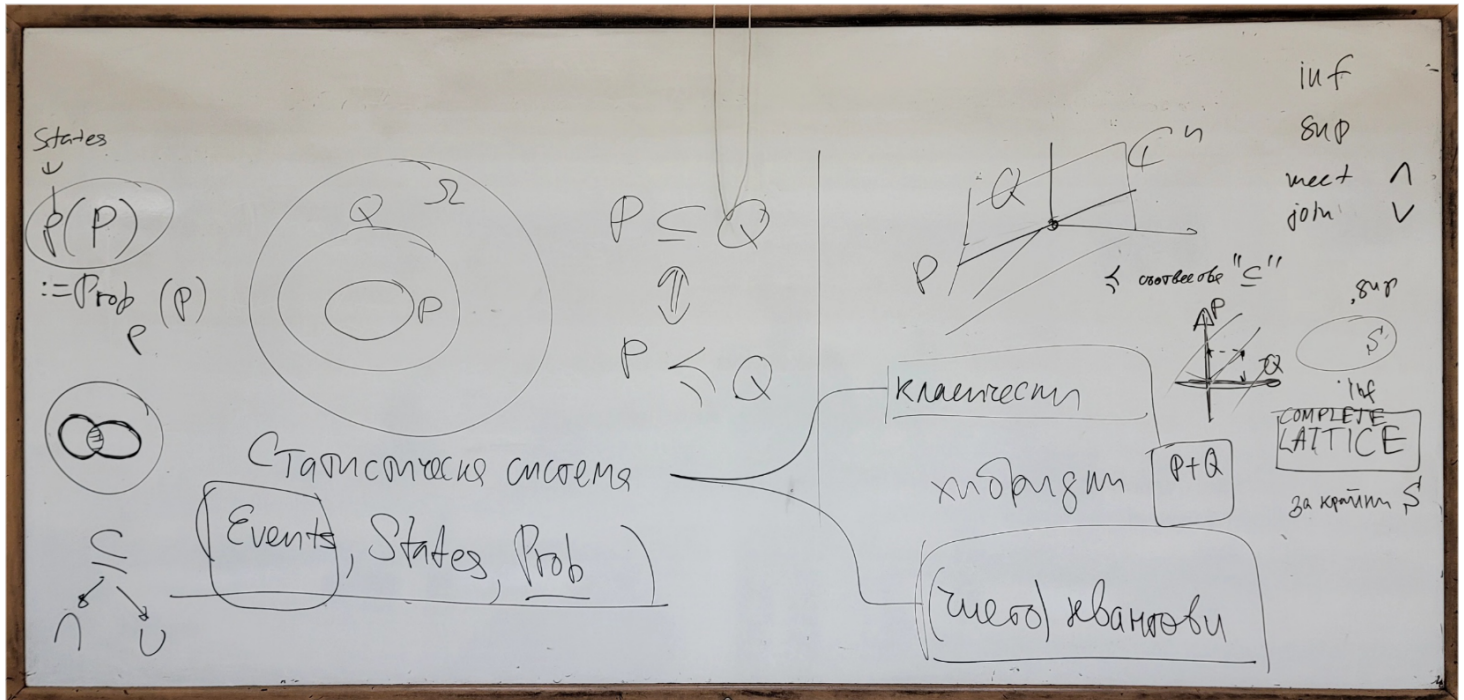




Това са предварителни бележки от дъската, които са правени през първите два учебни часа паралелно на презентацията.

През третия учебен час лекцията продължи на дъска. Следват снимки на изписаните дъски и записки към тях.

Гл. сис. система: $Events, States, Prob: Events \times States \rightarrow [0,1]$

- В $Events$ имаме ^{двуместна} бинарна релация: " $\preceq$ "
или свойството: $P \preceq Q \iff \forall r \in States: r(P) \leq r(Q)$
- В $Events$ имаме бинарни операции: $\wedge, \vee$: все свойството

$$R = P \wedge Q \iff \begin{cases} R \preceq P \text{ и } R \preceq Q \\ \text{за всяко } S \preceq P \text{ и } S \preceq Q \text{ следва, че } S \preceq R \end{cases}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{св. } R \text{ е inf} \\ \text{(по отношение на } P \text{ и } Q) \end{array} \right\}$
- В $Events$ имаме ^(единична) операция: $\perp: P \mapsto P^\perp$ все свойството $\forall r \in States: r(P^\perp) = 1 - r(P)$
- $States = \text{ProbDist}(Events)$

акцион

$\perp$

ще го определим сега

Изходното понятие в този курс е "статистическа система", при това, те ще бъдат "крайни" в определен смисъл, който ще определим в следващата лекция.

Статистическите системи ще включват основните примери на $\left\{ \begin{array}{l} \text{класически и} \\ \text{чисто квантови} \end{array} \right\}$ като между тях ще е обичайния случай на "хибридни".

Статистическа сис. система се задава от $Events, States, Prob: Events \times States \rightarrow [0,1]$
 две множества $\xrightarrow{\text{и функция}}$ $(P, r) \mapsto \text{Prob}_r(P)$
 все ще използва само това означение $\Rightarrow \boxed{r(P)}$

- В $Events$ имаме двуместна (бинарна) релация / binary relation: " $\preceq$ "
 Тя има свойството: $P \preceq Q \iff \forall r \in States: r(P) \leq r(Q)$
 (когато $P, Q \in Events$)
- В $Events$ има бинарни операции: " $\wedge$ ", " $\vee$ ", които ще наричаме (квантови) конюнкция / conjunction и дизюнкция / disjunction, съответно.
 $R = P \wedge Q$ (за $P, Q, R \in Events$)

$$\iff \begin{cases} R \preceq P \text{ и } R \preceq Q \\ \text{за всяко } S \in Events: \text{от } S \preceq P \text{ и } S \preceq Q \text{ следва, че } S \preceq R \end{cases}$$

V се определя дуално (т.е., с обръщане на $\leq$ в $\geq$)

- В $\mathcal{E}vents$ има едноместна (унарна) операция / unary operation " $\perp$ " - отрицание / negation. Тя има свойството: за всяко $P \in \mathcal{E}vents$ и $p \in \mathcal{S}tates$

$$\text{Prob}_p(P^\perp) = 1 - \text{Prob}_p(P)$$

- Ще определим

$\mathcal{S}tates := \underbrace{\text{Prob. Dist.}}_{\text{}}(\mathcal{E}vents)$

множеството на всички вероятностни
разпределения над $\mathcal{E}vents$

↪ следва от определението

Определение Вероятностно разпределение (вероятност) върху множеството Events е функция $p: \text{Events} \rightarrow [0,1]$ със свойства:

а) адитивност: за $P \preceq Q$ ($P, Q \in \text{Events}$) $p(P) + p(\underbrace{Q \wedge P^\perp}_{Q \setminus P}) = p(Q)$
 $Q \setminus P$ - по оп.

б) нормировка: $p(\hat{1}) = 1$

Забележка: В Events има $\hat{0}, \hat{1} \in \text{Events}$: $\hat{0} \preceq P \preceq \hat{1}$ за $\forall P \in \text{Events}$

$\text{Prob.Dist.}(\text{Events}) := \{ p: \text{Event} \rightarrow [0,1] \mid p \text{ е вероятност върху } \text{Events} \}$
 || аксиома
 States

Определение Вероятностно разпределение (вероятност) върху Events е функция $p: \text{Events} \rightarrow [0,1]$, която има свойствата

а) адитивност: за всеки $P, Q \in \text{Events}$, такива че $P \preceq Q$ имаме

$$p(P) + p(\underbrace{Q \wedge P^\perp}_{:= Q \setminus P}) = p(Q);$$

б) нормировка: $p(\hat{1}) = 1$.

□

Забележка В Events има $\hat{0}$ и $\hat{1}$ ($\in \text{Events}$) такива, че $\hat{0} \preceq P \preceq \hat{1}$ за всяко $P \in \text{Events}$.
 да се отлизават от числата 0 и 1.

Така, $\text{Prob.Dist.}(\text{Events}) := \{ p \mid p \text{ е вероятностно разпределение върху } \text{Events} \}$

Следват двата основни примера (модела) на статистически системи и тяхната съпоставка

Класически системи (ниво n) ← крайни — определя се от $\Omega = \{0, 1, \dots, n-1\}$ $Events := \mathcal{P}(\Omega) = \{P \mid P \subseteq \Omega\}$ мнжества $\preceq := \subseteq$ т.е. $P \preceq S \iff P \subseteq S$ $\hat{0}, \hat{1}$: $\hat{0} = \emptyset, \hat{1} = \Omega$ $\wedge, \vee$: $P \wedge Q = P \cap Q, P \vee Q = P \cup Q$ $\perp$: $P^\perp := \Omega \setminus P$ P е вероятност разпр. $P(P) = \sum_{\omega \in P} p(\omega)$ $p(0) + p(1) + \dots + p(n-1) = 1$	Чисто квантови системи (ниво n) — определя се от ^{хилбертово} <u>мнж. прво</u> $\mathbb{C}^n$ с базис $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ $Events := \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) :=$ ^{мнж. на} <u>всички мнж. подпространства</u> на $\mathbb{C}^n$ — свързано по с уговорката, че P и S са мнж. подпр. $\hat{0} = \{0\}, \hat{1} = \mathbb{C}^n$ $P \wedge Q = P \cap Q, P \vee Q = P + Q$ $P^\perp :=$ мнж. подпространство е ортогонално допълнение на P P ще бъде чисто състояние ($\iff \exists$ единствен вект. $\Psi \in \mathbb{C}^n$) $P(P) = \ \Psi\ ^2$ орт. проектор върху P
---	--

Класическа система
(крайна, от ниво n)

Та се определя от едно крайно множество Ω с n елемента. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\Omega := \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$Events := \mathcal{P}(\Omega) :=$ степенното множество над $\Omega :=$ множеството на всички подмножества на Ω .
Така, в случая $P \in Events$, събитие, това е подмножество $P \subseteq \Omega$.

(чисто) квантова система
(крайна, от ниво n)

Та се определя от едно крайно-мерно хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с размерност $\dim \mathcal{H} = n$. Без ограничение на общността, можем да считаме, че $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.
 $\mathbb{C}^n$ е хилбертовото n -мерно пространство с избран ортонормиран базис $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$.

$Events := \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) :=$ множеството на линейни подпространства на $\mathbb{C}^n$.
Забележете: $P \in Events$, събитие, това е отново подмножество на едно фиксирано множество, в случая, на $\mathbb{C}^n$. Но събитията са подмножества на $\mathbb{C}^n$ от много специален вид: те са линейни подпространства на $\mathbb{C}^n$.

Класическа система
(крайна, от ниво n)

За $P, Q \in \text{Events}$:

$$P \leq Q \iff P \subseteq Q, \text{ т.е.,}$$

P е подмножество на Q

$$\hat{0} = \phi, \quad \hat{1} = \Omega$$

За $P, Q \in \text{Events}$:

$$P \wedge Q = P \cap Q$$

-най-малката, съвместимостта $P \cap Q$ е най-голямото подмножество, което се съдържа, както в P , така и в Q

За $P, Q \in \text{Events}$:

$$P \vee Q = P \cup Q$$

- по дуалния на горния аргумент

(чисто) квантова система
(крайна, от ниво n)

За $P, Q \in \text{Events}$: (отново)

$$P \leq Q \iff P \subseteq Q, \text{ т.е.,}$$

P е линейно подпространство на Q .

$$\hat{0} = \{0\} - \text{нулевото линейно}$$

пространство.

Внимание: ϕ не е линейно пространство, защото $0 \notin \phi$.

От друга страна всяко линейно подпространство $P \subseteq \mathbb{C}^n$ има нула, т.е., $\{0\} \subseteq P$, т.е., $\hat{0} \leq P$

$$\hat{1} = \mathbb{C}^n - \text{това е линейно подпространство.}$$

За $P, Q \in \text{Events}$:

$$P \wedge Q = P \cap Q$$

-аргументът от ляво остава, понеже съвместимостта на две линейни подпространства е винаги линейно подпространство.

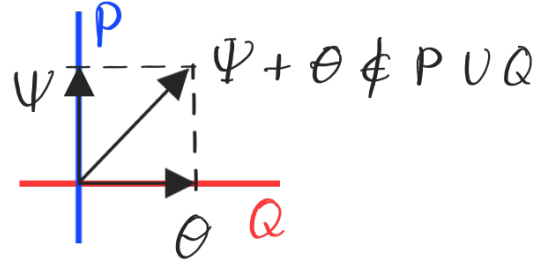
За $P, Q \in \text{Events}$:

$$P \vee Q = P + Q$$

$$\neq P \cup Q \text{ в общия случай}$$

Следва пояснение:

Пояснение: В общия случай обединението на две линейни подпространства не е линейно подпространство, понеже е възможно, ако $\Psi \in P$ и $\Theta \in Q$, то $\Psi + \Theta \notin P \cup Q$



Продължаваме:

Класическа система
(крайна, от ниво n)

(чисто) квантова система
(крайна, от ниво n)

За $P \in \text{Events}$: $P^\perp = \Omega \setminus P$
- в следващата лекция ще видим,
че $P^\perp$ в този случай е еднозначно
определено, докато в квантовия
случай - не е!

За $P \in \text{Events}$: $P^\perp :=$ линейното
подпространство на $\mathbb{C}^n$, което се
състои от всички вектори орто-
гонални на P := ортогонално
допълнение на P .
Внимание $\mathbb{C}^n \setminus P$ не е
никога линейно подпространство.

p е вероятностно разпределение
над Events , ако

$$p(P) = \sum_{\omega \in P} p(\{\omega\}) \text{ и}$$

$$p(\{0\}) + p(\{1\}) + \dots + p(\{n-1\}) = 1$$

- така, States е симплекс.

Не тривиален резултат гласи:

p е чисто състояние $\iff$
съществува единичен вектор
 $\Psi \in \mathbb{C}^n$ (т.е., $\|\Psi\| = 1$ -
вектор с дължина 1), така че

$$p(P) = \|\text{Ort. Proj.}_P(\Psi)\|^2$$

= квадрата на дължината на
ортогоналната проекция на Ψ
върху P .