_{1,2}$, $Q_2 = Q_{2,1} + Q_{2,2}$, така че вече имаме
 $\hat{1} = Q_{1,1} + Q_{1,2} + Q_{2,1} + Q_{2,2}$.

Следствие 8. Всяка питомна алгебра $\mathcal{A}$ съдържа максимална верига.
Еквивалентно: $\mathcal{A}$ съдържа атомарно разбиване на единицата.

Доказателство: Ако $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}1$, то $\mathcal{A}$ съдържа $Q \in \text{SAI}(\mathcal{A})$, $Q \neq \hat{0}, \hat{1}$.

Тогава $\hat{1} = Q_1 + Q_2$ за $Q_1 := Q$ и $Q_2 := \hat{1} - Q$ е разбиване на $\hat{1}$.

Препинаваме към $\mathcal{A}_{Q_1}$ и $\mathcal{A}_{Q_2}$, където единици са Q_1 и Q_2 , съответно, като ги разбиваме $Q_1 = Q_{1,1} + Q_{1,2}$, $Q_2 = Q_{2,1} + Q_{2,2}$, така че вече имаме $\hat{1} = Q_{1,1} + Q_{1,2} + Q_{2,1} + Q_{2,2}$. И така нататък, продължаваме докато $\dim \mathcal{A}_{Q_{\dots}} = 1$, което неминуемо ще настъпи, защото тези $\dim$ стого намаляват. $\square$

Теорема 9. Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{E})$ са атоми.

Тогава $\dim P \mathcal{E} Q = \dim Q \mathcal{E} P \leq 1$.

Теорема 9. Нека $P, Q \in \text{SAI}(\text{et})$ са атоми.

Тогава $\dim P \text{ et } Q = \dim Q \text{ et } P \leq 1$.

Теорема 9. Нека $P, Q \in \text{SAI}(\mathcal{E})$ са атоми.

Тогава $\dim P \mathcal{E} Q = \dim Q \mathcal{E} P \leq 1$.

Ако $\dim P \mathcal{E} Q = 1$, то съществуват елементи

$E \in P \mathcal{E} Q, F \in Q \mathcal{E} P$

Теорема 9. Нека $P, Q \in \text{SAI}(\text{et})$ са атоми.

Тогава $\dim P \text{et} Q = \dim Q \text{et} P \leq 1$.

Ако $\dim P \text{et} Q = 1$, то съществуват елементи

$E \in P \text{et} Q, F \in Q \text{et} P$, такива че :

$$E^* = F \tag{\phi 3}$$

$$PE = E, \quad EQ = E \tag{\phi 4}$$

$$FP = F, \quad QF = F \tag{\phi 5}$$

$$EF = P, \quad FE = Q \tag{\phi 6}$$

Доказателство Забележете, че спрягането задава антилинеен изоморфизъм

$$\text{Ref } Q \ni PAQ \longmapsto (PAQ)^* = QA^*P \in \text{Ref } P$$

и следователно : $\dim \text{Ref } Q = \dim \text{Ref } P$.

Доказателство Забележете, че спрягането задава антилинеен изоморфизъм

$$\text{Ref } Q \ni PAQ \longmapsto (PAQ)^* = QA^*P \in Q \text{ref } P$$

и следователно : $\dim \text{Ref } Q = \dim Q \text{ref } P$. Нека $\dim \text{Ref } Q > 0$.

Доказателство Забележете, че спрягането задава антилинеен изоморфизъм

$$\text{Pet } Q \ni PAQ \longmapsto (PAQ)^* = QA^*P \in \text{Qet } P$$

и следователно : $\dim \text{Pet } Q = \dim \text{Qet } P$. Нека $\dim \text{Pet } Q > 0$.

Тогава първо ще построим $E \in \text{Pet } Q$ и $F \in \text{Qet } P$ с желаните свойства (ф3) – (ф6) и тогава ще докажем, че $\dim \text{Pet } Q = 1$.

Доказателство Забележете, че спразането задава антилинеен изоморфизъм

$$\text{Pet } Q \ni PAQ \longmapsto (PAQ)^* = QA^*P \in Q\text{et } P$$

и следователно : $\dim \text{Pet } Q = \dim Q\text{et } P$. Нека $\dim \text{Pet } Q > 0$.

Тогава първо ще построим $E \in \text{Pet } Q$ и $F \in Q\text{et } P$ с желаните свойства (ф3) – (ф6) и тогава ще докажем, че $\dim \text{Pet } Q = 1$.

а) Съществува $A \in \text{et}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim \text{Pet } Q > 0$).

Доказателство Забележете, че спрягането задава антилинеен изоморфизъм

$$\text{Pet } Q \ni PAQ \longmapsto (PAQ)^* = QA^*P \in Q\text{et } P$$

и следователно : $\dim \text{Pet } Q = \dim Q\text{et } P$. Нека $\dim \text{Pet } Q > 0$.

Тогава първо ще построим $E \in \text{Pet } Q$ и $F \in Q\text{et } P$ с желаните свойства (ф3) – (ф6) и тогава ще докажем, че $\dim \text{Pet } Q = 1$.

а) Съществува $A \in \text{et}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim \text{Pet } Q > 0$).

Твърдим, че $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$, за някое $\lambda > 0$.

а) Съществува $A \in \mathcal{A}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim P\mathcal{A}Q > 0$).
Твърдим, че $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$, за някое $\lambda > 0$.

а) Съществува $A \in \mathcal{A}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim P\mathcal{A}Q > 0$).

Твърдим, че $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$, за някое $\lambda > 0$.

- Истинна: $(PAQ)(PAQ)^* = P(A^*QA)P \stackrel{=}{=} \mu P$
(според Теорема 7 в, понеже P е атом) $\nearrow$

а) Съществува $A \in \mathcal{A}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim P\mathcal{A}Q > 0$).

Твърдим, че $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$, за някое $\lambda > 0$.

- Истинна: $(PAQ)(PAQ)^* = P(A^*QA)P \stackrel{=}{=} \mu P$ за $\mu \in \mathbb{R}$
(според Теорема 7 в, понеже P е атом) $\nearrow$
(защото лявата страна и P са самоспрегнати) $\nearrow$

а) Съществува $A \in \mathcal{A}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim P\mathcal{A}Q > 0$).

Твърдим, че $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$, за някое $\lambda > 0$.

- Истинна: $(PAQ)(PAQ)^* = P(A^*QA)P \stackrel{=}{=} \mu P$ за $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$.
(според Теорема 7 в, понеже P е атом) $\nearrow$
(защото лявата страна и P са самоспрегнати) $\nearrow$
(от положителността на $\mathcal{A}$ и $PAQ \neq 0$) $\nearrow$

а) Съществува $A \in \mathcal{A}$ такъв, че $PAQ \neq 0$ (понеже $\dim P\mathcal{A}Q > 0$).
 Твърдим, че $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$, за някое $\lambda > 0$.

- Истинна: $(PAQ)(PAQ)^* = P(A^*QA)P \stackrel{=}{=} \mu P$ за $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$.
 (според Теорема 7 в, понеже P е атом) $\nearrow$
 (защото лявата страна и P са самоспрегнати) $\nearrow$
 (от положителността на $\mathcal{A}$ и $PAQ \neq 0$) $\nearrow$

Ако допуснем, че $\mu = -\lambda^2$ за $\lambda > 0$, то отново имаме конфликт с положителността на $\mathcal{A}$, понеже $\lambda^2 P = (\lambda P)^*(\lambda P)$ и така

$$(PAQ)(PAQ)^* + (\lambda P)^*(\lambda P) = \hat{0}$$

б) И така, $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$ за $\lambda > 0$. Полагаме
 $E := \lambda^{-1} PAQ$ и $F := E^*$

б) И така, $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$ за $\lambda > 0$. Полагаме

$$E := \lambda^{-1} PAQ \text{ и } F := E^*$$

Тогава $EF = P$ и останалите равенства от (ф3) – (ф6) следват непосредствено, с изключение на $FE = Q$, което се нуждае от по-сериозна аргументация.

б) И така, $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$ за $\lambda > 0$. Полагаме
 $E := \lambda^{-1} PAQ$ и $F := E^*$

Тогава $EF = P$ и останалите равенства от (ф3) – (ф6) следват непосредствено, с изключение на $FE = Q$, което се нуждае от по-сериозна аргументация.

Наистина (ще пресметнем за пример само две):

$$PE = E \text{ ? Но : } PE = \lambda^{-1} PPAQ = \lambda^{-1} PAQ = E$$

б) И така, $(PAQ)(PAQ)^* = \lambda^2 P$ за $\lambda > 0$. Полагаме
 $E := \lambda^{-1} PAQ$ и $F := E^*$

Тогава $EF = P$ и останалите равенства от (ф3) – (ф6) следват непосредствено, с изключение на $FE = Q$, което се нуждае от по-сериозна аргументация.

Наистина (ще пресметнем за пример само две):

$$PE = E ? \text{ Но : } PE = \lambda^{-1} PPAQ = \lambda^{-1} PAQ = E$$

$$FP = F ? \text{ Но : } FP = (\lambda^{-1} PAQ)^* P = (\lambda^{-1} PPAQ)^* = F$$

в) Защо $FE = Q$?

в) Защо $FE = Q$? $(PAQ)^*(PAQ) = Q(A^*PA)Q = \nu Q$,
за $\nu > 0$ понеже и Q е атом (и т.н. – аналогично, както за μ в б)).

в) Защо $FE = Q$? $(PAQ)^*(PAQ) = Q(A^*PA)Q = \nu Q$,
за $\nu > 0$ понеже и Q е атом (и т.н. – аналогично, както за μ в б)).
Тогава $FE = \nu_1 Q$, където $\nu_1 = \nu/\lambda^2 > 0$ и тогава

$$\nu_1^2 Q = (FE)(FE) = F(EF)E = FPE = FE = \nu_1 Q$$

според вече установената (ф4). Така: $\nu_1 = 1$, т.е., $EF = P$

б) Защо $FE = Q$? $(PAQ)^*(PAQ) = Q(A^*PA)Q = \nu Q$,
 за $\nu > 0$ понеже и Q е атом (и т.н. – аналогично, както за μ в б)).
 Тогава $FE = \nu_1 Q$, където $\nu_1 = \nu/\lambda^2 > 0$ и тогава

$$\nu_1^2 Q = (FE)(FE) = F(EF)E = FPE = FE = \nu_1 Q$$

според вече установената (ф4). Така: $\nu_1 = 1$, т.е., $EF = P$

г) Остана: защо $\dim P \mathcal{E} Q = 1$ (при предположението, че $\epsilon > 0$)?

в) Защо $FE = Q$? $(PAQ)^*(PAQ) = Q(A^*PA)Q = \nu Q$,
 за $\nu > 0$ понеже и Q е атом (и т.н. – аналогично, както за μ в б)).
 Тогава $FE = \nu_1 Q$, където $\nu_1 = \nu/\lambda^2 > 0$ и тогава

$$\nu_1^2 Q = (FE)(FE) = F(EF)E = FPE = FE = \nu_1 Q$$

според вече установената (ф4). Така: $\nu_1 = 1$, т.е., $EF = P$

г) Остана: защо $\dim \text{Pet } Q = 1$ (при предположението, че $\epsilon > 0$)?

За целта, нека $PA'Q \neq \emptyset$ е друг елемент на $\text{Pet } Q$ и чрез горната конструкция сме построили $E' \in \text{Pet } Q$, $F' \in Q \text{ et } P$, изпълняващи (ф3) – (ф6).

в) Защо $FE = Q$? $(PAQ)^*(PAQ) = Q(A^*PA)Q = \nu Q$,
 за $\nu > 0$ понеже и Q е атом (и т.н. – аналогично, както за μ в б)).
 Тогава $FE = \nu_1 Q$, където $\nu_1 = \nu/\lambda^2 > 0$ и тогава

$$\nu_1^2 Q = (FE)(FE) = F(EF)E = FPE = FE = \nu_1 Q$$

според вече установената (ф4). Така: $\nu_1 = 1$, т.е., $EF = P$

г) Остана: защо $\dim \text{Pet } Q = 1$ (при предположението, че $e > 0$)?

За целта, нека $PA'Q \neq \emptyset$ е друг елемент на $\text{Pet } Q$ и чрез горната конструкция сме построили $E' \in \text{Pet } Q$, $F' \in \text{Qet } P$, изпълняващи (ф3) – (ф6). Нужно е да се покаже, че $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

2) И така, защо ако $E' \in \text{Pet } Q$, $F' \in \text{Qet } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

2) И така, защо ако $E' \in \text{Pet } Q$, $F' \in \text{Qet } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

2) И така, защо ако $E' \in P \text{ et } Q$, $F' \in Q \text{ et } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P.$$

2) И така, защо ако $E' \in P \text{ et } Q$, $F' \in Q \text{ et } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които
са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$

2) И така, защо ако $E' \in \text{Ref } Q$, $F' \in \text{Ref } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които
са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$ - защото: $|\zeta|^2 P = (\zeta P)(\bar{\zeta} P) = (E'F)(EF') = E'(FE)F'$
 $\stackrel{(\phi 6)}{=} E'QF' \stackrel{(\phi 5)}{=} E'F' \stackrel{(\phi 6)}{=} P$

2) И така, защо ако $E' \in \text{Ref } Q$, $F' \in \text{Ref } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$, тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

$$\begin{aligned} \bullet \quad |\zeta| = 1 - \text{защото: } |\zeta|^2 P &= (\zeta P)(\bar{\zeta} P) = (E'F)(EF') = E'(FE)F' \\ &\stackrel{(\phi 6)}{=} E'QF' \stackrel{(\phi 5)}{=} E'F' \stackrel{(\phi 6)}{=} P \end{aligned}$$

• И финално: $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = \hat{0}$?

2) И така, защо ако $E' \in \text{Ref } Q$, $F' \in \text{Ref } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$, тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

$$\bullet |\zeta| = 1 \text{ - защото: } |\zeta|^2 P = (\zeta P)(\bar{\zeta} P) = (E'F)(EF') = E'(FE)F' \\ \stackrel{(\phi 6)}{=} E'QF' \stackrel{(\phi 5)}{=} E'F' \stackrel{(\phi 6)}{=} P$$

$$\bullet \text{ И финално: } (E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* \stackrel{?}{=} (E' - \zeta E)(F' - \bar{\zeta} F)$$

2) И така, защо ако $E' \in \text{Ref } Q$, $F' \in \text{Ref } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които
са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$

- И финално: $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = \widehat{\hat{0} ?} = (E' - \zeta E)(F' - \bar{\zeta}F)$

2) И така, защо ако $E' \in P \text{ et } Q$, $F' \in Q \text{ et } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$, тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$

- И финално: $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = \widehat{\hat{0} ?} = (E' - \zeta E)(F' - \bar{\zeta}F)$
 $= E'F' - \bar{\zeta}E'F - \zeta EF' + |\zeta|^2 EF$

2) И така, защо ако $E' \in \text{Ref } Q$, $F' \in \text{Ref } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$, тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$

- И финално: $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = \hat{0} ? = (E' - \zeta E)(F' - \bar{\zeta}F)$
 $= EF' - \bar{\zeta}E'F - \zeta EF' + |\zeta|^2 EF = P - |\zeta|^2 P - |\zeta|^2 P + |\zeta|^2 P = \hat{0}.$

2) И така, защо ако $E' \in \text{Ref } Q$, $F' \in \text{Ref } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$,
тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta} P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които
са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$

- И финално: $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = \hat{0}$.

2) И така, защо ако $E' \in P \text{ ет } Q$, $F' \in Q \text{ ет } P$, изпълняват $(\phi 3) - (\phi 6)$, тогава $E' = \zeta E$ за някое $\zeta \in \mathbb{C}$?

Дефинираме ζ чрез условието $E'F = E'E^* = P(\dots)P = \zeta P$.

$\Rightarrow EF' = EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta} P$. Тогава от $(\phi 3) - (\phi 6)$, които са в сила, както за E и $E^* = F$, така и за E' и $E'^* = F'$, имаме

- $|\zeta| = 1$

- И финално: $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = \hat{0}$.

ет е положителна $\Rightarrow E' - \zeta E = \hat{0}$. Теорема 9 е доказана. $\square$

Теорема 10. (Основната структурна теорема при ниво 2)

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра, в която има атомарно разбиване на единицата с два елемента: $\hat{1} = Q_1 + Q_2$

Тогав се реализира точно една от следните две възможности:

$$(CL) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(QU) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

Теорема 10. (Основната структурна теорема при **ниво 2**)

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра, в която има атомарно разбиване на единицата с два елемента: $\hat{1} = Q_1 + Q_2$

Тогав се реализира точно една от следните две възможности:

$$(CL) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(QU) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

Теорема 10. (Основната структурна теорема при ниво 2)

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра, в която има атомарно разбиване на единицата с два елемента: $\hat{1} = Q_1 + Q_2$

Тогав се реализира точно една от следните две възможности:

$$(CL) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(QU) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

Теорема 10. (Основната структурна теорема при ниво 2)

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра, в която има атомарно разбиване на единицата с два елемента: $\hat{1} = Q_1 + Q_2$

Тогав се реализира точно една от следните две възможности:

$$(CL) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(QU) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

Теорема 10. (Основната структурна теорема при ниво 2)

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра, в която има атомарно разбиване на единицата с два елемента: $\hat{1} = Q_1 + Q_2$

Тогав се реализира точно една от следните две възможности:

$$(CL) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(QU) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

Теорема 10. (Основната структурна теорема при ниво 2)

Нека $\mathcal{A}$ е нитомна алгебра, в която има атомарно разбиване на единицата с два елемента: $\hat{1} = Q_1 + Q_2$

Тогав се реализира точно една от следните две възможности:

$$(CL) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(QU) \quad \mathcal{A} \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

Забележка Изоморфизмът " $\cong$ " тук означава, че има 1-1 съответствие

$$\text{в случая (CL): } \mathcal{A} \ni A \iff \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{в случая (QU): } \mathcal{A} \ni A \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

които се запазват операциите на събиране, умножение и спрегжение, както и единиците.

Доказателство. Случаите (CL) и (QU) се дефинират от следните алтернативи

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ et } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ et } Q_1$,

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ et } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ et } Q_1$.

Доказателство. Случаите (CL) и (QU) се дефинират от следните алтернативи

случай (CL) : $\dim Q_1 \not\propto Q_2 = 0 = \dim Q_2 \not\propto Q_1$,

случай (QU) : $\dim Q_1 \not\propto Q_2 = 1 = \dim Q_2 \not\propto Q_1$.

Нека $A \in \not\propto$ и да разгледаме тъждеството :

$$\begin{aligned} A &= \hat{I} A \hat{I} = (Q_1 + Q_2) A (Q_1 + Q_2) \\ &= Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2 \end{aligned}$$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

сгърай (CL) : $\dim Q_1 \otimes Q_2 = 0 = \dim Q_2 \otimes Q_1,$

сгърай (QU) : $\dim Q_1 \otimes Q_2 = 1 = \dim Q_2 \otimes Q_1.$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ et } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ et } Q_1,$

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ et } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ et } Q_1.$

а) При случай (CL) : $A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \oplus Q_2 = 0 = \dim Q_2 \oplus Q_1,$

случай (QU) : $\dim Q_1 \oplus Q_2 = 1 = \dim Q_2 \oplus Q_1.$

а) При случай (CL): $A = \underbrace{Q_1 A Q_1}_{a_1 Q_1} + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + \underbrace{Q_2 A Q_2}_{a_2 Q_2}$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1, \Rightarrow$

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1.$

а) При случай (CL) : $A = \underbrace{Q_1 A Q_1}_{a_1 Q_1} + \underbrace{Q_1 A Q_2}_0 + \underbrace{Q_2 A Q_1}_0 + \underbrace{Q_2 A Q_2}_{a_2 Q_2}$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1$, $\Rightarrow$

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1$.

а) При случай (CL): $A = \underbrace{Q_1 A Q_1}_{a_1 Q_1} + \underbrace{Q_1 A Q_2}_0 + \underbrace{Q_2 A Q_1}_0 + \underbrace{Q_2 A Q_2}_{a_2 Q_2}$

$$\Rightarrow A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1$,

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1 \Rightarrow$

б) При случай (QU): $A = \underbrace{Q_1 A Q_1}_{a_{11} E_{11}} + \underbrace{Q_1 A Q_2}_{a_{12} E_{12}} + \underbrace{Q_2 A Q_1}_{a_{21} E_{21}} + \underbrace{Q_2 A Q_2}_{a_{22} E_{22}}$

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1$,

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1 \Rightarrow$

б) При случай (QU): $A = \underbrace{Q_1 A Q_1}_{a_{11} E_{11}} + \underbrace{Q_1 A Q_2}_{a_{12} E_{12}} + \underbrace{Q_2 A Q_1}_{a_{21} E_{21}} + \underbrace{Q_2 A Q_2}_{a_{22} E_{22}}$

$$E_{11} := Q_1, E_{22} := Q_2$$

и прилагаме Теорема 9

$$\text{за } P := Q_1, Q := Q_2$$

$$E := E_{12}, F := E_{21} = E_{12}^*$$

$\sum$
където

$$A = Q_1 A Q_1 + Q_1 A Q_2 + Q_2 A Q_1 + Q_2 A Q_2$$

случай (CL) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 0 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1$,

случай (QU) : $\dim Q_1 \text{ и } Q_2 = 1 = \dim Q_2 \text{ и } Q_1 \Rightarrow$

б) При случай (QU): $A = \underbrace{Q_1 A Q_1}_{a_{11} E_{11}} + \underbrace{Q_1 A Q_2}_{a_{12} E_{12}} + \underbrace{Q_2 A Q_1}_{a_{21} E_{21}} + \underbrace{Q_2 A Q_2}_{a_{22} E_{22}}$

$E_{11} := Q_1, E_{22} := Q_2$
 и прилагаме Теорема 9
 за $P := Q_1, Q := Q_2$
 $E := E_{12}, F := E_{21} = E_{12}^*$

$\Rightarrow A = \left. \begin{aligned} &a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} \\ &+ a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Проверка на изоморфизмите

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{aligned} &+) A + B \\ &= (a_1 + b_1) Q_1 + (a_2 + b_2) Q_2 \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{aligned} &+) A + B \\ &= (a_1 + b_1) Q_1 + (a_2 + b_2) Q_2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{aligned} +) A + B \\ = (a_1 + b_1) Q_1 + (a_2 + b_2) Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) A^* &= (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)^* \\ &= \bar{a}_1 Q_1 + \bar{a}_2 Q_2 \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{aligned} +) \quad A + B \\ = (a_1 + b_1) Q_1 + (a_2 + b_2) Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \quad A^* &= (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)^* \\ &= \bar{a}_1 Q_1 + \bar{a}_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}^* \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Проверка на изоморфизмите
случай (QU) : нека $\rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Проверка на изоморфизмите
случай (QU) : нека $\rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 +) \quad A + B &= (a_{11} + b_{11})E_{11} + (a_{12} + b_{12})E_{12} \\
 &+ (a_{21} + b_{21})E_{21} + (a_{22} + b_{22})E_{22} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите
 случай (QU) : нека $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} *) \quad A^* &= \\ &= \bar{a}_{11}E_{11}^* + \bar{a}_{12}E_{12}^* \\ &+ \bar{a}_{21}E_{21}^* + \bar{a}_{22}E_{22}^* \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (QU) : нека

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$*) A^* =$$

$$\begin{aligned} &= \bar{a}_{11}E_{11}^* + \bar{a}_{12}E_{12}^* \\ &+ \bar{a}_{21}E_{21}^* + \bar{a}_{22}E_{22}^* \\ &= \bar{a}_{11}E_{11} + \bar{a}_{21}E_{12} \\ &+ \bar{a}_{12}E_{21} + \bar{a}_{22}E_{22}^* \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (QU) : нека

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$*$) $A^* =$

$$= \bar{a}_{11}E_{11}^* + \bar{a}_{12}E_{12}^*$$

$$+ \bar{a}_{21}E_{21}^* + \bar{a}_{22}E_{22}^*$$

$$= \bar{a}_{11}E_{11} + \bar{a}_{21}E_{12}$$

$$+ \bar{a}_{12}E_{21} + \bar{a}_{22}E_{22}^*$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^*$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

1) $\uparrow$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1) \hat{1} &= \\ &= 1Q_1 + 1Q_2 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (QU) : нека

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$1) \hat{I} =$$

$$= 1Q_1 + 1Q_2$$

$$= 1E_{11} + 0E_{12}$$

$$+ 0E_{21} + 1E_{22}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (QU) : нека

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$1) \hat{I} =$$

$$= 1Q_1 + 1Q_2$$

$$= 1E_{11} + 0E_{12}$$

$$+ 0E_{21} + 1E_{22}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Забележете: (по условие)

Q_1, Q_2 - дизюнктивни

$$\Rightarrow Q_1 \hat{I} Q_2 = \hat{0}$$

$$= Q_2 \hat{I} Q_1$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

×) AB

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\times) AB = (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(b_1 Q_1 + b_2 Q_2)$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \times) AB &= (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(b_1 Q_1 + b_2 Q_2) \\ &= a_1 b_1 Q_1 Q_1 + a_1 b_2 Q_1 Q_2 \\ &\quad + a_2 b_1 Q_2 Q_1 + a_2 b_2 Q_2 Q_2 \end{aligned}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL): нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\times) AB = (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(b_1 Q_1 + b_2 Q_2)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{Q_1 Q_1}_{Q_1} + a_1 b_2 \underbrace{Q_1 Q_2}_{\hat{0}}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{Q_2 Q_1}_{\hat{0}} + a_2 b_2 \underbrace{Q_2 Q_2}_{Q_2}$$

Забележете: (по условие)

Q_1, Q_2 - дизюнктивни

$$\Rightarrow Q_1 Q_2 = \hat{0} \\ = Q_2 Q_1$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\times) AB =$$

$$= a_1 b_1 Q_1 + a_2 b_2 Q_2$$

Проверка на изоморфизмите

случай (CL) : нека $\rightarrow \begin{cases} A = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ B = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 & \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

×) $AB =$

$$= a_1 b_1 Q_1 + a_2 b_2 Q_2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Проверка на изоморфизмите

случай (QU) : нека $\rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22} \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$\times) AB =$

ФИНАЛНО

$$\left\{ \begin{array}{l} = (a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\ \quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}) \\ \times (b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\ \quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22}) \end{array} \right\} \begin{array}{c} ? \\ \rightarrow \\ \left(\begin{array}{cc} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{array} \right) \\ \leftarrow \\ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

×) $AB =$

$$\begin{aligned}
 &= (a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} \\
 &\quad + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}) \\
 &\times (b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} \\
 &\quad + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22})
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{c} \text{ФИНАЛНО} \\ ? \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\times) AB =$$

$$= (a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}) \times (b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22})$$

ФИНАЛНО

?

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	E_{11}	E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{11}	E_{12}
E_{21}	E_{21}	E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{21}	E_{22}

Таблица
за
умножение
на E_{jk}

←
виз →

$$\times) AB =$$

$$= (a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}) \times (b_{11}E_{11} + b_{12}E_{12} + b_{21}E_{21} + b_{22}E_{22})$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})E_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})E_{12} + (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})E_{21} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})E_{22}$$

ФИНАЛНО

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	E_{11}	E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{11}	E_{12}
E_{21}	E_{21}	E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{21}	E_{22}

Таблица
за
умножение
на E_{jk}

←
виз →

ФИНАЛНО

- аргументация на таблицата за умножение
на E_{jk}

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	E_{11}	E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{11}	E_{12}
E_{21}	E_{21}	E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{21}	E_{22}

ФИНАЛНО

- аргументация на таблицата за умножение
на E_{jk}

Не нулевите части съответстват на $(\phi 3) - (\phi 6)$
от Теорема 9.

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	E_{11}	E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{11}	E_{12}
E_{21}	E_{21}	E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{21}	E_{22}

ФИНАЛНО

-аргументация на таблицата за умножение
на E_{jk}

Ненулелите части съответстват на $(\phi 3) - (\phi 6)$
от Теорема 9.

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	E_{11}	E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{11}	E_{12}
E_{21}	E_{21}	E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{21}	E_{22}

Нулите следват допълнително от дизюнктивността на $Q_1 = E_{11}, Q_2 = E_{22}$:

$$Q_1 Q_2 = \hat{0} = Q_2 Q_1 \iff E_{11} E_{22} = \hat{0} = E_{22} E_{11} .$$

Например: $E_{12} E_{11} = (E_{12} E_{22}) E_{11} = E_{12} (E_{22} E_{11}) = \hat{0} .$

ФИНАЛНО

- аргументация на таблицата за умножение
на E_{jk}

Ненулелите части съответстват на $(\phi 3) - (\phi 6)$
от Теорема 9.

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	E_{11}	E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{12}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{11}	E_{12}
E_{21}	E_{21}	E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$
E_{22}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	E_{21}	E_{22}

Нулите следват допълнително от дизюнктивността на $Q_1 = E_{11}, Q_2 = E_{22}$:

$$Q_1 Q_2 = \hat{0} = Q_2 Q_1 \iff E_{11} E_{22} = \hat{0} = E_{22} E_{11}.$$

$$\text{Например: } E_{12} E_{11} = (E_{12} E_{22}) E_{11} = E_{12} (E_{22} E_{11}) = \hat{0}.$$

Теорема 10
е доказана