

Квантовият бит (q -бит) "от а до я"

1. Наблюдаеми - общ вид

Наблюдаема на q -бит - това е $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}$ за
 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$ (при наложените връзки от $A = A^*$)

Налагаме $A = A^*$: това е $\Leftrightarrow a_{11} = \bar{a}_{11}$, $a_{22} = \bar{a}_{22}$ - две реални числа
 $a_{21} = \bar{a}_{12}$ - едно комплексно

Така, общият вид на наблюдаема на q -бит е $A = \begin{pmatrix} a & x-iy \\ x+iy & b \end{pmatrix}$, определен от четири произволни реални числа: a, b, x, y

Еквивалентно: $\left\{ \begin{array}{l} a := r+z \\ b := r-z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r := \frac{1}{2}(a+b) \\ z := \frac{1}{2}(a-b) \end{array} \right\}$, където r и z са отново реални и произволни.

Така: $A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$ за $(x, y, z, r) \in \mathbb{R}^4$

Оказва се удобно да предефинираме $x \mapsto \frac{x}{2}$, $y \mapsto \frac{y}{2}$, $z \mapsto \frac{z}{2}$, $r \mapsto \frac{r}{2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$ е общият вид на наблюдаема на q -бит, определен от четири произволни реални числа $(x, y, z, r) \in \mathbb{R}^4$

Тогава $\text{tr } A = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (r+z + r-z) = r$

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{4} ((r+z)(r-z) - (x+iy)(x-iy)) \\ &= \frac{1}{4} (r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) \end{aligned}$$

2. Спектър

$$\det(A - \lambda \hat{I}) = 0 \iff \cancel{\frac{1}{4}} \det \begin{pmatrix} r+z-2\lambda & x-iy \\ x+iy & r-z-2\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (r-2\lambda)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

3. Събдитие: $Q^* = Q = Q^2$ - обича ли?

според точка 1 $\rightarrow \Updownarrow$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix} \quad \text{остава да се наложи}$$

Има два пътя

а) Директно налагаме $\cancel{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}^2$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} 2(r+z) &= (r+z)^2 + (x+iy)(x-iy), & 2(x-iy) &= (r+z)(x-iy) + (x-iy)(r-z), \\ 2(x+iy) &= (x+iy)(r+z) + (r-z)(x+iy), & 2(r-z) &= (x-iy)(x+iy) + (r-z)^2 \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} 2r+2z-r^2-2rz &= x^2+y^2+z^2, & (x-iy)(r-1) &= 0 \\ (x+iy)(r-1) &= 0, & \pm, & 2r-2z-r^2+2rz = x^2+y^2+z^2 \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} (x+iy)(r-1) &= 0, & x^2+y^2+z^2 &= r(2-r) \\ (x-iy)(r-1) &= 0, & z(r-1) &= 0 \end{aligned}$$

случай 1: $(x, y, z) \neq (0, 0, 0) : r-1 = 0$

случай 2: $(x, y, z) = (0, 0, 0) : r(2-r) = 0$

Окончателно

случай 1: $r = 1, x^2 + y^2 + z^2 = r(2-r) = 1 \quad : \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$

случай 2: $\begin{cases} r = 0 = x = y = z & : \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ r = 2, x = y = z = 0 & : \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Тези случаи могат да се представят и така:

(↑) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}$ - единичното събитие

(e) $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$ за произволни $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, за които $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 ↑ това са елементарните събития

(ô) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$ - нулевото събитие

Забележете: понеже системата е от ниво 2 ("бит"), то $\hat{1}$ е от ниво 2, $\hat{0}$ е от ниво 0 и всички останали събития Q са от ниво 1 - т.е., те са елементарни събития.

б) Друг начин за определяне на общия вид на събитие на q -бит, който води по-бързо до горния резултат, е през спектралната теорема, според която самоспрегнатата матрица $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix} (= Q^*)$ ще бъде събитие

$\Leftrightarrow$ собствените стойности $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ на Q са 0 или 1.
 ↓ определени в точка 1

Имаме следните случаи:

$$(\hat{1}) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1. \text{ Тогава } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}$$

$$(\hat{0}) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \text{ Тогава } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$$

$$(e) \quad 0 = \lambda_1 < \lambda_2 = 1. \text{ Тогава } \begin{aligned} r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 0 \\ r + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{т.е., } Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \text{ за } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

да го означим

$$P_{\vec{u}} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

за $\vec{u} = (x, y, z)$
-вектор върху
единичната
сфера S^2 в $\mathbb{R}^3$

ниво 2:



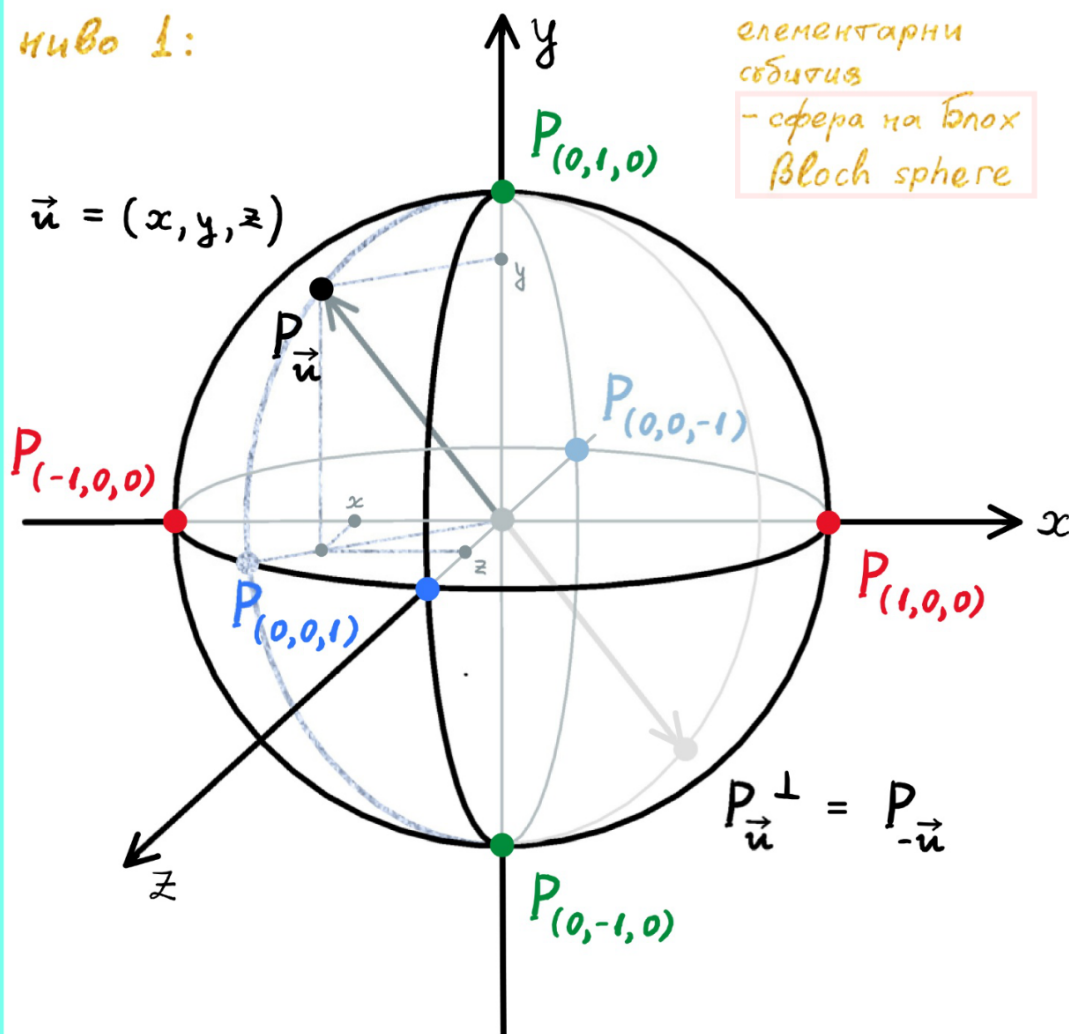
Имаме следната
геометрична
картина

ниво 1:

$$\vec{u} = (x, y, z)$$

елементарни
сбичтия

-сфера на Блох
Bloch sphere



ниво 0:



Забележете: отрицанието на $P_{\vec{u}}$ е $P_{\vec{u}}^{\perp} = \hat{I} - P_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-z & x+iy \\ x-iy & 1+z \end{pmatrix}$$

Тоеест: $P_{\vec{u}}^{\perp} = P_{-\vec{u}}$ - събитието, съответстващо на диаметрално противоположната точка от сферата на Блох

Така, всяка двойка диаметрално противоположни точки от сферата на Блох отговарят на един максимален експеримент за q -бит. Всички те са несъвместими два по два. На максималните експерименти отговарят ортонормирани базици в $\mathbb{C}^2$, някои от които ще построим по-долу.

↓ НОВА ТОЧКА

4. Съответствие между самоспрегнати матрици от ранг 1 и вектори в $\mathbb{C}^N$.

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}$ е $N \times N$ комплексна матрица. От линейната алгебра

е известно, че A има ранг 1 $\iff A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} (\phi_1, \dots, \phi_N) = \begin{pmatrix} \psi_1 \phi_1 & \dots & \psi_1 \phi_N \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_N \phi_1 & \dots & \psi_N \phi_N \end{pmatrix}$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ и $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$ от $\mathbb{C}^N$.

Теорема 1 Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} = A^*$ е самоспрегнатата. Тогава

A има ранг 1 $\iff A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N) = \begin{pmatrix} \psi_1 \bar{\psi}_1 & \dots & \psi_1 \bar{\psi}_N \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_N \bar{\psi}_1 & \dots & \psi_N \bar{\psi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \dots & \bar{\psi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_N \end{pmatrix}^{\dagger}$ - в бра-кет означения

за $\Psi \in \mathbb{C}^N$

Доказателство Изхождаме от началното наблюдение

A има ранг 1 $\iff A = \Psi \Phi^*$ - за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^N$

Освен това : $(\Psi \Phi^*)^* = \Phi \Psi^*$

Тогава $\Leftrightarrow$) Ако $A = \Psi \Psi^*$, то $A = A^*$ и A има ранг 1.

$\Rightarrow$) Нека $A = A^*$ и A има ранг 1 ($\Rightarrow A = \Psi_1 \Phi_1^*$, за $\Psi_1, \Phi_1 \in \mathbb{C}^N$).

Тогава $\Psi_1 \Phi_1^* = \Phi_1 \Psi_1^* \mid \cdot \Psi_1 \Rightarrow \underbrace{\Psi_1 (\Phi_1^* \Psi_1)}_{\langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle} = \underbrace{\Phi_1 (\Psi_1^* \Psi_1)}_{\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle} = \|\Psi_1\|^2 \neq 0$

$\Rightarrow \Phi_1 = \underbrace{\frac{\langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle}{\|\Psi_1\|^2}}_{:= \bar{z}} \Psi_1 = \bar{z} \Psi_1$ за $z \in \mathbb{C}$.

Заместване: $A = \Psi_1 \Phi_1^* = z \Psi_1 \Psi_1^*$.

Налагаме пак $A = A^*$ $\Leftrightarrow z = \bar{z}$, т.е., $z \in \mathbb{R}$
 $z \Psi_1 \Psi_1^* = \bar{z} \Psi_1 \Psi_1^*$

$\Rightarrow z = \pm \lambda^2$ за $\lambda \in \mathbb{R}$ и полагайки $\Psi = \lambda \Psi_1$ получаваме:

$$A = \pm \Psi \Psi^*$$

□

Следствие 2. Ако A е самоспрегатата матрица от ранг 1, то се случва точно една от следните три алтернативи

(+) $A = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за ненулев $\Psi \in \mathbb{C}^N$;

в този случай A е ненулева и положително-дефинитна.

(0) $A = \hat{0}$.

(-) $A = -|\Psi\rangle\langle\Psi|$ за ненулев $\Psi \in \mathbb{C}^N$;

в този случай A е ненулева и отрицателно-дефинитна.

↑ **НОВА ТОЧКА**

5. Вектори на елементарните събития за q -бит

От миналите лекции знаем, че

Q е елементарно събитие $\Leftrightarrow Q = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^N$ определен с точност до $\Psi \mapsto e^{i\varphi}\Psi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$.

В случая на q -бит ($N=2$)

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \text{ за } x^2+y^2+z^2=1 \text{ и } \det Q = 1, \operatorname{tr} Q = 1,$$

което означава, че Q има ранг 1 и по Следствие 2 за Q се реализира алтернативата (+).

Така: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = |\Psi_{(x,y,z)}\rangle\langle\Psi_{(x,y,z)}|$ за единичен вектор

$$\Psi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y,z) \\ \psi_2(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \text{ параметризиран с } \vec{y} = (x,y,z) \in \mathbb{S}^2$$

и определен с точност до колинеарност.

Примери за $Q (= P_{(x,y,z)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = |\Psi_{(x,y,z)}\rangle\langle\Psi_{(x,y,z)}|$

$$(z) \quad (x,y,z) = (0,0,\pm 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{(0,0,-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$P_{(0,0,1)} + P_{(0,0,-1)} = \hat{I}$ е разбиване на единицата, на което отговаря стандартният ортонормиран базис $e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ на $\mathbb{C}^2$

ВАЖНО: Стандартните базиси вече ще се номерират от 0

и ще означаваме $|e_0\rangle =: |0\rangle$ и $|e_1\rangle =: |1\rangle$

вече стои информация
за базисен вектор

Това са нови, различни бра-кет означения, които ще наричаме "бра-кет означения от втори вид"

Така, при бра-кет означенията от втория вид " $|0\rangle$ " и " $|1\rangle$ " са цялостни символи, които не се разбиват на части и които винаги се отнасят до ортонормиран базис.

След малко ще въведем такива означения и за други ортонормирани базиси:

$$\begin{aligned} &|\rightarrow\rangle \text{ и } |\leftarrow\rangle \\ &|\uparrow\rangle \text{ и } |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

Продължаваме с примерите:

$$(x) \quad (x, y, z) = (\pm 1, 0, 0) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(-1,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

$P_{(1,0,0)} + P_{(-1,0,0)} = \hat{1}$ е разбиване на единицата, на което отговаря друг ортонормиран базис на $\mathbb{C}^2$:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &=: |f_0\rangle =: |\rightarrow\rangle \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &=: |f_1\rangle =: |\leftarrow\rangle \end{aligned} \right\} \text{ последните са в бра-кет означения от втория вид}$$

$$(y) \quad (x, y, z) = (0, \pm 1, 0) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(0,-1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

$P_{(0,1,0)} + P_{(0,-1,0)} = \hat{1}$ е разбиване на единицата, на което отговаря друг ортонормиран базис на $\mathbb{C}^2$:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &=: |g_0\rangle =: |\uparrow\rangle \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &=: |g_1\rangle =: |\downarrow\rangle \end{aligned} \right\} \text{ последните са в бра-кет означения от втория вид}$$

Интересна забележка (извън курса)

Построените в горните примери три ортонормирани базиси на $\mathbb{C}^2$ се наричат "взаимно безпристрасни" / "mutually unbiased"

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Mutually_unbiased_bases

Те имат свойството, че всяко елементарно събитие, което идва от единия базис е равно вероятно спрямо другия базис.

Математически това означава, че всяка ос на единия базис сключва равни ъгли с осите на другия базис.

6. Състояния на q -бит

Според аксиомите: състояние - това е линейен функционал

$$\rho(A) = \rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} (= \rho(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})) - \text{линейна функция на 4 комплексни аргумента}$$

такъв, че $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A$ ("положителност")

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ ("нормираност")}$$

Проблем: да се опише множеството на всички състояния като изпъкнало множество и да се опишат чистите състояния, които са екстремалните точки на това изпъкнало множество.

а) Най-напред: да опишем линейните функционали

$$\rho(A) = \rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =: \rho_{11} a_{11} + \rho_{21} a_{12} + \rho_{12} a_{21} + \rho_{22} a_{22}$$

-определя се от 4 комплексни коефициента, които организираме като матрица

$$\hat{\rho} := \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} - \text{нарича се "матрица на плътността на състоянието"}$$

$$\text{Тогава: } \rho(A) = \rho_{11} a_{11} + \rho_{21} a_{12} + \rho_{12} a_{21} + \rho_{22} a_{22} = \text{tr}(\hat{\rho} A)$$

↙ следва

Наистина:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) &= \text{tr} \begin{pmatrix} \rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21} & \rho_{11} a_{12} + \rho_{12} a_{22} \\ \rho_{21} a_{11} + \rho_{22} a_{21} & \rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21} + \rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22} \end{aligned}$$

б) И така, състоянията се характеризират еднозначно от матрици. За q -бит, това са отново 2×2 комплексни матрици.

За да определим обаче, кои матрици задават състояния и как се изразява операцията на смесване на състояния, чрез съответните им матрици ще приложим следните теореми.

Те са валидни не само за q -бит, но и за общи системи.

Теорема 3. Една квадратна матрица A е матрица на плътността $\hat{\rho} = A$ на състояние $\rho \iff A$ е положително дефинитна матрица такава, че $\text{tr} A = 1$.

Напомняне от линейната алгебра, че

A е положително дефинитна матрица

$\iff A$ е самоспирената матрица, която има неотрицателни собствени стойности

Теорема 4 Нека ρ, ρ_1, ρ_2 - състояния, а $\hat{\rho}, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ са съответстващите им матрици на плътността. Тогава

$\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ е смес $\iff \hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$ - равенство на матрици
(Напомняме: $q_1, q_2 \in [0, 1]$, $q_1 + q_2 = 1$ са теглата на сместа.)

Доказателствата ще дадем в точка 7.

Започваме с прилагането на Теорема 3 за $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$ - матрица на плътността на състояние на q -бит

$\hat{\rho}$ е самоспрегната. Според точка 1:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \text{ където } x, y, z, r \in \mathbb{R} \text{ и собствените ѝ стойности}$$

$$\text{са } 0 \leq \frac{1}{2} (r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \leq \frac{1}{2} (r + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

← заради положителната дефинитност на $\hat{\rho}$

$$\text{а следователно е } 1 = \text{tr } \hat{\rho} = r$$

Извод: матриците на плътността на състоянията на q -бит са от вида:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{(x,y,z)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \text{ за } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ така, че}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

в) Описание на операцията смесване.

Допуск: съпоставихме на състоянията на q -бит в 1-1 съответствие, точките на затвореното единично кълбо в $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Нека $\hat{\rho}_{(x,y,z)} = q_1 \hat{\rho}_{(x_1,y_1,z_1)} + q_2 \hat{\rho}_{(x_2,y_2,z_2)}$ - смес. Тогава:

$$\Leftrightarrow$$

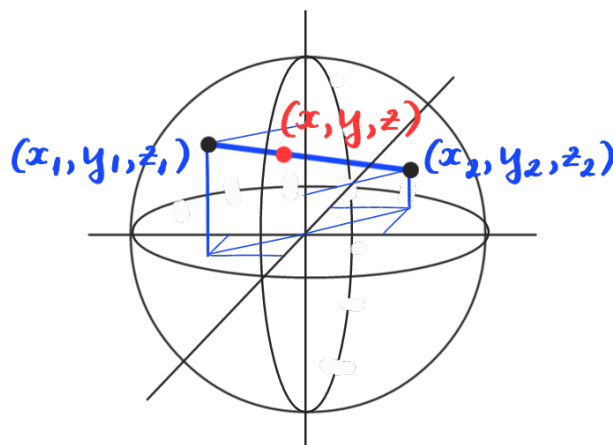
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = q_1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z_1 & x_1-iy_1 \\ x_1+iy_1 & 1-z_1 \end{pmatrix} + q_2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z_2 & x_2-iy_2 \\ x_2+iy_2 & 1-z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 + q_1 z_1 + q_2 z_2 & q_1 x_1 + q_2 x_2 + i(q_1 y_1 + q_2 y_2) \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 + i(q_1 y_1 + q_2 y_2) & q_1 + q_2 - q_1 z_1 - q_2 z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x,y,z) = q_1 (x_1,y_1,z_1) + q_2 (x_2,y_2,z_2)$$



- Извод : (1) Затвореното единично кълбо в $\mathbb{R}^3$ моделира множеството на всички състояния на q -бит като изпъкнало множество.
- (2) Чистите състояния, които са точно екстремалните точки на това изпъкнало множество съставляват границата - това е единичната сфера $\mathbb{S}^2$.
- (3) Така, чистите състояния и елементарните събития на q -бит имат единично описание - те се определят от едни и същи матрици, които съответстват на точки от $\mathbb{S}^2$.

елементарно събитие $Q = P_{(x,y,z)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \hat{\rho}(x,y,z)$ - чисто състояние (матрица на плътността)

$|\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ ($|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$)

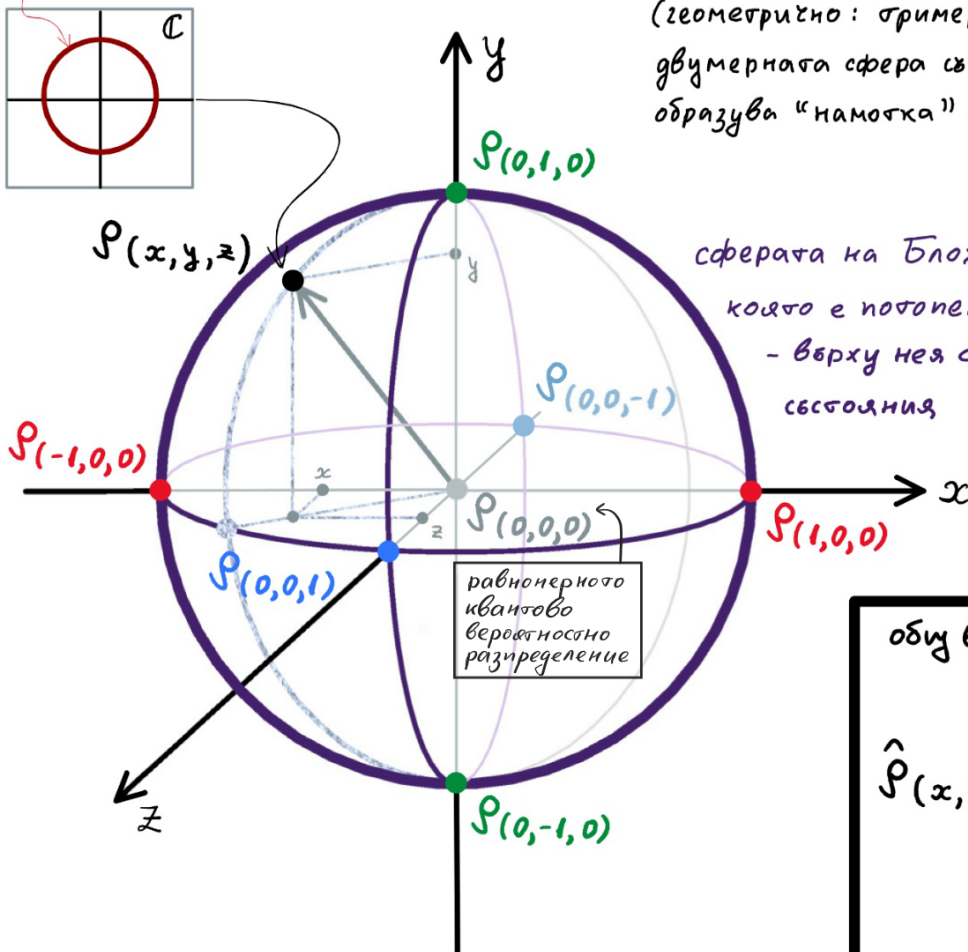
вектор на събитието

вектор на състоянието

Ето сумарната картина на състояния на q -бит :

Над всяка точка на сферата на Блох "напресно" в $\mathbb{R}^4$ се разполага единичния окръжност $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\varphi}\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$ - така се намотава $\mathbb{S}^3$ върху $\mathbb{S}^2$ - нарича се разслоение на Хопф

(геометрично : примерната сфера се разслоява над двумерната сфера със слоеве - окръжности, като образува "намотка" около двумерната сфера)



общ вид на матрицата на плътността на състояние

$$\hat{\rho}(x,y,z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

за $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
чисто състояние $\leftrightarrow$ =

7. Някои пропуснати доказателства (извън курса)

Теорема 5 (Циклично свойство на следата)

Ако $A = (a_{jk})_{N \times M}$ и $B = (b_{kl})_{M \times N}$, то

$$\text{tr} AB (= \text{tr}_N AB) = \text{tr} BA (= \text{tr}_M BA)$$

Доказателство. Нека $X = (x_{jk})_{N \times N} := AB$, $x_{jk} = \sum_{l=1}^M a_{jl} b_{lk}$

$$Y = (y_{jk})_{M \times M} := BA, \quad y_{jk} = \sum_{l=1}^N b_{jl} a_{lk}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{tr} AB = \text{tr} X &= \sum_{j=1}^N x_{jj} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M a_{jk} b_{kj} \\ \text{tr} BA = \text{tr} Y &= \sum_{k=1}^M y_{kk} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N b_{kj} a_{jk} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \square$$

Следствие 6 $\text{tr}(AB \dots C) = \text{tr}(B \dots CA)$.

Лема 7 Нека A е $N \times N$ комплексна матрица, а $\Psi \in \mathbb{C}^N$.

$$\text{Тогава } \text{tr}(A |\Psi\rangle \langle \Psi|) = \text{tr}(|\Psi\rangle \langle \Psi| A) = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

Експлицитно: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}$ и $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N) \right) &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \right) \\ &= (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Доказателство. Това е пряко приложение на цикличното свойство на следата. $\square$

Доказателство на Теорема 3

$$\rho(\hat{1}) = 1 \iff \text{tr}(\hat{\rho} \hat{1}) = 1, \text{ т.е., } \text{tr} \hat{\rho} = 1.$$

Остава:

$$A \text{ е положително дефинитна } \} \stackrel{?}{\iff} \{ \text{tr}(AB^*B) \geq 0 \text{ за всяка } B \in \text{Mat}_N(\mathbb{C}) \}$$

$\Rightarrow$) Ако A е самоспрегната и с неотрицателни собствени стойности, то

$$A = \sum_{j=1}^N \lambda_j |f_j\rangle\langle f_j| \text{ - спектрално разлагане, } \lambda_j \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \text{tr}(AB^*B) &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \text{tr}(|f_j\rangle\langle f_j| B^*B) \stackrel{\text{Лема 7}}{=} \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle f_j | B^*B | f_j \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j \|B f_j\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Нека $\text{tr}(AB^*B) \geq 0$ за всяка $B \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$

Нека $B := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за $\Psi \in \mathbb{C}^N, \Psi \neq 0$.

$$\text{Тогава } B^*B = \|\Psi\|^2 |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

$$\text{и } \text{tr}(AB^*B) = \|\Psi\|^2 \underbrace{\langle\Psi|A\Psi\rangle}_{\geq 0} \geq 0 \text{ за } \forall \Psi \in \mathbb{C}^N.$$

$\Rightarrow A$ е положително дефинитна □

Лема 8. Ако X е $N \times M$ комплексна матрица и $\text{tr}(X^*X) = 0$, то $X = \hat{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Доказателство.} \text{ Ако } X = (x_{jk}), \text{ то } \text{tr}(X^*X) &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \overline{x_{jk}} x_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N |x_{jk}|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Доказателство на Теорема 4

$\Leftarrow$) Ако $\hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$ и $A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$, то

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \text{tr}(\hat{\rho} A) = \text{tr}((q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2) A) \\ &= q_1 \text{tr}(\hat{\rho}_1 A) + q_2 \text{tr}(\hat{\rho}_2 A) = q_1 \rho_1(A) + q_2 \rho_2(A). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Имаме $\text{tr}(\hat{\rho} A) = q_1 \text{tr}(\hat{\rho}_1 A) + q_2 \text{tr}(\hat{\rho}_2 A)$ за $\forall A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$.

Тогава: $\text{tr}((\hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2) A) = 0$ за $\forall A \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$.

Да положим $A = \hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2$. От Лема 8 следва, че $\hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2 = 0$.

□