

Дискретната трансформация на Фурие (Fourier)

- определение, свойства и приложения

Николай М. Николов

Част, която е маркирана отпред със зелен маркер е извън материала в курса.

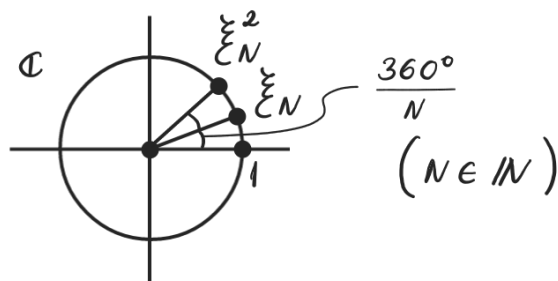
Корекции спрямо предната версия са маркирани с жълто.

1. Подготовителни пресметания

Нека $\xi_N := \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N} = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

примитивен N -ти корен на 1:

- $\xi_N^N = 1$
- $\xi_N^k = 1$ за $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow N \text{ дели } k$



Също:

$$\overline{\xi_N} = \xi_N^{-1}$$

(prim)₁

(xi-conj)₂

Лема 1 За $k \in \mathbb{Z}$

$$1 + \xi_N^k + \xi_N^{2k} + \dots + \xi_N^{(N-1)k} = \begin{cases} N, & \text{когато } N \text{ дели } k \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

(xi-prog)₃

Доказателство.

L.H.S. = $\frac{\xi_N^{kN} - 1}{\xi_N^k - 1} = 0 \Leftrightarrow N \text{ не дели } k$. В противен случай $\xi_N^k = 1$ и

(лявата страна) ↑ $\xi_N^k - 1$ сума на геометрична прогресия, ако $\neq 0$

L.H.S. = $1 + 1 + \dots + 1 = N$ □

2. Определение

$$\mathcal{F}_N := \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \xi_N^{jk}}_{e^{\frac{2\pi i}{N} jk}} \right)_{j,k=0,1,\dots,N-1} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \xi_N^1 & \xi_N^2 & \xi_N^3 & \dots \\ 1 & \xi_N^2 & \xi_N^4 & \xi_N^6 & \dots \\ 1 & \xi_N^3 & \xi_N^6 & \xi_N^9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$N \times N$,
комплексна
симметрична
матрица
(DFT-M)₄

Забележете: $F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - матрицата на Адамар

3. Унитарност: $F_N F_N^* = \hat{1}_N$ - единичната $N \times N$ -матрица?

k -ти ред на F_N : $1, \xi_N^k, \xi_N^{2k}, \dots, \xi_N^{(N-1)k}$ $N^{-1/2}$

ℓ -ти столб на F_N^* : $1, \overline{\xi_N^\ell}, \overline{\xi_N^{2\ell}}, \dots, \overline{\xi_N^{(N-1)\ell}}$ $N^{-1/2}$

(k, ℓ) -ти елемент на единичната матрица

$$= N^{-1} \left(1 + \xi_N^k \overline{\xi_N^\ell} + \xi_N^{2k} \overline{\xi_N^{2\ell}} + \dots + \xi_N^{(N-1)k} \overline{\xi_N^{(N-1)\ell}} \right) \stackrel{?}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } k = \ell \\ 0 & \text{при } k \neq \ell \end{cases}$$

$$= N^{-1} \left(1 + \xi_N^{k-\ell} + \xi_N^{2(k-\ell)} + \dots + \xi_N^{(N-1)(k-\ell)} \right) =$$

От $(\xi - \omega_N j)_2$ и $(\xi - \text{prod})_3$, понеже N дели $k - \ell \Leftrightarrow k = \ell$
за $k, \ell = 0, 1, \dots, N-1$

Следствие 2 $F_N^{-1} = F_N^*$

т.е., $F_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\xi_N^{-jk} \right)_{j,k=0,1,\dots,N-1}$

(IDFT-M)₅

4. Действие върху вектори

Ако $\Phi = (\phi_j)_{j=0,1,\dots,N-1} \in \mathbb{C}^N$ и означим

$\tilde{\Phi} = F_N \Phi =: (\tilde{\phi}_k)_{k=0,1,\dots,N-1}$. Тогава:

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} jk} \phi_j \quad (\text{DFT-V})_6$$

$$\phi_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} jk} \tilde{\phi}_k \quad (\text{IDFT-V})_7$$

5. Следствия от унитарността

Ако $\Phi = (\phi_j)_{j=0,1,\dots,N-1} \in \mathbb{C}^N$, $\Psi = (\psi_j)_{j=0,1,\dots,N-1} \in \mathbb{C}^N$ и

$\langle \Phi | \Psi \rangle = \Phi^* \Psi = \bar{\phi}_0 \psi_0 + \bar{\phi}_1 \psi_1 + \dots + \bar{\phi}_{N-1} \psi_{N-1}$ - скалярното произведение в $\mathbb{C}^N$,

то от унитарността на $\mathcal{F}_N \Leftrightarrow \langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \mathcal{F}_N \Phi | \mathcal{F}_N \Psi \rangle$ - $\mathcal{F}_N$ запазва скалярното произведение

$$\Rightarrow \bar{\phi}_0 \psi_0 + \bar{\phi}_1 \psi_1 + \dots + \bar{\phi}_{N-1} \psi_{N-1} = \bar{\tilde{\phi}}_0 \psi_0 + \bar{\tilde{\phi}}_1 \psi_1 + \dots + \bar{\tilde{\phi}}_{N-1} \psi_{N-1}$$

т.е., $\sum_{j=0}^{N-1} \bar{\phi}_j \psi_j = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\tilde{\phi}}_k \psi_k$

(P-P1)₈

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\phi_j|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{\phi}_k|^2$$

(P-P2)₉

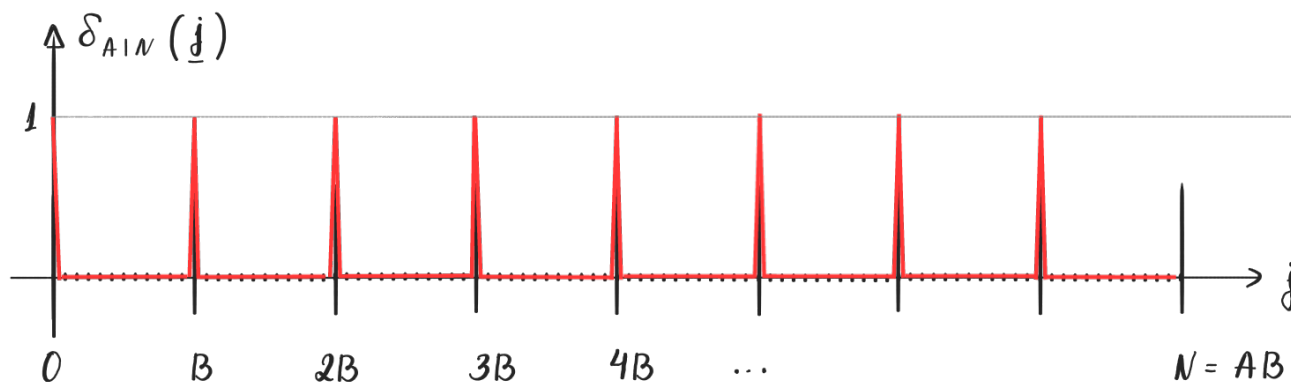
(дискретна формула на Парсевал-Планишерел)
Parseval - Plancherel

6. Някои примери

Нека A дели N : $N = AB$

понеже тогава
 $jA = j'N$

$$\delta_{A|N}(j) := \begin{cases} 1 & \text{при } j \in \{0, B, 2B, \dots, (A-1)B\} \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow N \text{ дели } jA)$$



Твърдение 3. $\frac{1}{\sqrt{A}} \tilde{\delta}_{A|N}(k) = \frac{1}{\sqrt{B}} \delta_{B|N}(k)$

Доказателство:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{A|N}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_N^{jk} \delta_{A|N}(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=0}^B \xi_N^{j'Bk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=0}^{B-1} \xi_A^{j'k} = \frac{A}{\sqrt{N}} \times \begin{cases} 1 \text{ ако } A \text{ дели } k \Leftrightarrow \text{ако } N(=AB) \text{ дели } k \\ 0 \text{ в противен случай} \end{cases} \\ &= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \delta_{B|N}(k) \end{aligned}$$

□

Следствие 4. (формула на Поасон / Poisson)

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{j'=0}^{B-1} \phi_{j'B} = \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{k'=0}^{A-1} \tilde{\phi}_{k'A} \quad (\text{Poisson 1})_{10}$$

Доказателство: това е равенството на скалярните произведения

$$\langle \delta_{A|N} | \Phi \rangle = \langle \tilde{\delta}_{A|N} | \tilde{\Phi} \rangle$$

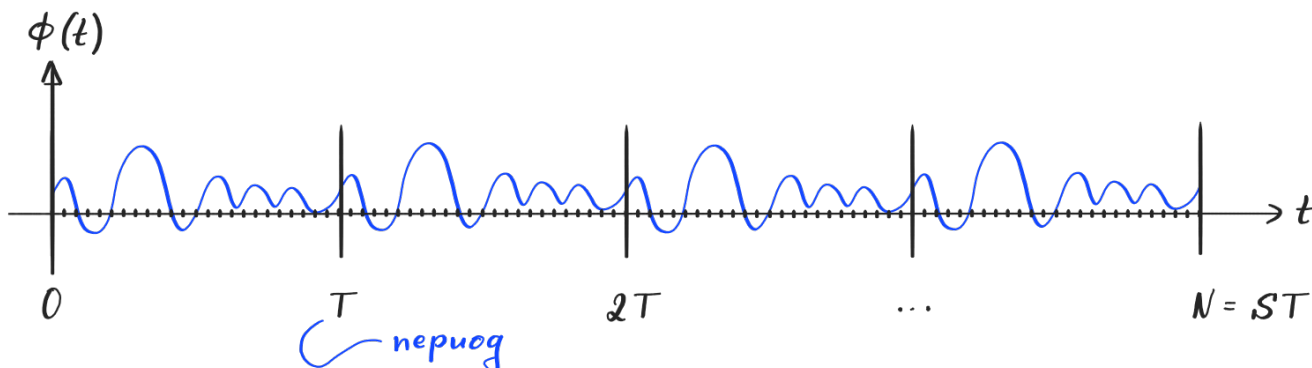
в следствие на $(P-P1)_8$

□

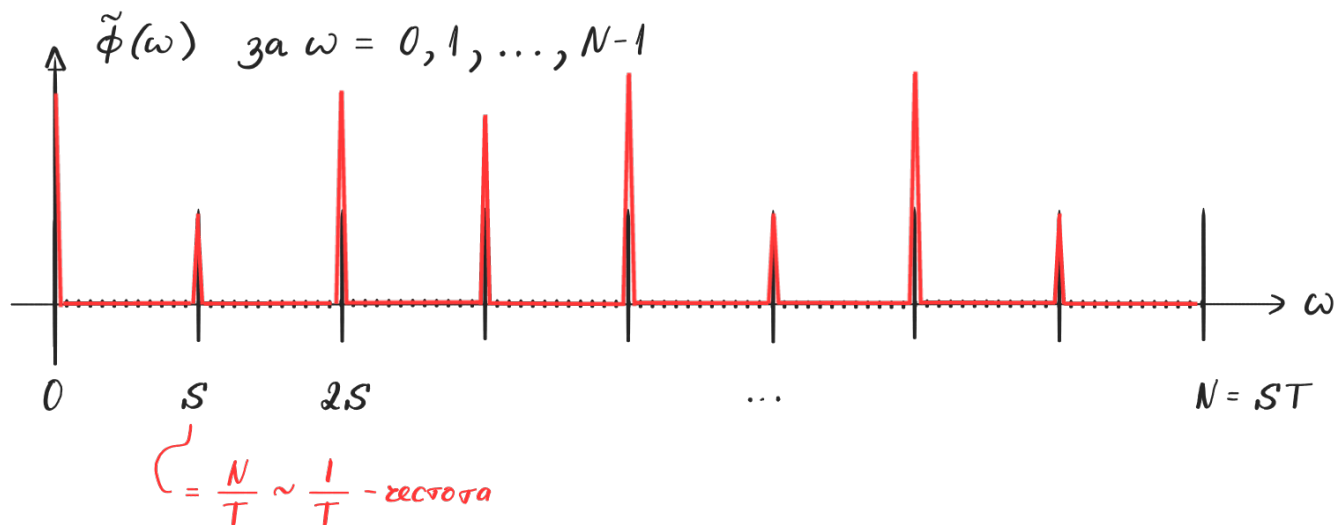
7. Фурие анализ при (под)периодични последователности

Нека T дели N : $N = ST$. Тоест, както в с. 6 " T " вместо " A " като T ще има смисла по-долу на период.

И нека $\phi(t) := \phi_t$ за $t = 0, 1, \dots, N-1$ като $\phi(t) = \phi(t')$, ако T дели $t - t'$



Тогава



Фурие образа на функция с период T е съсредоточен върху подмножеството $\{0, S, \dots, (T-1)S\} \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$

от крабни на "честотата" S

Доказателство:

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t} \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t'=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{S-1} \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{N} \omega (sT+t')}}_{\left(e^{\frac{2\pi i}{N} \omega T} \right)^s e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'}}$$

$t = sT + t'$
остатък при делене на T

$\phi(sT+t')$
от периодичността

$e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'} \cdot \begin{cases} S & \text{ако } \frac{\omega T}{N} = \frac{\omega}{S} \text{ е цяло} \\ 0 & \text{ако не е} \end{cases}$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}(\omega) = 0 \text{ ако } \omega \text{ не е дели на } S$$

В допълнение на $\omega = S\omega'$

$$\tilde{\phi}(S\omega') = \frac{1}{\sqrt{N}} S \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{N} S\omega' t'} \phi(t') = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{T}} \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{T} \omega' t'} \phi(t')$$

$N = ST$

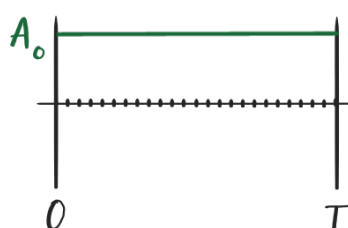
отразка на $\Phi = (\phi_t)$ за $t = 0, 1, \dots, T-1$.

$= \sqrt{S} \mathcal{F}_T \Phi|_T(\omega')$ — Фурие трансформация за размер T .

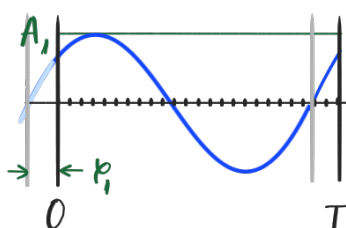
Следствие 5

$$\phi(-t) = \underbrace{\tilde{\phi}(0)}_{| \tilde{\phi}(0) |} \cdot 1 + \underbrace{\tilde{\phi}(1.S)}_{| \tilde{\phi}(S) |} e^{\frac{2\pi i}{T} 1 \cdot t} + \underbrace{\tilde{\phi}(2.S)}_{| \tilde{\phi}(2S) |} e^{\frac{2\pi i}{T} 2 \cdot t} + \dots$$

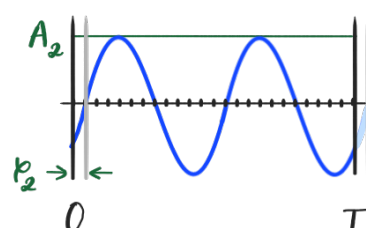
$$\text{Im } \phi(-t) = \text{const} + A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} 2t + \varphi_2\right) + \dots$$



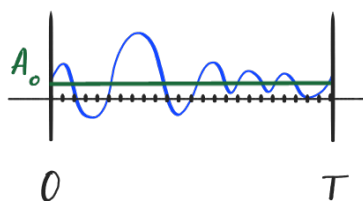
нулев член
- постоянно
средно ниво
на сигнала



перва хармонична
с амплитуда A_1
и начална фаза φ_1



втора хармонична
с амплитуда A_2
и начална фаза φ_2



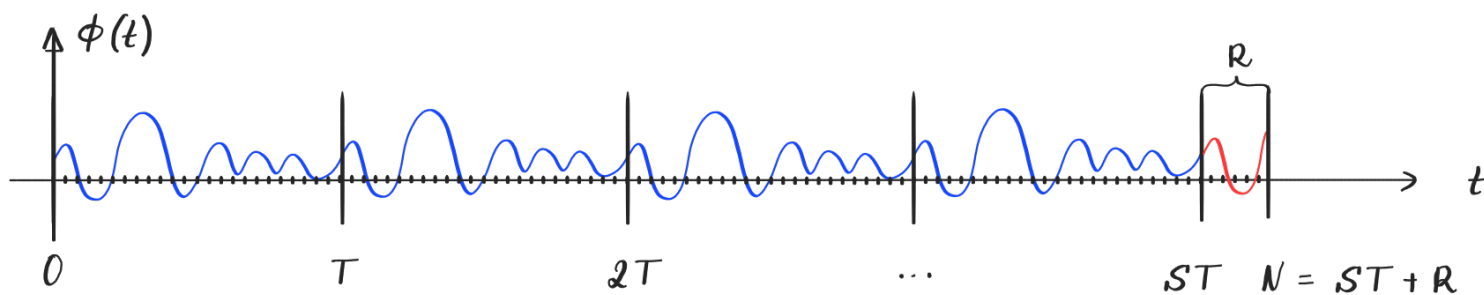
За се избегне този знак често се използва следната алтернативна дефиниция:

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} jk} \phi_j$$

$$\phi_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{+\frac{2\pi i}{N} jk} \tilde{\phi}_k$$

вместо $(\text{DFT}-V)_6$ и $(\text{IDFT}-V)_7$.

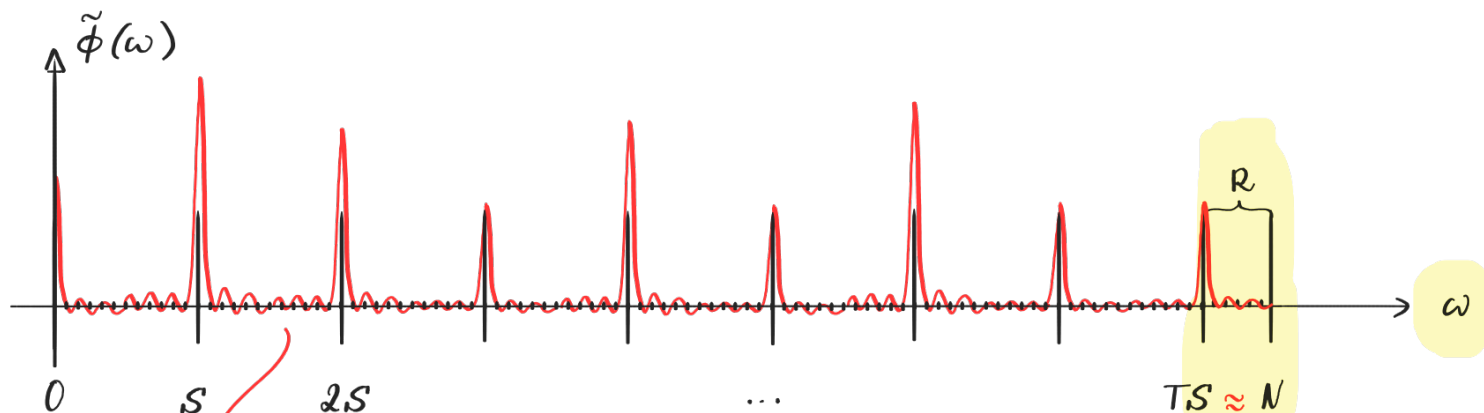
9. Почти периодични сигнали



Нека сега T не дели N , но остатък

$$R \ll S$$

Сега $\tilde{\phi}(\omega)$ е приблизително съсредоточена в $\{0, S, 2S, \dots, (T-1)S\}$



преди в междинните точки беше точно $= 0$, а сега ≈ 0 .

Доказателство: отново

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t} \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t'=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{S-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega (sT+t')} \underbrace{\phi(sT+t')}_{\phi(t')}$$

$t = sT + t'$

остатък при делене на T

$$+ \sum_{t'=0}^{R-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega (ST+t')} \phi(ST+t')$$

новото: остатъчен член ≈ 0
понеже $R \ll N$

Също така:

$$\sum_{s=0}^{S-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega (sT+t')} = \sum_{s=0}^{S-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N} \omega T} \right)^s e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'}$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi i}{N} \omega T S} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N} \omega T} - 1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'} = \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N} \omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N} \omega\right)} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'}$$

И така,

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N} \omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N} \omega\right)} \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'} \phi(t')$$

Въпросът е за кои ω , моделът $|\tilde{\Phi}(\omega)|$ е малък (≈ 0)?

Тъй като се оказва, че $\sum_{\omega=0}^{N-1} |\tilde{\Phi}(\omega)|^2 = \sum_{t=0}^{N-1} |\phi(t)|^2 \stackrel{\text{нормировка}}{=} 1$

формула на Планшерел

то $|\tilde{\Phi}(\omega)| \leq 1$ и можем да погледим, кога $|\tilde{\Phi}(\omega)|$ може да е "значително" > 0 .

Основание за последното е приблизителното анулиране на знаменателя:

$$0 \stackrel{?}{\approx} \sin\left(\pi \frac{T}{N} \omega\right) = \sin\left(\pi \frac{\omega}{S} - \pi \frac{\omega R}{NS}\right) = \sin\left(\pi \frac{\omega}{S}\right) + O\left(\frac{R}{S}\right)$$

трябва да е
приблизително
цяло число

Също така:

$$|\tilde{\Phi}(\omega)| = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N} \omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N} \omega\right)} \sum_{t'=0}^{T-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'} \phi(t') \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N} \omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N} \omega\right)} \right| \underbrace{\sum_{t'=0}^{T-1} \left| e^{\frac{2\pi i}{N} \omega t'} \phi(t') \right|}_{\leq T \max_t |\phi(t)|} \leq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{S}} \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{ST}{N} \omega\right)}{\sin\left(\pi \frac{T}{N} \omega\right)} \right| \max_t |\phi(t)|$$

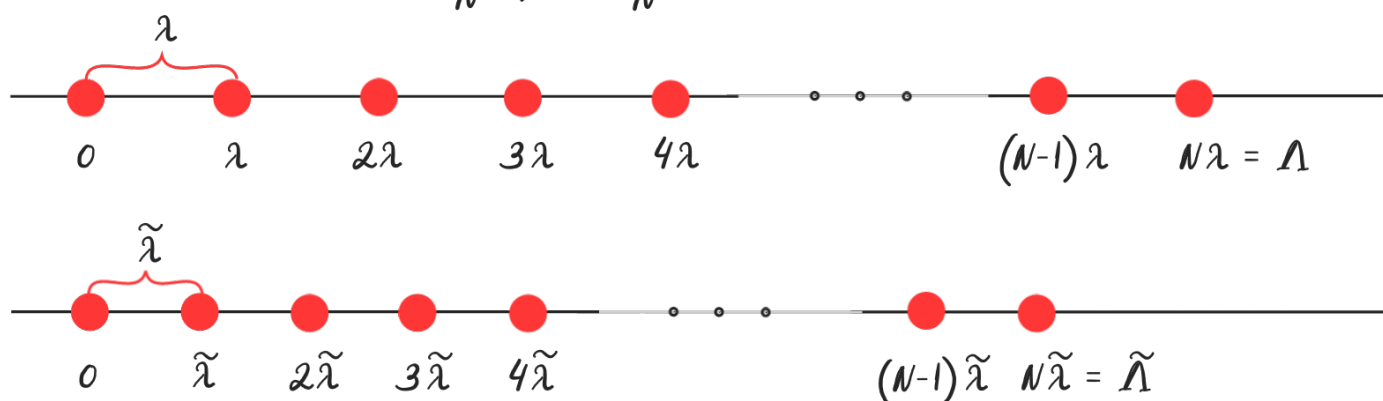
$$\leq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{S}} \left| \frac{\sin\left(\pi \omega - \pi \frac{\omega R}{N}\right)}{\sin\left(\pi \frac{\omega}{S} - \pi \frac{\omega R}{NS}\right)} \right| \max_t |\phi(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{S}} \frac{\pi \frac{\omega R}{N} \leq \pi R}{\underbrace{\left| \sin\left(\pi \frac{\omega}{S} - \pi \frac{\omega R}{NS}\right) \right|}_{O\left(\frac{R}{S}\right)}} \max_t |\phi(t)|$$

Извод: $|\tilde{\Phi}(\omega)|$ е съществено > 0 евентуално, когато ω се дели на S .

9. Въвеждане на мащаби

Нека въведем две еквилистантни решетки, едната в интервала $[0, \Lambda]$, а другата в $[0, \tilde{\Lambda}]$ (за $\Lambda, \tilde{\Lambda} > 0$). И двете решетки нека имат N възли и следователно, разстоянието между съседни възли са съответно

$$\lambda = \frac{\Lambda}{N}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\Lambda}}{N}$$



Множествата от точки на двете решетки означаваме с :

$$\mathcal{S}_{\Lambda, \lambda} := \{j\lambda \mid j=0, 1, \dots, N-1\} \text{ и } \mathcal{S}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}} := \{k\tilde{\lambda} \mid k=0, 1, \dots, N-1\}$$

Полагаме : $\lambda \tilde{\lambda} = \frac{h}{N} \quad (\Rightarrow \lambda \tilde{\Lambda} = h = \tilde{\lambda} \Lambda),$

където $h = 2\pi \hbar$ е фиксирана положителна константа
("константата на Планк")

Следствие 6 $\frac{2\pi i}{N} jk = \frac{ixp}{\hbar},$ ако $x = j\lambda, p = k\tilde{\lambda}$

Полагаме за функция $\phi: \mathcal{S}_{\Lambda, \lambda} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \phi(x)$

функция $\tilde{\phi}: \mathcal{S}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}} \rightarrow \mathbb{C} : p \mapsto \tilde{\phi}(p)$

$$\tilde{\phi}(p) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in \mathcal{S}_{\Lambda, \lambda}} \lambda e^{-\frac{ixp}{\hbar}} \phi(x) \quad (\text{DFT-L})_{11}$$

Твърдение 7

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \mathcal{S}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}}} \tilde{\lambda} e^{\frac{ixp}{\hbar}} \tilde{\phi}(p) \quad (\text{IDFT-L})_{12}$$

Доказателство: ако положим $\phi(x) =: \frac{\phi_j}{\sqrt{\lambda}}$ и $\tilde{\phi}(p) =: \frac{\tilde{\phi}_k}{\sqrt{\tilde{\lambda}}}$, то

$$(\text{DFT-V}) \Leftrightarrow (\text{DFT-L}) \text{ и } (\text{IDFT-V}) \Leftrightarrow (\text{IDFT-L}) \quad \square$$

Еквивалентна постановка е да разглеждаме Λ -периодични функции върху безкрайната решетка

$$\lambda\mathbb{Z} = \{j\lambda \mid j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\phi: \lambda\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi(x + \Lambda) = \phi(x)$$

И също, $\tilde{\Lambda}$ -периодични функции върху "дуалната" решетка

$$\tilde{\lambda}\mathbb{Z} = \{k\tilde{\lambda} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\tilde{\phi}: \tilde{\lambda}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\phi}(p + \tilde{\Lambda}) = \tilde{\phi}(p)$$

Тогави ϕ -и $(\text{DFT-L})_{11}$ и $(\text{IDFT-L})_{12}$ са еквивалентни на

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in \mathcal{S}} \lambda e^{-\frac{ixp}{h}} \phi(x) \quad (\text{DFT-LI})_{13}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{\mathcal{S}}} \tilde{\lambda} e^{\frac{ixp}{h}} \tilde{\phi}(p) \quad (\text{IDFT-LI})_{13}$$

за всеки два сегмента $\mathcal{S} \subseteq \lambda\mathbb{Z}$ и $\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \tilde{\lambda}\mathbb{Z}$ от N последователни точки.

Например, при вземането на граници по-долу ще бъде удобно (при точно N) да се изберат центрираните сегменти

$$\mathcal{S}_{\Lambda, \lambda}^c := \left(-\frac{\Lambda}{2}, \frac{\Lambda}{2}\right] \cap \lambda\mathbb{Z} \text{ и } \mathcal{S}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}}^c := \left(-\frac{\tilde{\Lambda}}{2}, \frac{\tilde{\Lambda}}{2}\right] \cap \tilde{\lambda}\mathbb{Z} \quad (\mathcal{S}^c)_{14}$$

10. Гранични случаи (при всички тях $N \rightarrow \infty$):

а) $\lambda, \tilde{\lambda} \rightarrow 0$. Тогава $\Lambda, \tilde{\Lambda} \rightarrow \infty$

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_{\Lambda, \lambda}^c} \lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx, \quad \sum_{p \in \mathcal{S}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}}^c} \tilde{\lambda} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp$$

и за непрекъснати и интегрируеми върху $\mathbb{R}$ функции:

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{и} \quad \tilde{\phi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

имаме връзките:

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixp}{h}} \phi(x) dx, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ixp}{h}} \tilde{\phi}(p) dp$$

При $\hbar = 1$ ($h = 2\pi$):

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \phi(x) dx, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} \tilde{\phi}(p) dp.$$

При $h = 1$ ($1/\hbar = 2\pi$):

$$\tilde{\phi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x p} \phi(x) dx, \quad \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x p} \tilde{\phi}(p) dp.$$

-това е интегралната трансформация на Фурие

Формула на Планшерел:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\phi}(p)|^2 dp$$

$$\delta) \lambda \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow 2\pi, h = 2\pi \quad (\hbar = 1).$$

$$\text{Тогава } \tilde{\lambda} = \frac{h}{\Lambda} \rightarrow 1, \tilde{\Lambda} = \frac{h}{\tilde{\lambda}} \rightarrow \infty$$

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_{\Lambda, \lambda}^*} \lambda \rightarrow \int_0^{2\pi} dx, \quad \sum_{p \in \mathcal{S}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}}^*} \tilde{\lambda} \rightarrow \sum_{p \in \mathbb{Z}}$$

и за $\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\phi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ имаме връзките:

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{ixp}{\hbar}} \phi(x) dx, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{ixp} \tilde{\phi}(p)$$

- това са редовете на Фурие

$$\text{Формула на Парсевал} \quad \int_0^{2\pi} |\phi(x)|^2 dx = \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}(p)|^2$$

11. Бърза Фурие-трансформация (Fast Fourier Transform)

Нека $N = 2^n$ за $n \in \mathbb{N}$ и за

$$j = s_0 + s_1 2 + s_2 2^2 + \dots + s_{N-1} 2^{n-1} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

$$k = t_0 + t_1 2 + t_2 2^2 + \dots + t_{N-1} 2^{n-1} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

$$\phi_j = \phi_{s_0 s_1 \dots s_{N-1}}, \quad \tilde{\phi}_k = \tilde{\phi}_{t_0 t_1 \dots t_{N-1}}$$

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} jk} \phi_j \quad - N \text{ уравнения, всяко с } N \text{ умножения - общо } N^2;$$

при бързата процедура: ---/--- , но за всяко: $n = \log_2 N$

$$j_0 := j = j_1 + 2^{n-1} s_{n-1}, \quad j_1 \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

$$k_0 := k = t_0 + 2k_1, \quad k_1 \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

$$j_1 = j_2 + 2^{n-2} s_{n-2}, \quad j_2 \in \{0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$$

$$k_1 = t_1 + 2k_2, \quad k_2 \in \{0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$$

⋮

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{k_0} = \tilde{\phi}_{t_0 k_1} &= 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{j_1=0}^{2^{n-1}-1} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2^n} (j_1 + 2^{n-1} s_{n-1})(t_0 + 2k_1)} \phi_{j_1 s_{n-1}} \\ &= 2^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\sum_{j_1=0}^{2^{n-1}-1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-1}} j_1 k_1}}_{2^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_{2^{\frac{n-1}{2}}}} \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{2^n} j_1 t_0}}_1 \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{2^n} 2^{n-1} s_{n-1} k_1} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2^n} 2^{n-1} s_{n-1} t_0}}_{2^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}_2} \phi_{j_1 s_{n-1}} \end{aligned}$$

$$= 2^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{j_1=0}^{2^{n-1}-1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-1}} j_1 (k_1 + 2^{-1} t_0)} 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-1} t_0} \phi_{j_1 s_{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{t_0 t_1 k_2} &= 2^{-\frac{n-2}{2}} \sum_{j_2=0}^{2^{n-2}-1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-2}} j_2 (k_2 + 2^{-1} t_1)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-2}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-1}} (j_2 + 2^{n-2} s_{n-2}) 2^{-1} t_0} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-2} t_1} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-1} t_0} \phi_{j_2 s_{n-2} s_{n-1}} \\
&= 2^{-\frac{n-2}{2}} \sum_{j_2=0}^{2^{n-2}-1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-2}} j_2 (k_2 + 2^{-1} t_1 + 2^{-2} t_0)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-2}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-2} (t_1 + 2^{-1} t_0)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-1} t_0} \phi_{j_2 s_{n-2} s_{n-1}}
\end{aligned}$$

Diagram showing the simplification of the first term: $\frac{2\pi i}{2^{n-1}} j_2 (k_2 + 2^{-1} t_1) \cdot 2^{-1} t_0 = \frac{2\pi i}{2^{n-2}} j_2 (k_2 + 2^{-1} t_1 + 2^{-2} t_0)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{t_0 t_1 t_2 k_3} &= 2^{-\frac{n-3}{2}} \sum_{j_3=0}^{2^{n-3}-1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-3}} j_3 (k_3 + 2^{-1} t_2)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-3}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-2}} (j_3 + 2^{n-3} s_{n-3}) (2^{-1} t_1 + 2^{-2} t_0)} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-3} t_2} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-2}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-2} (t_1 + 2^{-1} t_0)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-1} t_0} \phi_{j_3 s_{n-2} s_{n-1}} \\
&= 2^{-\frac{n-3}{2}} \sum_{j_3=0}^{2^{n-3}-1} e^{\frac{2\pi i}{2^{n-3}} j_3 (k_3 + 2^{-1} t_2 + 2^{-2} t_1 + 2^{-3} t_0)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-3}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-3} (t_2 + 2^{-1} t_1 + 2^{-2} t_0)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-2}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-2} (t_1 + 2^{-1} t_0)} \\
&\quad \times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-1} t_0} \phi_{j_3 s_{n-2} s_{n-1}}
\end{aligned}$$

Diagram showing the simplification of the first term: $\frac{2\pi i}{2^{n-2}} j_3 (k_3 + 2^{-1} t_2) \cdot (2^{-1} t_1 + 2^{-2} t_0) = \frac{2\pi i}{2^{n-3}} j_3 (k_3 + 2^{-1} t_2 + 2^{-2} t_1 + 2^{-3} t_0)$

По индукции:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-2} t_{n-1}} &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_0=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_0 (t_{n-1} + 2^{-1} t_{n-2} + \dots + 2^{-(n-1)} t_0)} \\ &\times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_1=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_1 (t_{n-2} + 2^{-1} t_{n-3} + \dots + 2^{-(n-2)} t_0)} \\ &\vdots \\ &\times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-2}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-2} (t_1 + 2^{-1} t_0)} \\ &\times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_{n-1}=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_{n-1} t_0} \Phi_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \text{ умножение} \\ 1 \text{ умножение} \\ \vdots \\ 1 \text{ умножение} \\ 1 \text{ умножение} \end{array} \right\}$$

за всяка от
 N -те компоненти

$$n = \log N$$

умножения

12. Графичен запис с квантова верига (quantum circuit).

Нека U_{ts} , $V_{t't'';s's''} \in \mathbb{C}$ - съвкупност от числа, индексирани с
 $s, s', s'', t, t', t'' \in \{0, 1\}$

Линейна трансформация от вида

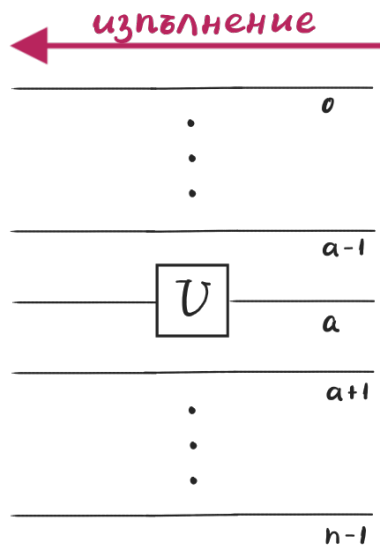
$$\psi_{s_0 \dots s_{a-1} t s_{a+1} \dots s_{n-1}} = \sum_{s=0,1} U_{ts} \phi_{s_0 \dots s_{a-1} s s_{a+1} \dots s_{n-1}}$$

ще изобразяваме графично като

Казваме, че $\mathcal{H}$ е

се изпълнява на а-та

познуча



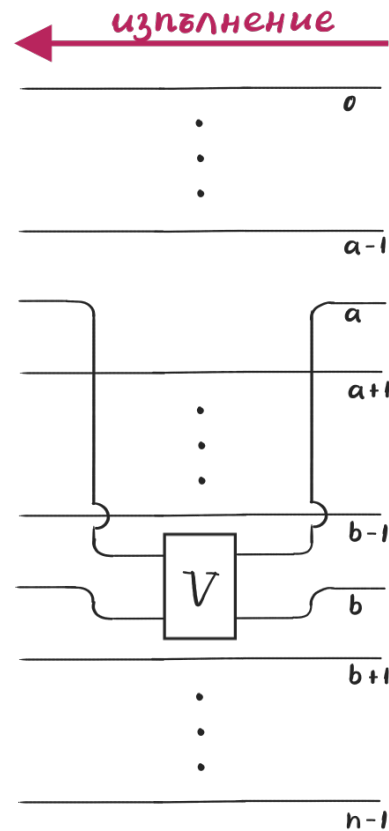
Аналогично, линейна трансформация от вида

$$\psi_{s_0 \dots s_{a-1} t' s_{a+1} \dots s_{b-1} t'' s_{b+1} \dots s_{n-1}}$$

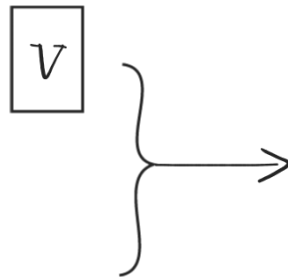
↑ ↑
позиции a b

$$= \sum_{s'=0,1} \sum_{s''=0,1} V_{t't''; s's''} \phi_{s_0 \dots s_{a-1} s' s_{a+1} \dots s_{b-1} s'' s_{b+1} \dots s_{n-1}}$$

ще изобразяваме графично като



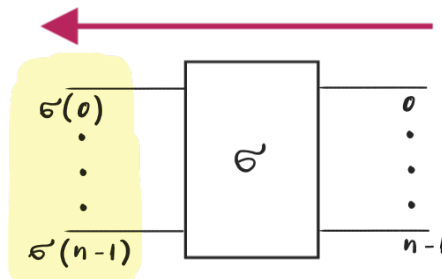
Казваме, че гейта
се изпълнява на
позиции a и b



Възможни са и други накретания на гейтовете и тяхното задаване, но смисълът е все същия.

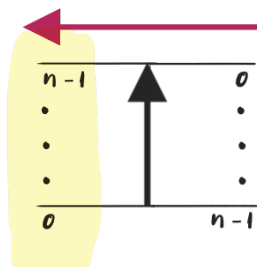
Към тези графични означения ще прибавим и пермутация на индексите

$$\psi_{s_0 \dots s_{n-1}} = \phi_{s_{\sigma(0)} \dots s_{\sigma(n-1)}}$$



Например,

$$\psi_{s_0 \dots s_{n-1}} = \phi_{s_{n-1} \dots s_0}$$

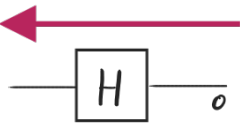


Задача (нерешена)

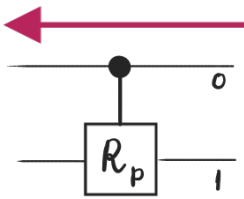
Може ли за пермутация $\sigma \in S_{2^n}$, да се получи като композиция на гейтове от вида σ'_k за няколко $\sigma'_k \in S_{2^{n'_k}}$ с $n'_k < n$.

Връщаме се към изобразяването на Фурие трансформацията в последната формула на с. 11.

Нужните гейтове означаме така:



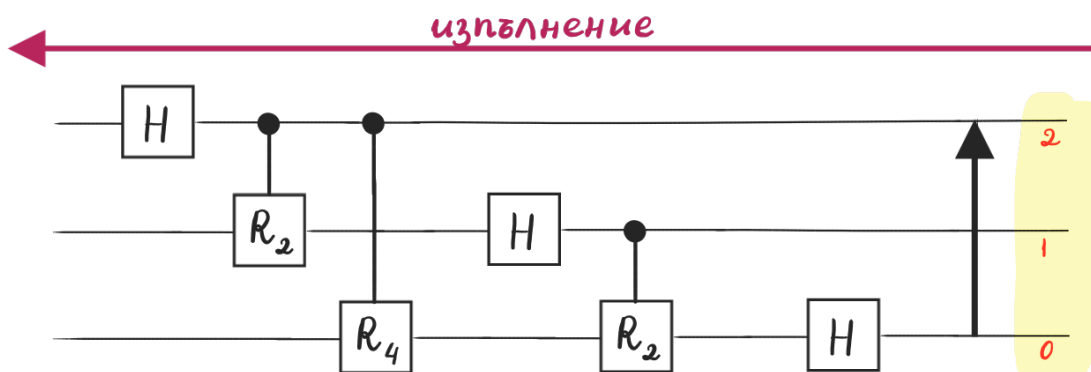
$$\Psi_{t_0} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_0=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_0 t_0} \phi_{s_0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$



$$\Psi_{s_0 s_1} = e^{\frac{2\pi i}{2^p} s_0 s_1} \phi_{s_0 s_1} \quad \text{за } p \in \mathbb{N}$$

- диагонална матрица

Тогава, например за $n=3$, $\mathcal{F}_{2^3}$ има следната верига



което възпроизвежда формулата

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{t_0, t_1, t_2} &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_0=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_0 (t_2 + 2^{-1} t_1 + 2^{-2} t_0)} \\ &\times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_1=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_1 (t_1 + 2^{-1} t_0)} \\ &\times 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{s_2=0,1} e^{\frac{2\pi i}{2} s_2 t_0} \phi_{s_0 s_1 s_2} \end{aligned}$$