Кратко въведение в абстрактната теория на тензорните произведения

Тази тематика присъства във всеки по-разширен учебник по линейна алгебра. Тук е предложено изложение, в което една част е обособена като упражнения

<u>Определение</u> Нека $\mathbb{K}$ е поле и V и W са линейни пространства над $\mathbb{K}$. Тензорно произведение на V и W се нарича всяка двойка $(L, \otimes)$, състояща се от линейно пространство L (над $\mathbb{K}$) и билинейно изображение $\otimes : V \times W \longrightarrow L$ със следното свойство (наричано "свойство на универсалнос" / "universal property"): за всяко линейно пространство M и билинейно изображение $\alpha : V \times W \longrightarrow M$ съществува единствено линейно изображение $\hat{\alpha} : L \longrightarrow M$, такова че следната диаграма

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\alpha"'] & L \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

е комутативна

т.е., $\hat{\alpha} \circ \otimes = \alpha$ (1)

Последното равенство, приложено върху двойка $(v, w) \in V \times W$ дава

$$\hat{\alpha}(v \otimes w) = \alpha(v, w) \,, \tag{2}$$

където сме означили

$$v \otimes w := \otimes(v, w) \tag{3}$$

т.е., образът $V \times W \ni (v, w) \overset{\otimes}{\longmapsto} v \otimes w \in L$.

<u>Упражнение 1</u> Постройте тензорно произведение на $\mathbb{K}$ със себе си.

<u>Упражнение 2</u> Нека $(L_1, \otimes_1)$ и $(L_2, \otimes_2)$ са две тензорни произведения на V и W. Покажете, че съществува единствено линейно изображение $\Lambda : L_1 \to L_2$ такова, че

$$\begin{tikzcd} & L_1 \arrow[dd, "\Lambda"] \\ V \times W \arrow[ur, "\otimes_1"] \arrow[dr, "\otimes_2"'] & \\ & L_2 \end{tikzcd}$$

е комутативна диаграма; т.е.,

$\Lambda(v \otimes w) = \Lambda v \otimes \Lambda w$ за всеки $(v, w) \in V \times W$. При това, Λ е изоморфизъм.

До тук все още не сме доказали съществуването на тензорни произведения. Съгласно Упражнение 2 е достатъчно да се даде една реализация - всяка друга ще бъде канонично (еднозначно) изоморфна на нея.

По-долу, в Упражнение 3, ще дадем едно построение, което за простота, ще бъде за крайно-мерни линейни пространства, но то може да се обобщи и за произволни, а също има и други общи конструкции.

Ще използваме т.нар. "произведение на Крьонекер / Kroenecker", което се определя за произволни правоъгълни матрици така: за

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(k \times l\text{ - матрица}) \qquad\qquad (m \times n\text{ - матрица})$$

полагаме

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & \dots & a_{11} b_{1n} & & a_{1l} b_{11} & \dots & a_{1l} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} b_{m1} & \dots & a_{11} b_{mn} & & a_{1l} b_{m1} & \dots & a_{1l} b_{mn} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{k1} b_{11} & \dots & a_{k1} b_{1n} & & a_{kl} b_{11} & \dots & a_{kl} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} b_{m1} & \dots & a_{k1} b_{mn} & & a_{kl} b_{m1} & \dots & a_{kl} b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

което е $km \times ln$ - матрица

Упражнение 3 (Конструкция на $\otimes$ с произведение на Кронекер).

а) Нека A_1, A_2, B_1, B_2 са матрици, за които са определени матричните произведения $A_1 A_2$ и $B_1 B_2$. Тогава е определено и матричното произведение $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$ и е в сила

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2 \qquad (5)$$

б) Нека $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ са линейни пространства от вектор-стълбове (т.е., от матрици $1 \times n$ и $1 \times m$, съответно). Покажете, че произведението на Кронекер $\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^{nm}$ определя тензорно произведение $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m$ според определението в началото.

в) Нека V и W са произволни крайно-мерни линейни пространства над $\mathbb{K}$. Избирайки базиси в V и W постройте тензорно произведение $V \otimes W$ като приложите предходната подточка б).

г) Нека $e_1, \dots, e_n \in V$ и $f_1, \dots, f_m \in W$ са базиси. Докажете, че
$e_1 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_m, \dots, e_n \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_m$ е базис на $V \otimes W$.

Упражнение 4 (Тензорно произведение на линейни изображения)

а) Нека $A : V_1 \longrightarrow V_2$ и $B : W_1 \longrightarrow W_2$ са линейни изображения. Предполагайки, че са построени тензорните произведения $V_1 \otimes W_1$ и $V_2 \otimes W_2$ докажете, че съществува единствен линеен оператор

$$C : V_1 \otimes W_1 \longrightarrow V_2 \otimes W_2 \text{ , за който}$$

$$C(v \otimes w) = C(v) \otimes C(w) \quad (\text{за } \forall v \in V, w \in W) \qquad (6)$$

Този линеен оператор C се нарича тензорно произведение на линейните оператори A и B и се бележи с $C = A \otimes B$

б) Нека $e_1', \dots, e_{n_1}' \in V_1$ и $f_1', \dots, f_{m_1}' \in W_1$,
$e_1'', \dots, e_{n_2}'' \in V_2$ и $f_1'', \dots, f_{m_2}'' \in W_2$ са базиси и да въведем базисите
$e_1' \otimes f_1', \dots, e_1' \otimes f_{m_1}', \dots, e_{n_1}' \otimes f_1', \dots, e_{n_1}' \otimes f_{m_1}' \in V_1 \otimes W_1$,
$e_1'' \otimes f_1'', \dots, e_1'' \otimes f_{m_2}'', \dots, e_{n_2}'' \otimes f_1'', \dots, e_{n_2}'' \otimes f_{m_2}'' \in V_2 \otimes W_2$.
Тогава преминавайки в горните базиси от линейни оператори към матрици, докажете, че тензорното произведение на линейни оператори преминава в произведение на Кронекер на матрици.

<u>Упражнение 5</u> (Флип на тензорното произведение)

Предполагайки, че са построени тензорните произведения $V \otimes W$ и $W \otimes V$, покажете, че съществува единствено линейно изображение

$$\Phi : V \otimes W \to W \otimes V, \text{ за което}$$
$$\Phi(v \otimes w) = w \otimes v \quad (\text{за } \forall v \in V, w \in W) \tag{7}$$

При това, Φ е изоморфизъм.

<u>Забележка</u>: В случая $V = W$ горния изоморфизъм $\Phi : V \otimes V \to V \otimes V$ не е идентитета (освен ако $\dim V = 1$).

До тук въведохме бинарните тензорни произведения. Те могат да се итерират като е в сила следната асоциативност.

<u>Упражнение 6</u> Нека V, W, L са линейни пространства над $\mathbb{K}$.
Предполагайки, че съществуват бинарни тензорни произведения докажете, че съществува единствено линейно изображение

$$\Theta : V \otimes (W \otimes L) \to (V \otimes W) \otimes L, \text{ за което}$$
$$\Theta(v \otimes (w \otimes t)) = (v \otimes w) \otimes t \quad (\text{за } \forall v \in V, w \in W, t \in L) \tag{8}$$

При това, Θ е изоморфизъм.

За определеност, може да се положи

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \otimes V_n := V_1 \otimes \left(V_2 \otimes \cdots \otimes \left(V_{n-1} \otimes V_n \right) \cdots \right) \qquad (9)$$

Също така, обикновено изоморфизмите от Упражнение 6 се приемат за отъждествявания. За разлика от тях, изоморфизма от Упражнение 5 не може да се приеме за отъждествяване поради причината, която изтъкнахме след упражнението.

Всички резултати от тази точка до тук са валидни и за общи, безкрайно-мерни линейни пространства.

Последният резултат е в сила за крайно-мерни тензорни произведения

Упражнение 7 Нека S и T са крайни множества. Да разгледаме линейните пространства:

$$\mathbb{K}^S = \{ (x_s)_{s\in S} \mid x_s \in \mathbb{K} \text{ за } \forall s \in S \},$$

$$\mathbb{K}^T = \{ (y_t)_{t\in T} \mid y_t \in \mathbb{K} \text{ за } \forall t \in T \},$$

$$\mathbb{K}^{S\times T} = \{ (z_{(s,t)})_{(s,t)\in S\times T} \mid z_{(s,t)} \in \mathbb{K} \text{ за } \forall (s,t) \in S\times T \}.$$

Покажете, че $(x_s) \otimes (y_t) := (z_{(s,t)})$, където $z_{(s,t)} := x_s y_t$ определя изоморфизъм $\mathbb{K}^S \otimes \mathbb{K}^T \cong \mathbb{K}^{S\times T}$ (аналогично е на Упражнение 3 б)).

Горният изоморфизъм обикновено се приема за отъждествяване също.