

Лема $VCW \Leftrightarrow V$ и W са решетъчни обединения на елементи от дизъюнктивна система

$P^* = P = P^2$
 $P = \Pi \Pi_V$
 $\Phi \in V$
 $\Phi \perp \bar{\Phi}$
 $P\Phi = \Phi$
 $V_1 \subseteq V_2$
 $\Pi_{V_1} \Pi_{V_2} = \Pi_{V_1}$
 $= \Pi_{V_1}$

$W \setminus V = W \wedge V^\perp$

$\mathbb{R}^3$

булев алгебра

Комутиране
 $=$ пресичане под прав ъгол

$\dim V = l = \dim W$
 $\dim L = \dim M = \dim N = 1$

$L = V \wedge W$
 $M = V \wedge L^\perp, N = W \wedge L^\perp$

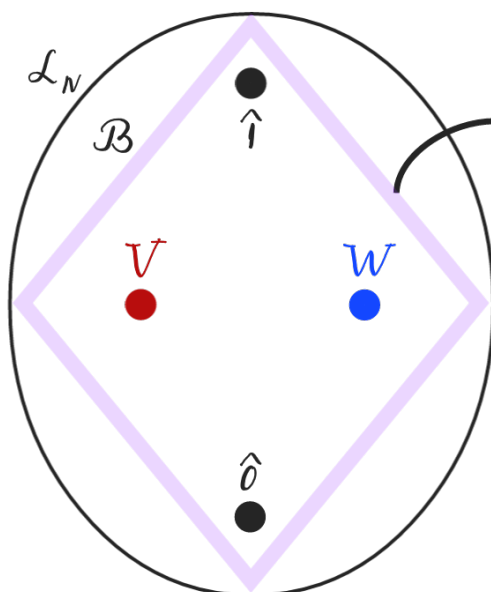
$V_1 \perp V_2$
 $\Pi_{V_1} \Pi_{V_2} = 0$
 $\Pi_{V_1} + \Pi_{V_2}$
 е орт. пр.

$\langle A\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle$
 $(AB)^* = B^* A^*$

Главни формули от часът 1 на презентацията

Указание за доказателството на твърденията от слайдове 16-17: Изхожда се от Лема Нека V, W са елементи на една ортомодуларна решетка (например, $\mathcal{L}_N$) Тогава VCW (т.е., V, W комутират в смисъл на орторешетки) $\Leftrightarrow V$ и W могат да се представят като (решетъчни) обединения на елементи от една обща дизъюнктивна система.

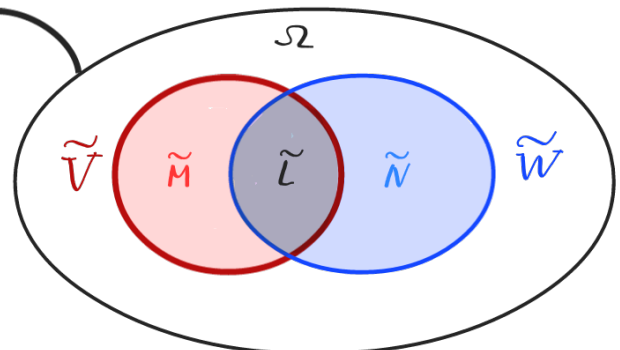
Доказателство VCW по определение означава, че V и W се съдържат в обща булева подалгебра $\mathcal{B}$. Следвайки схемата по-долу правим следните стъпки.



1) Реализираме $\mathcal{B}$ като $\mathcal{P}(\Omega)$.

Фиг. 1

$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(\Omega)$



2) На V и W съответстват подмножества на Ω

- оградени в тъмно червен и тъмно син контур: $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$.

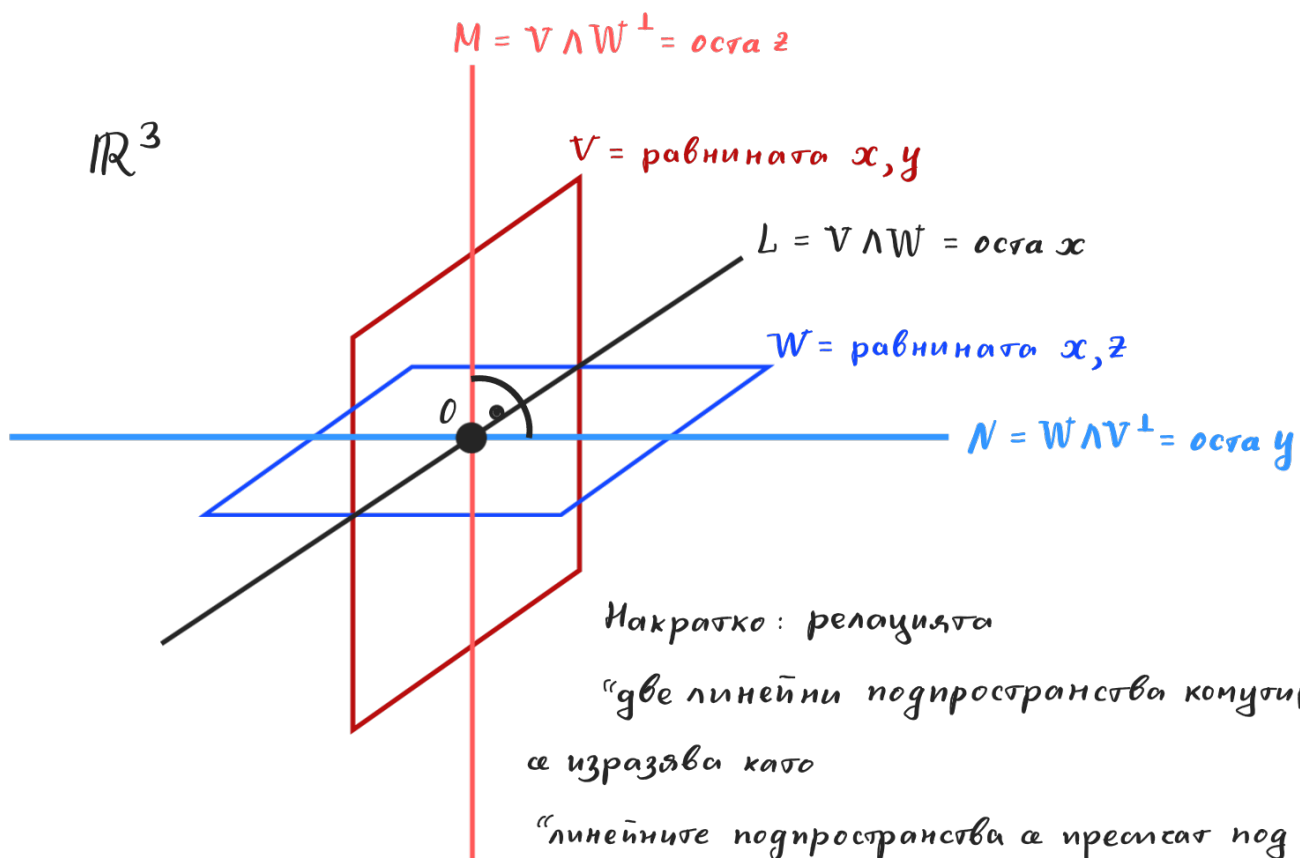
3) Тогава обединението на множествата $\tilde{V} \cup \tilde{W}$ се разбива в обединение на три дизъюнктивни подмножества

- $\tilde{M} :=$ допълнението на множеството $\tilde{W}$ в $\tilde{V}$
- $\tilde{N} :=$ допълнението на множеството $\tilde{V}$ в $\tilde{W}$
- $\tilde{L} :=$ сечението на множествата $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$

Ако се върнем в $\mathcal{L}_N$ на $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ и $\tilde{L}$ съответстват

$$M = V \wedge W^\perp, \quad N = W \wedge V^\perp, \quad L = V \wedge W$$

Реализация в $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ за илюстрация:



Фиг. 2

Релацията: “две линейни подпространства са дизъюнктивни в $\mathcal{L}_N$ ” е по-силна и се изразява като “линейните подпространства са взаимно ортогонални” и частно, тогава те се пресичат само в нулата. □

И така, дясната страна на Фиг. 1 изразява класическа картина, която може да се направи само за съвместно измерими (т.е., за комутиращи) квантови събития.

Допълнителни указания за доказателствата на Теорема 10-12 (извън курса).

Горната Лема ни дава следното

Следствие $V \perp W \Leftrightarrow$ съществува ортонормиран базис $f_1, \dots, f_N$ на $\mathbb{C}^N$, така че $f_1, \dots, f_m$ е базис на V , а $f_{k+1}, \dots, f_{k+n}$ е базис на W .

При това, сечението $L = V \cap W$ е ненулево $\Leftrightarrow k < m$ и в този случай базис на L е $f_{k+1}, \dots, f_m$.

В частност, V и W са дизюнктивни $\Leftrightarrow k \geq m$

Това, което следва по-натък е да се приложи Теорема 7