Квантова теория на информацията и комуникацията

Класическата ентропия се въвежда за вероятностно разпределение

$$\underline{p} = (p_x)_{x \in \Omega}$$

в/у (крайно) множество Ω:

$$S(\underline{p}) = \sum_{x \in \Omega} p_x \log_2 \frac{1}{p_x} \geq 0.$$

с конвенцията $0 . \log \frac{1}{0} := 0.$

Теорема За фиксирано Ω (с m на брой елементи):

а) $S(\underline{p})$ достига минимум 0 при $p_x = 1$ за някое $x \in \Omega$.

б) $S(\underline{p})$ достига максимум $\log_2 m$ при $p_x = \frac{1}{m}$ (равномерното разпр.).

Доказателство. Това е задача за условен екстремум на функцията $S(\underline{p})$.

<u>Теорема</u> За фиксирано Ω (с m на брой елементи):

а) $S(\underline{p})$ достига минимум 0 при $p_x = 1$ за някое $x \in \Omega$.

б) $S(\underline{p})$ достига максимум $\log_2 m$ при $p_x = \frac{1}{m}$ (равномерното разпр.).

<u>Доказателство</u>. Това е задача за условен екстремум на функцията $S(\underline{p})$.

__Теорема__ За фиксирано Ω (с m на брой елементи):

а) $S(\underline{p})$ достига минимум 0 при $p_x = 1$ за някое $x \in \Omega$.

б) $S(\underline{p})$ достига максимум $\log_2 m$ при $p_x = \frac{1}{m}$ (равномерното разпр.).

__Доказателство__. Това е задача за условен екстремум. Условието е: $\sum_{x \in \Omega} p_x = 1$.

Обобщение на теоремата (Гибс / Gibbs)

Нека $\mathcal{E} : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathcal{E}(x)$ е функция. Тогава максимумът на $S(\underline{p})$ при условие, че

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{\underline{p}} = \sum_{x \in \Omega} p_x \mathcal{E}(x) = \overline{\mathcal{E}}$$

се достига при $p_x = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{E}(x)}$,

където $Z = Z(m, \overline{\mathcal{E}})$ и $\beta = \beta(m, \overline{\mathcal{E}})$.

Обобщение на теоремата (Гибс / Gibbs)

Нека $\mathcal{E} : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathcal{E}(x)$

Тогава максимумът на $S(\underline{p})$ при

условие, че $\langle \mathcal{E} \rangle_{\underline{p}} = \overline{\mathcal{E}}$

се достига при $p_x = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{E}(x)}$.

$\triangleleft$ При това, $S_{max} = \log_2 Z + \frac{\beta}{\ln 2} \overline{\mathcal{E}}$.

Ентропията в статистическата механика и термодинамика

Полу-доказаната "H-теорема" на Болцман / Boltzmann (H = ентропия при Болцман) гласи, че H се стреми към своя максимум при еволюцията на механична система.

Ентропията в статистическата механика и термодинамика

"H-теорема" на Болцман / Boltzmann

Механичните системи с голям брой степени на свобода с течение на времето преминават в равновесие, което се изразява в настъпването на максимален "безпорядък". Последното се изразява количествено посредством максималността на ентропията.

Интерпретация на ентропията от гледна точка на проблема за компресия на данни

$m = \dfrac{1}{p_x}$ за равномерното разпределение и

$$\log_2 m = \log_2 \frac{1}{p_x} =: \text{"информация"}$$

има смисъл на неопределеност в събитие с вероятност $p_x = \dfrac{1}{m}$.

С други думи: $\log_2 m$ е броя битове необходими за описанието на множество с m елемента (ако $\log_2 m$ е цяло ...)

и затова, $\log_2 m$ е мярка за информацията необходима за описанието на всичките m равно-вероятни елементарни събития (и с това, да се снеме неопределеността).

Друго съображение: $\log \frac{1}{pq} = \log \frac{1}{p} + \log \frac{1}{q}$

- адитивност при независими вероятности

С други думи: $\log_2 m$ е броя битове необходими за описанието на множество с m елемента (ако $\log_2 m$ е цяло ...)

и затова, $\log_2 m$ е мярка за информацията необходима за описанието на всичките m равно-вероятни елементарни събития (и с това, да се снеме неопределеността).

Друго съображение: $\log \frac{1}{pq} = \log \frac{1}{p} + \log \frac{1}{q}$

-адитивност при независими вероятности

$\Rightarrow$ В общия случай:

$$S(\underline{p}) = \sum_{x \in \Omega} p_x \log_2 \frac{1}{p_x}$$

има смисъл на "средна информация" ("средна неопределеност") на елементарно събитие.

По-прецизна интерпретация

- (I-ва) теорема на Шенън / Shannon

$\Rightarrow$ В общия случай:

$$S(\underline{p}) = \sum_{x \in \Omega} p_x \log_2 \frac{1}{p_x}$$

има смисъл на "средна информация" ("средна неопределеност") на елементарно събитие.

По-прецизна интерпретация
- (I-ва) теорема на Шенън / Shannon

"Практическа" формулировка:

Ако един език е базиран на речник от m думи $\Omega = \{z_1, \dots, z_m\}$, като думата z_k (за $k = 1, \dots, m$) се среща с вероятност p_k в съобщенията на езика, тогава може да се въведе такъв правопис (код) на езика, базиран на азбука с a на брой букви, така че думата z_k да се изписва с $\approx \log_a \frac{1}{p_k}$ на брой букви.

"Практическа" формулировка:

Ако един език е базиран на речник от m думи $\Omega = \{z_1, \dots, z_m\}$, като думата z_k (за $k = 1, \dots, m$) се среща с вероятност p_k в съобщенията на езика, тогава може да се въведе такъв правопис (код) на езика, базиран на азбука с a на брой букви, така че думата z_k да се изписва с $\approx \log_a \frac{1}{p_k}$ на брой букви.

"Практическа" формулировка:

... за речник $\Omega = \{z_1, \dots, z_m\}$,

като думата z_k - вероятност p_k

$\Rightarrow \exists$ азбука с a на брой букви, така че

z_k да се изписва с $\approx \log_a \frac{1}{p_k}$ букви.

"Практическа" формулировка:

... за речник $\Omega = \{z_1, \dots, z_m\}$, като думата z_k - вероятност p_k

$\Rightarrow \exists$ азбука с a на брой букви, така че z_k да се изписва с $\approx \log_a \frac{1}{p_k}$ букви.

Средната дължина на съобщение с N думи е

$$N \cdot S_a(\underline{p}) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(N \cdot p_k)}_{\text{среден \# думи } z_k} \cdot \underbrace{\left(\log_a \frac{1}{p_k}\right)}_{\text{дължина на } z_k}$$

"Практическа" формулировка:

... за речник $\Omega = \{z_1, \dots, z_m\}$,

като думата z_k – вероятност p_k

$\Rightarrow \exists$ азбука с a на брой букви, така че

z_k да се изписва с $\approx \log_a \frac{1}{p_k}$ букви.

Средната дължина на съобщение с N думи е

$$N \cdot S_a(\underline{p}).$$

Тази средна дължина на съобщение в букви е оптимална (неподобряема).

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Нека $\underline{p} = (p(x))_{x \in X}$ – вер. разпр. в/у $\underline{X}$

$\underline{q} = (q(y))_{y \in Y}$ – вер. разпр. в/у Y

идват от съвместното вер. разпределение:

$$\underline{r} = (r(x,y))_{(x,y) \in X \times Y}$$

Така: $r(x,y)$ = вероятност за x и y

$$\Rightarrow \quad p(x) = \sum_{y \in Y} r(x,y),$$

$$q(y) = \sum_{x \in X} r(x,y).$$

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Нека $\underline{p} = (p(x))_{x \in \bar{X}}$ – вер. разпр. в/у $\bar{X}$

$\underline{q} = (q(y))_{y \in Y}$ – вер. разпр. в/у Y

идват от съвместното вер. разпределение:

$$\underline{r} = (r(x,y))_{(x,y) \in X \times Y}$$

Така: $r(x,y)$ = вероятност за x и y

$\Rightarrow$

$$p(x|y) = \frac{r(x,y)}{q(y)}$$ – условна вероятност за x при условие y

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Нека $\underline{p} = (p(x))_{x \in X}$ – вер. разпр. в/у X

$\underline{q} = (q(y))_{y \in Y}$ – вер. разпр. в/у Y

идват от съвместното вер. разпределение:

$$\underline{r} = (r(x,y))_{(x,y) \in X \times Y}$$

Така: $r(x,y)$ = вероятност за x и y

$\Rightarrow$

$$q(y|x) = \frac{r(x,y)}{p(x)}$$ – условна вероятност за y при условие x

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Нека $\underline{p} = (p(x))_{x \in X}$ – вер. разпр. в/у X

$\underline{q} = (q(y))_{y \in Y}$ – вер. разпр. в/у Y

идват от съвместното вер. разпределение:

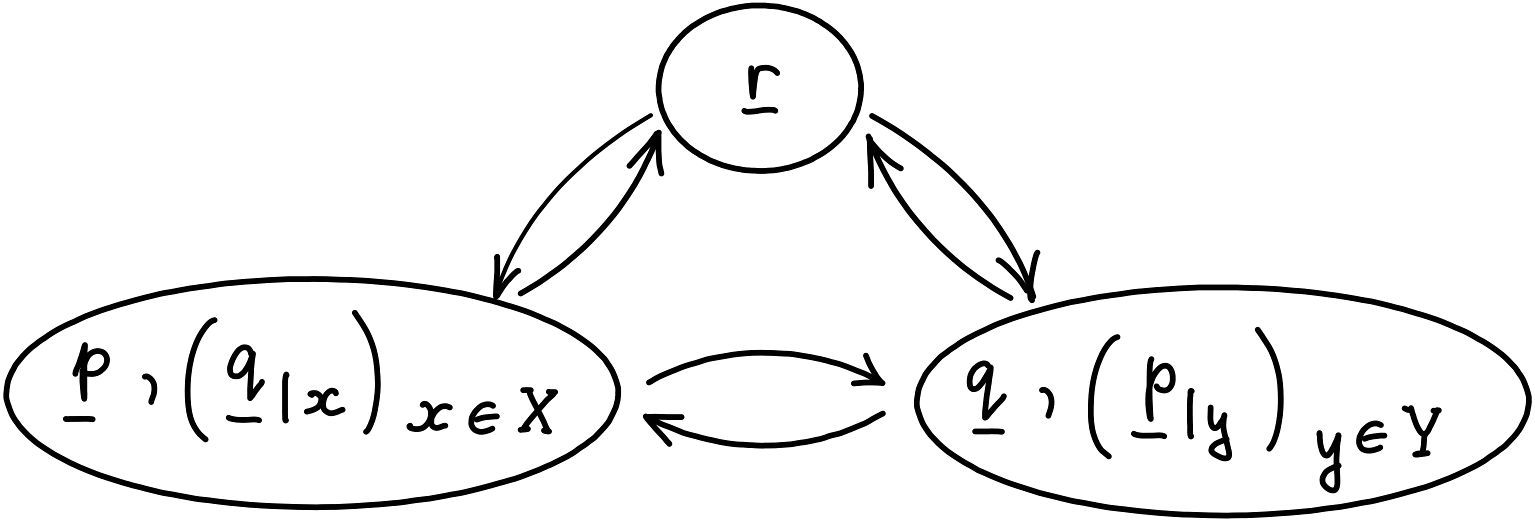
$$\underline{r} = (r(x,y))_{(x,y) \in X \times Y}$$

Така: $r(x,y)$ = вероятност за x и y

Означаваме:

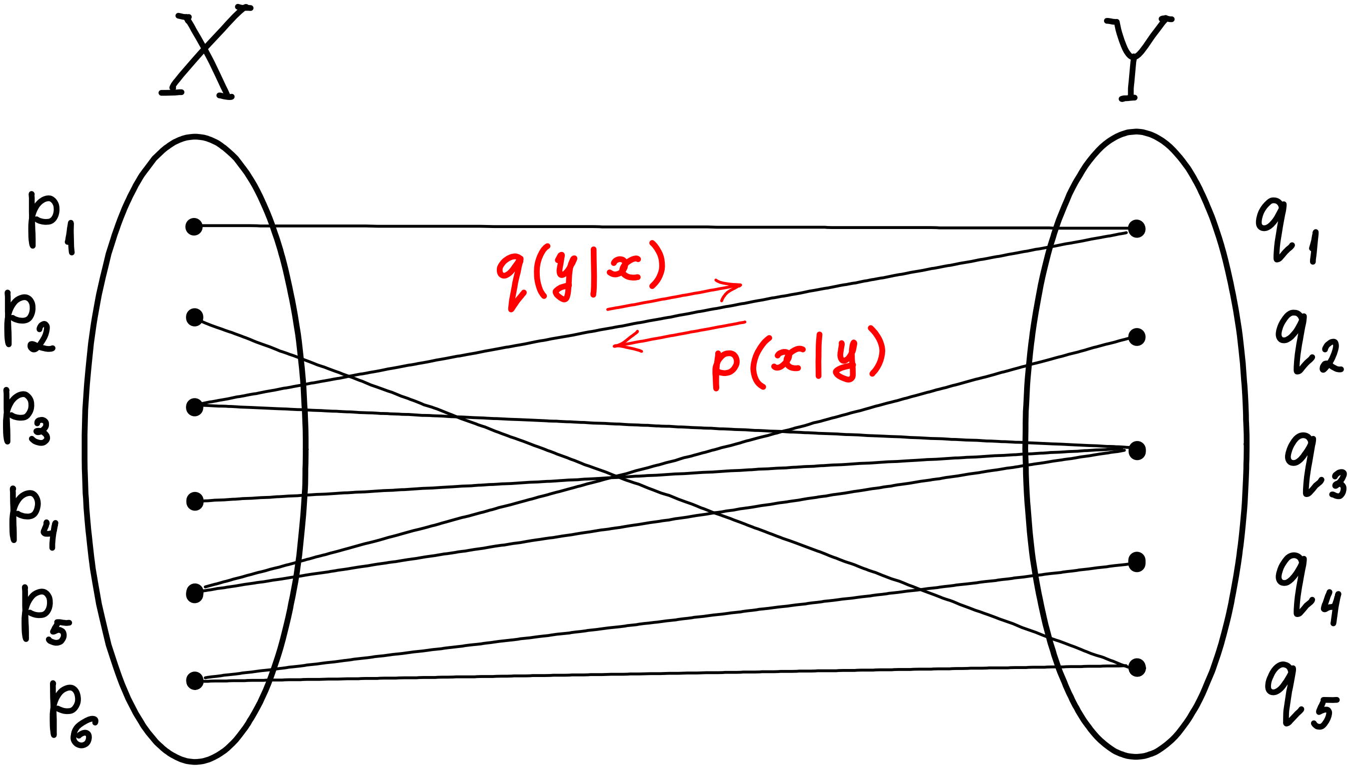
$$\underline{p}_{|y} := (p(x|y))_{x \in X}, \quad \underline{q}_{|x} := (q(y|x))_{y \in Y}$$

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.



Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Предавателен канал - вероятностна схема:



Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Условна ентропия:

$$\underbrace{S(p|q)}_{\geq 0} \equiv S(X|Y) := \sum_{y \in Y} q(y)\, S(\underline{p}_{|y})$$

$$\overbrace{S(q|p)}^{\geq 0} \equiv S(Y|X) := \sum_{x \in X} p(x)\, S(\underline{q}_{|x})$$

<u>Теорема</u> $S(X|Y) = \underbrace{S(X,Y)}_{S(\underline{r})} - S(Y)$

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

взаимна инфо. — относителна ентропия

$$S(X:Y) := S(\underline{r} \,\|\, \underline{p}\,\underline{q})$$

$$:= \sum_{(x,y)\in X\times Y} r(x,y) \log \frac{r(x,y)}{p(x)\,q(y)}$$

Теорема:

$$S(X:Y) = S(X) + S(Y) - S(X,Y)$$

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

взаимна инфо. | относителна ентропия

$$S(X:Y) := S(\underline{r} \,\|\, \underline{p}\,\underline{q})$$

$$:= \sum_{(x,y)\in X\times Y} r(x,y) \log \frac{r(x,y)}{p(x)\,q(y)}$$

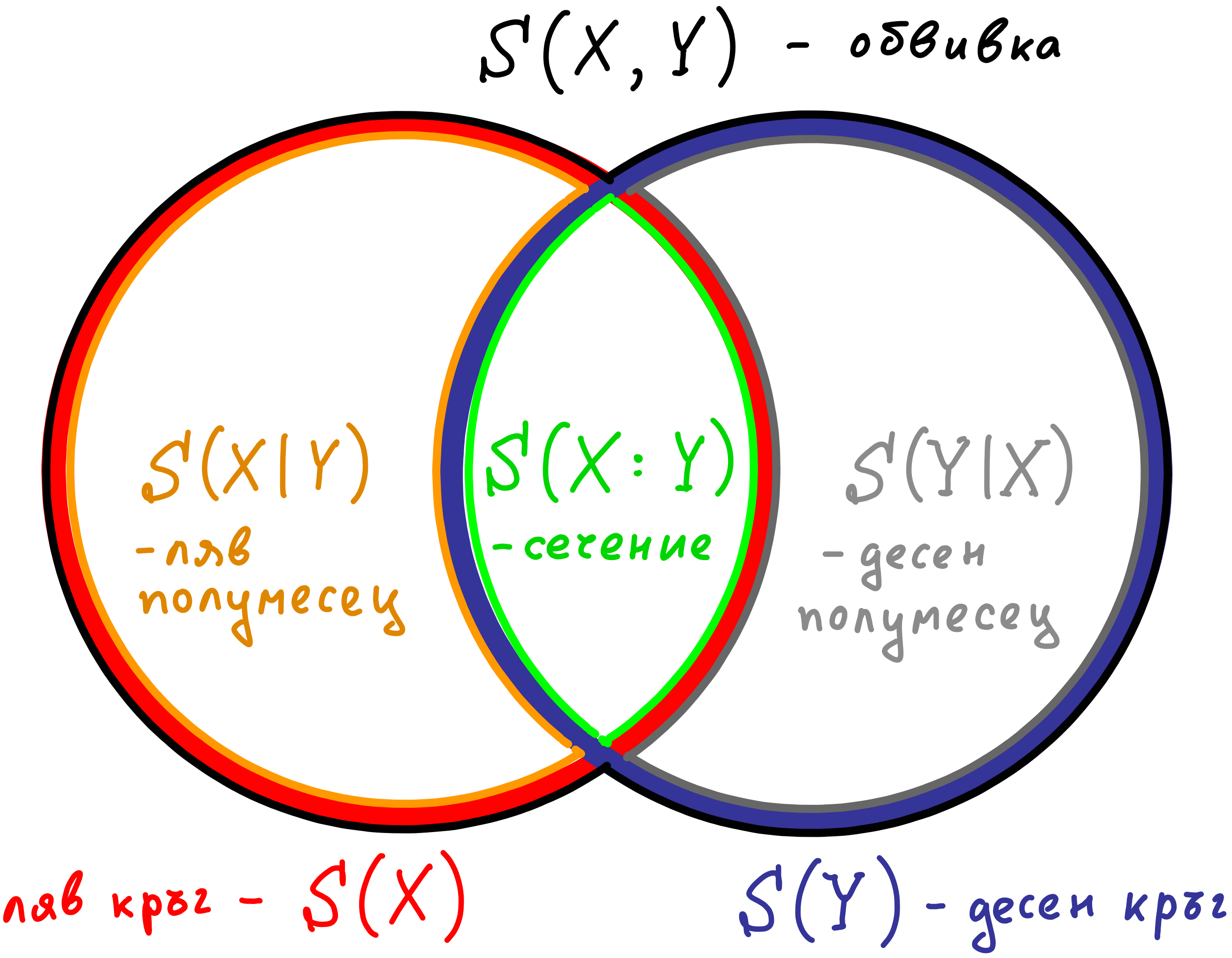
<u>Теорема:</u>

$$0 \leq S(X:Y) \leq \min\{S(X), S(Y)\}$$

$=$ $\Longleftrightarrow$ $X = F(Y)$ или $Y = G(X)$

$=$ $\Longleftrightarrow$ X и Y са независими

Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

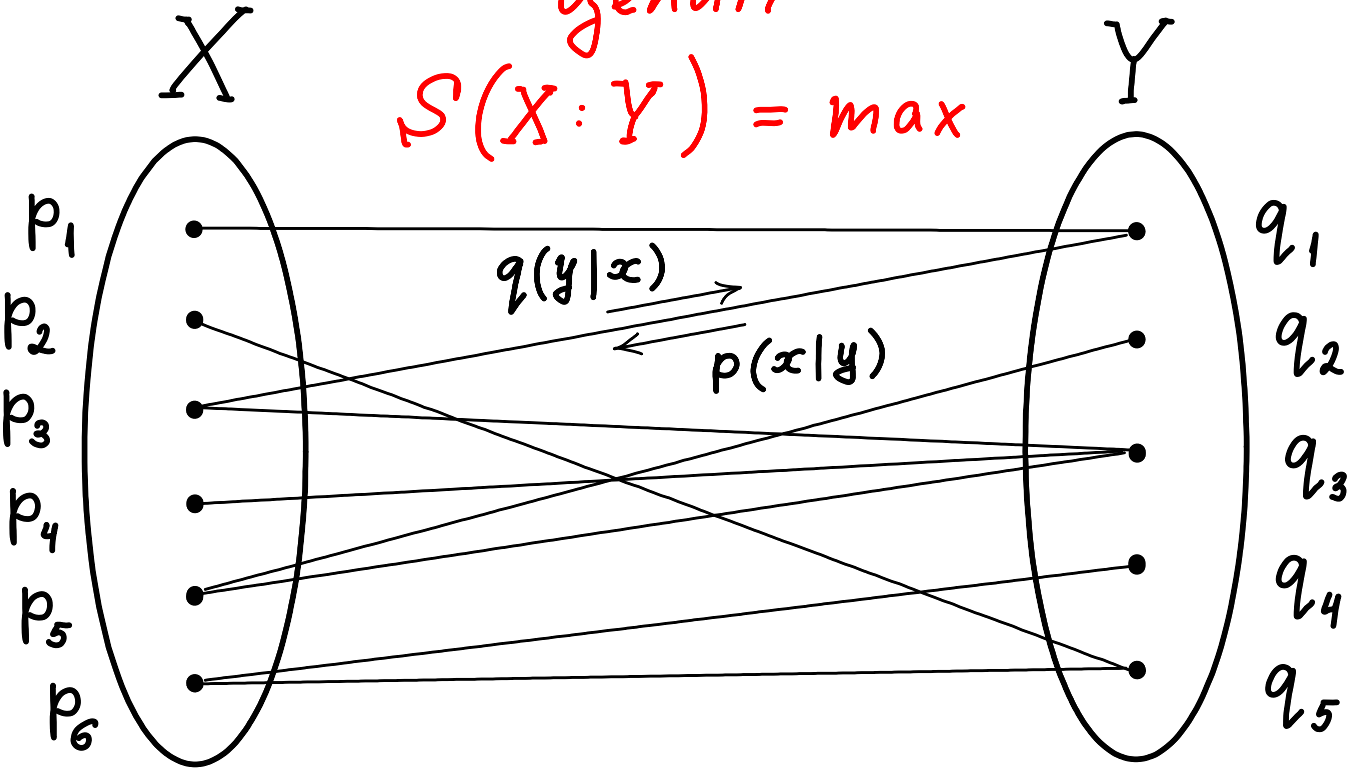


Условна и относителна ентропия. Взаимна инфо.

Предавателен канал - вероятностна схема:

Целим

$S(X:Y) = max$



Квантов случай

$$\underline{p} = (p_x)_{x\in X} \mapsto \hat{p} \equiv \hat{\rho} \in Op(\mathcal{H})$$

– функция на разпределението

– матрица на плътността

$$S(\underline{p}) = \sum_{x\in X} p_x \log \frac{1}{p_x}$$ – ентропия на Шенън

$$\Big\downarrow$$

$$S(\hat{\rho}) := -\operatorname{Tr}(\hat{\rho}\log\hat{\rho})$$ – на фон Нойман

Квантов случай

$\underline{p} = (p_x)_{x \in X} \mapsto \hat{p} \equiv \hat{\rho} \in Op(\mathcal{H})$

– функция на разпределението

– матрица на плътността

$S(\underline{p}) = \sum_{x \in X} p_x \log \frac{1}{p_x}$ – ентропия на Шенън

$\downarrow$

$S(\hat{\rho}) := -\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho} \log \hat{\rho}\right)$ – на фон Нойман

Квантов случай

<u>Следствие</u> $\hat{\rho}$ е чисто състояние

$\left(\iff \hat{\rho} \text{ има ранг } 1 \right)$

$$\iff \quad S(\hat{\rho}) = 0 .$$

Квантов случай

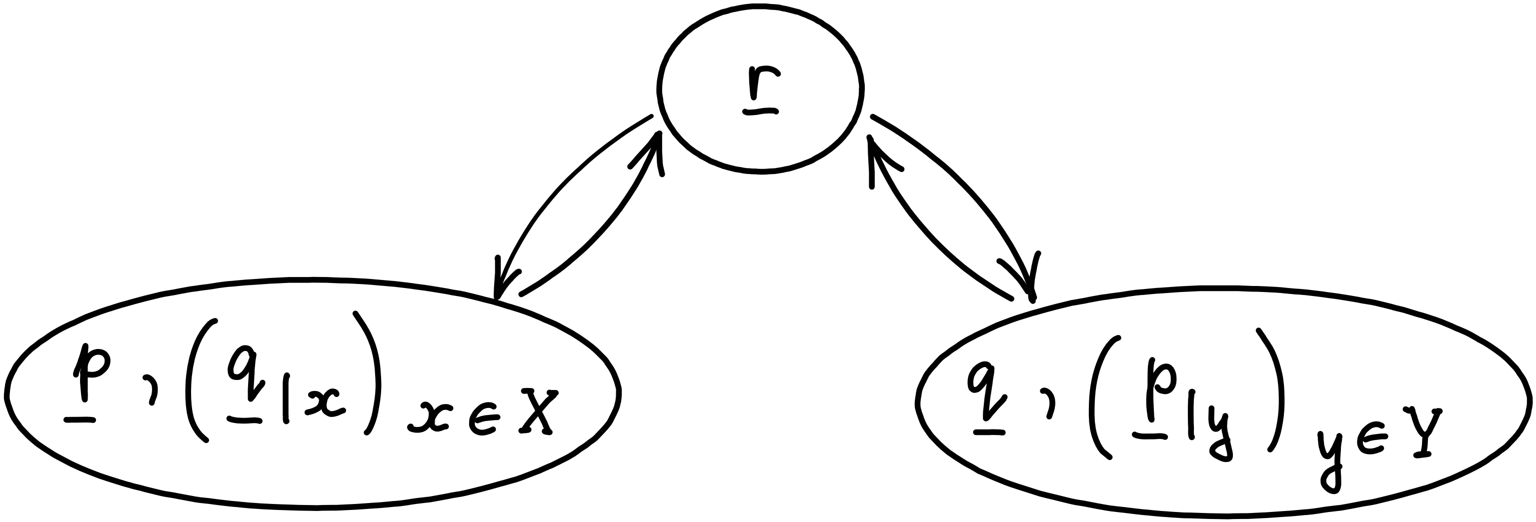
$$\underline{r} = \big(r(x,y)\big)_{(x,y)\in X\times Y}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{r} \equiv \hat{\rho}_{AB} \in Op\left(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B\right)$$

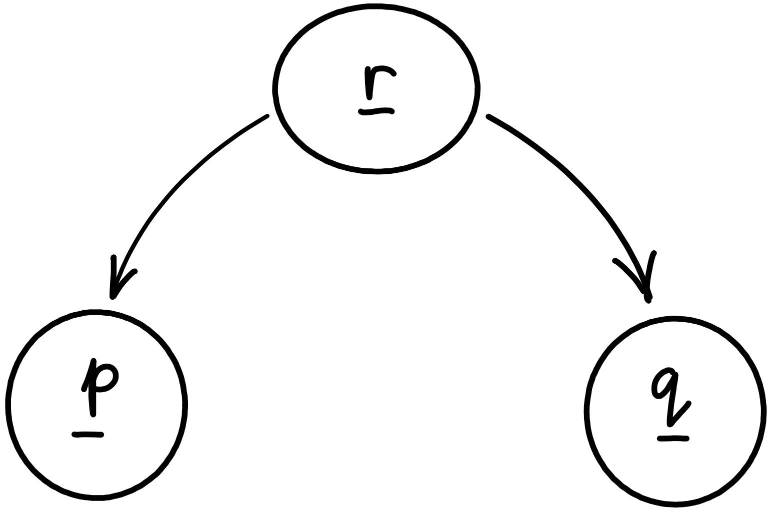
– матрица на плътността на съставна система

Квантов случай



Има ли аналог?

Квантов случай



Частично - да

Квантов случай

$$\begin{tikzcd} & \hat{\rho}_{AB} \arrow[dl, "\mathrm{Tr}_B"'] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_A"] & \\ \hat{\rho}_A & & \hat{\rho}_B \end{tikzcd}$$

Преход към подсистема:

парциални вероятностни разпределения

Квантов случай

Математическо пояснение:

ако $\{e_j\} \subseteq \mathcal{H}_A$ – орт. норм. базис

$\{f_k\} \subseteq \mathcal{H}_B$ – орт. норм. базис

$M \in Op(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ има матрица

$M_{jk;j'k'}$ във базиса $\{e_j \otimes f_k\}$

Квантов случай

Математическо пояснение:

ако $M = \left(M_{jk;j'k'} \right)$, тогава:

$$\operatorname{Tr} M = \sum_{j,k} M_{jk;jk}$$

$$\operatorname{Tr}_A M = \left(\sum_j M_{jk;jk'} \right) \in Op(\mathcal{H}_B)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr}_B \operatorname{Tr}_A M = \operatorname{Tr}_A \operatorname{Tr}_B M$$

Квантов случай

Математическо пояснение:

ако $M = (M_{jk;j'k'})$, тогава:

$$\mathrm{Tr}\, M = \sum_{j,k} M_{jk;jk}$$

$$= \sum_{k} \sum_{j} M_{jk;jk}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Tr}_B \mathrm{Tr}_A M = \mathrm{Tr}_A \mathrm{Tr}_B M$$

Квантов случай

Математическо пояснение:

ако $M = \left(M_{jk;j'k'}\right)$, тогава:

$$\operatorname{Tr} M = \sum_{j,k} M_{jk;jk}$$

$$= \sum_j \sum_k M_{jk;jk}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr}_B \operatorname{Tr}_A M = \operatorname{Tr}_A \operatorname{Tr}_B M$$

Квантов случай

Математическо пояснение:

Преходът към подсистема се обезпечава от тъждеството

$$\langle M_A \rangle_{\hat{\rho}_{AB}} = \mathrm{Tr}_A\left(\mathrm{Tr}_B\left(\hat{\rho}_{AB}\, \underbrace{M_A}_{\in\, \mathrm{Op}\, \mathcal{H}_A}\right)\right)$$

Квантов случай

Математическо пояснение:

Преходът към подсистема се обезпечава от тъждеството

$$\langle M_A \rangle_{\hat{\rho}_{AB}} = Tr_A\left(\left(Tr_B\, \hat{\rho}_{AB} \right) \underbrace{M_A}_{\in\, Op\, \mathcal{H}_A} \right)$$

Квантов случай

Математическо пояснение:

Преходът към подсистема се обезпечава от тъждеството

$$\langle M_A \rangle_{\hat{\rho}_{AB}} = \mathrm{Tr}_A\Big(\underbrace{\big(\mathrm{Tr}_B\,\hat{\rho}_{AB}\big)}_{\hat{\rho}_A}\;\underbrace{M_A}_{\in\, Op\,\mathcal{H}_A}\Big)$$

$$\|$$

$$\langle M_A \rangle_{\hat{\rho}_A} = \mathrm{Tr}_A\big(\hat{\rho}_A M_A\big)$$

Квантов случай

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\rho}_{AB} \arrow[dl, "Tr_B"'] \arrow[dr, "Tr_A"] & \\
\hat{\rho}_A & & \hat{\rho}_B
\end{tikzcd}$$

Преход към подсистема:

$$\hat{\rho}_A = Tr_B\, \hat{\rho}_{AB}\,, \quad \hat{\rho}_B = Tr_A\, \hat{\rho}_{AB}$$

Квантов случай

Парциални вероятностни разпределения:

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\, \hat{\rho}_{AB}\,, \quad \hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A\, \hat{\rho}_{AB}$$

Обаче, за условните разпределения

$$p_{|y}(x) = p(x|y) \quad \text{и} \quad q_{|x}(y) = q(y|x)$$

– няма известни квантови аналози

Квантов случай

$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB})$$ – до тук ≥ 0.

$$S(A|B) := S(A,B) - S(B)$$

$$S(B|A) := S(A,B) - S(A)$$

$$S(A:B) := S(A) + S(B) - S(A,B)$$

Квантов случай

$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB}) \text{ — до тук } \geq 0.$$

$$S(A|B) := S(A,B) - S(B)$$

$$S(B|A) := S(A,B) - S(A)$$

$$S(A:B) := S(A) + S(B) - S(A,B)$$

Квантов случай

$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB})$$ – до тук ≥ 0.

$$\left.\begin{array}{l} S(A|B) < 0 \\ S(B|A) < 0 \end{array}\right\}$$ – възможно е!

$$S(A:B) \geq 0$$ – винаги! – теорема

Квантов случай

$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB})$ – до тук ≥ 0.

$$\left.\begin{aligned} S(A|B) &< 0 \\ S(B|A) &< 0 \end{aligned}\right\}$$

Например:

$\hat{\rho}_{AB}$ – чисто

$\Rightarrow S(\hat{\rho}_{AB}) = 0$.

$S(A:B) \geq 0$ – винаги! – теорема

Квантов случай

$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB})$ – до тук ≥ 0.

$$\left.\begin{array}{l} S(A|B) < 0 \\ S(B|A) < 0 \end{array}\right\}$$

Например: но $\hat{\rho}_A$ – смес $\Rightarrow S(\hat{\rho}_A) > 0$.

$S(A:B) \geq 0$ – винаги! – теорема

Квантов случай

$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB})$$ – до тук ≥ 0.

$$S(A|B) < 0$$

$$S(B|A) < 0$$

Например:

$\hat{\rho}_B$ – смес

$$\Rightarrow S(\hat{\rho}_B) > 0.$$

$$S(A:B) \geq 0$$ – винаги! – теорема

Квантов случай

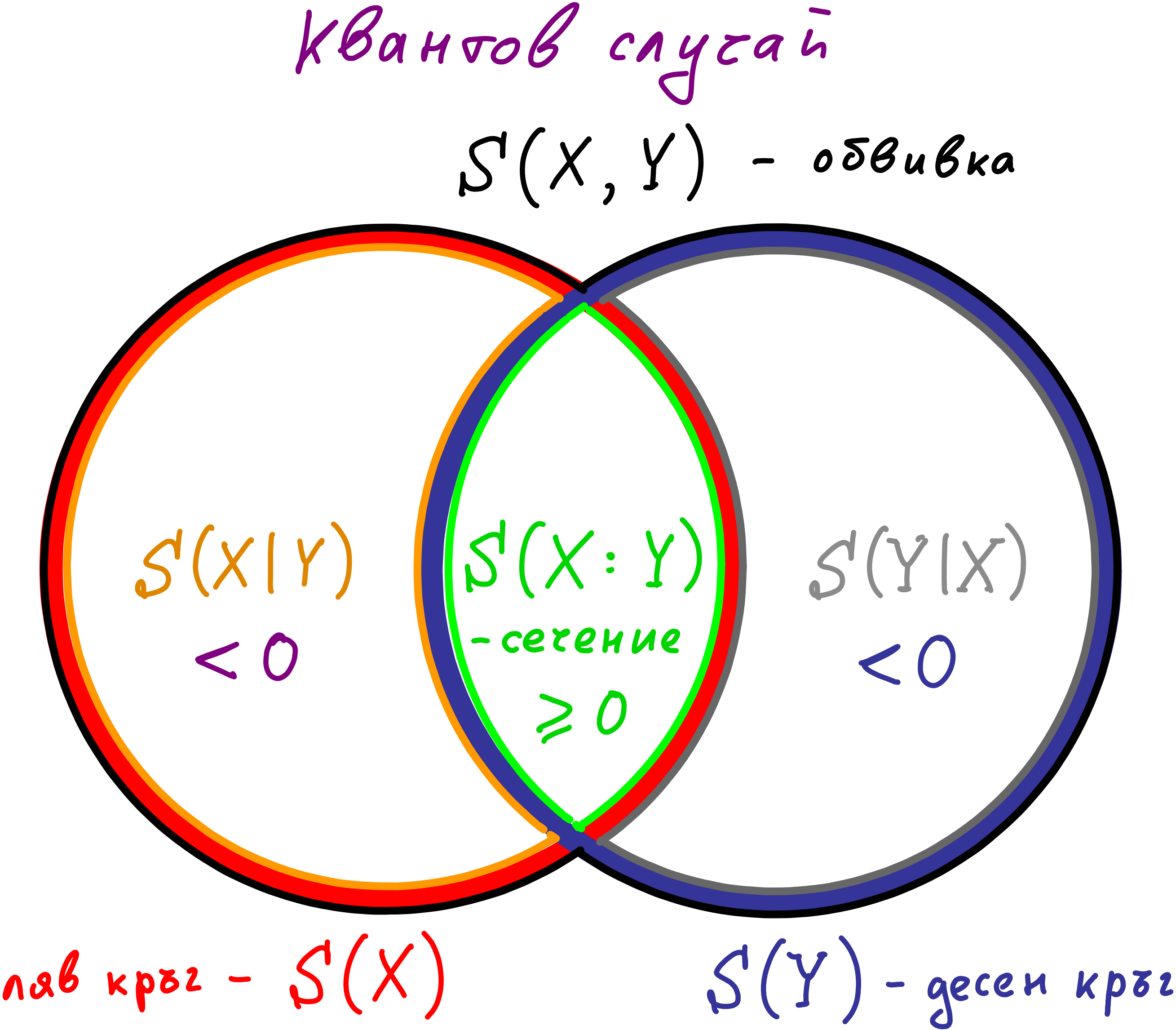
$$S(A) := S(\hat{\rho}_A), \quad S(B) := S(\hat{\rho}_B)$$

$$S(A,B) := S(\hat{\rho}_{AB})$$ — до тук ≥ 0.

Извод:

$$\min\{S(A), S(B)\} \leq S(A:B) \leq S(A) + S(B)$$

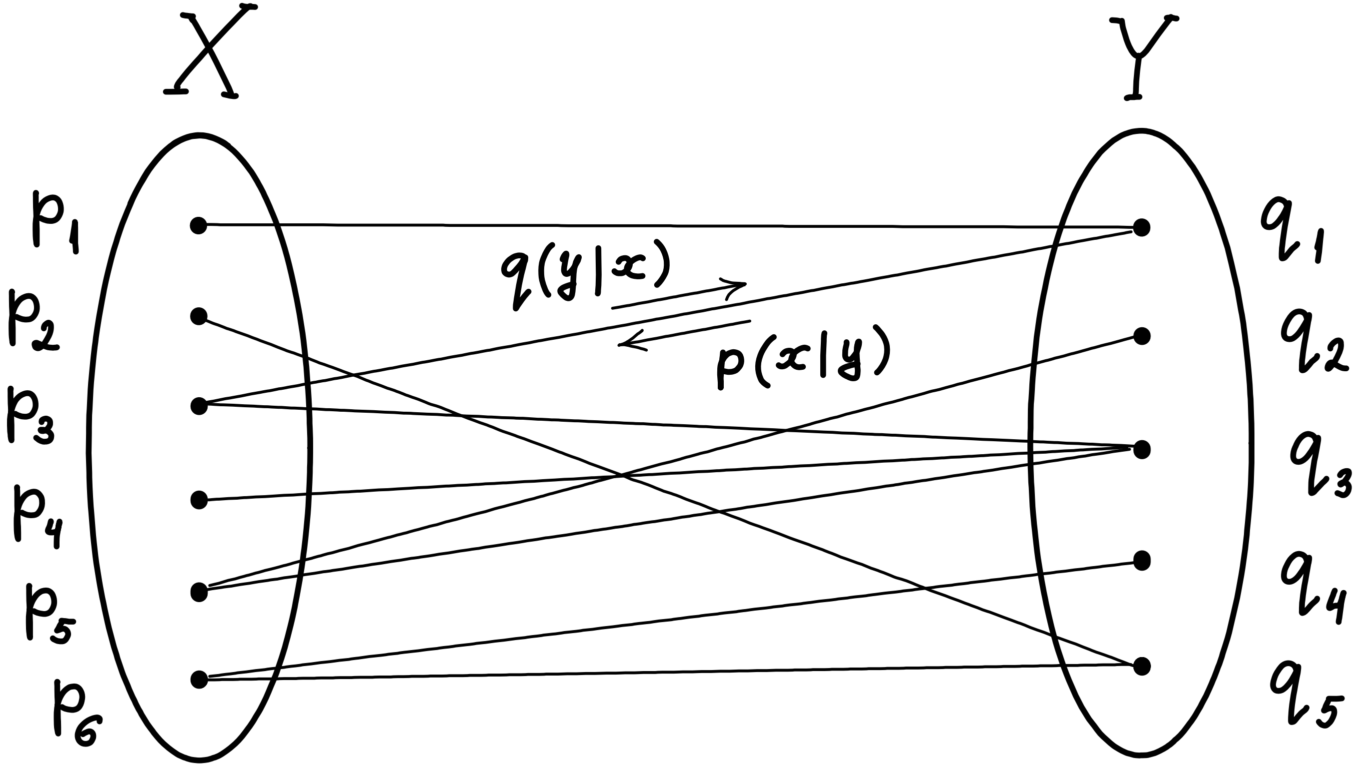
възможно — винаги



Квантов случай
S(X, Y) - обвивка
S(X|Y)
< 0
S(X:Y)
- сечение
≥ 0
S(Y|X)
< 0
ляв кръг - S(X)
S(Y) - десен кръг

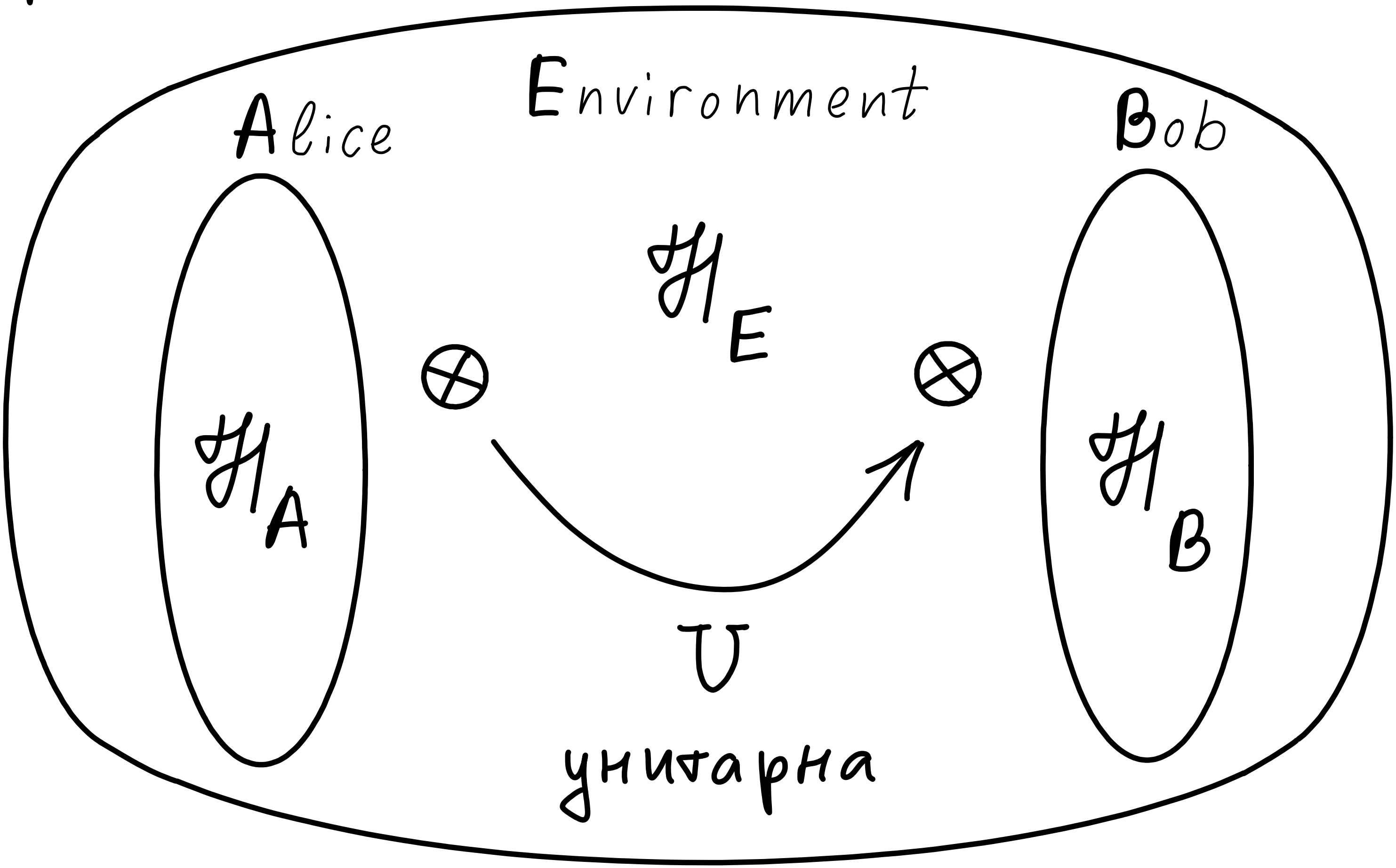
Модели на квантов комуникац. канал

Класически:



Модели на квантов комуникац. канал

Квантов:



Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{U} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\underbrace{\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E}_{\text{приготвяме}} \xmapsto{U} \underbrace{U(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E)U^*}_{\text{трансформираното}}$$

приготвяме състоянието $\hat{\rho}_A$ независимо от средата $\hat{\rho}_E$.

трансформираното състояние е сплетено с околната среда

Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{U} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\underbrace{\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E}_{} \xmapsto{U} \underbrace{U(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E)U^*}_{}$$

приготвяме състоянието $\hat{\rho}_A$ независимо от средата $\hat{\rho}_E$.

трансформираното състояние е сплетено с околната среда

Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{\;U\;} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E \arrow[r, mapsto, "U"] & U\left(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E\right)U^* \\
\hat{\rho}_A \arrow[u, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{U} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E \arrow[r, mapsto, "U"] & U\left(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E\right)U^* \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Tr}_E"'] \\
\hat{\rho}_A \arrow[u, mapsto] & \hat{\rho}_B
\end{tikzcd}$$

Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{\;U\;} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E \arrow[r, mapsto, "U"] & U\left(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_E\right) U^* \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Tr}_E"'] \\
\hat{\rho}_A \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto, "V"] & \hat{\rho}_B
\end{tikzcd}$$

Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{U} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\hat{\rho}_A \xmapsto{V} \hat{\rho}_B$$

- има свойствата на т. нар. напълно положително изобраЖ. (completely positive map).

Модели на квантов комуникац. канал

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{U} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\hat{\rho}_A \xmapsto{V} \hat{\rho}_B$$

- има свойствата на т. нар.

напълно положително изображ.

$$\hat{\rho}_A \geq 0 \implies V \otimes id\left(\hat{\rho}_A \otimes \hat{1}_\ell\right) \geq 0$$

$(\forall \ell)$

Модели на квантов комуникац. канал

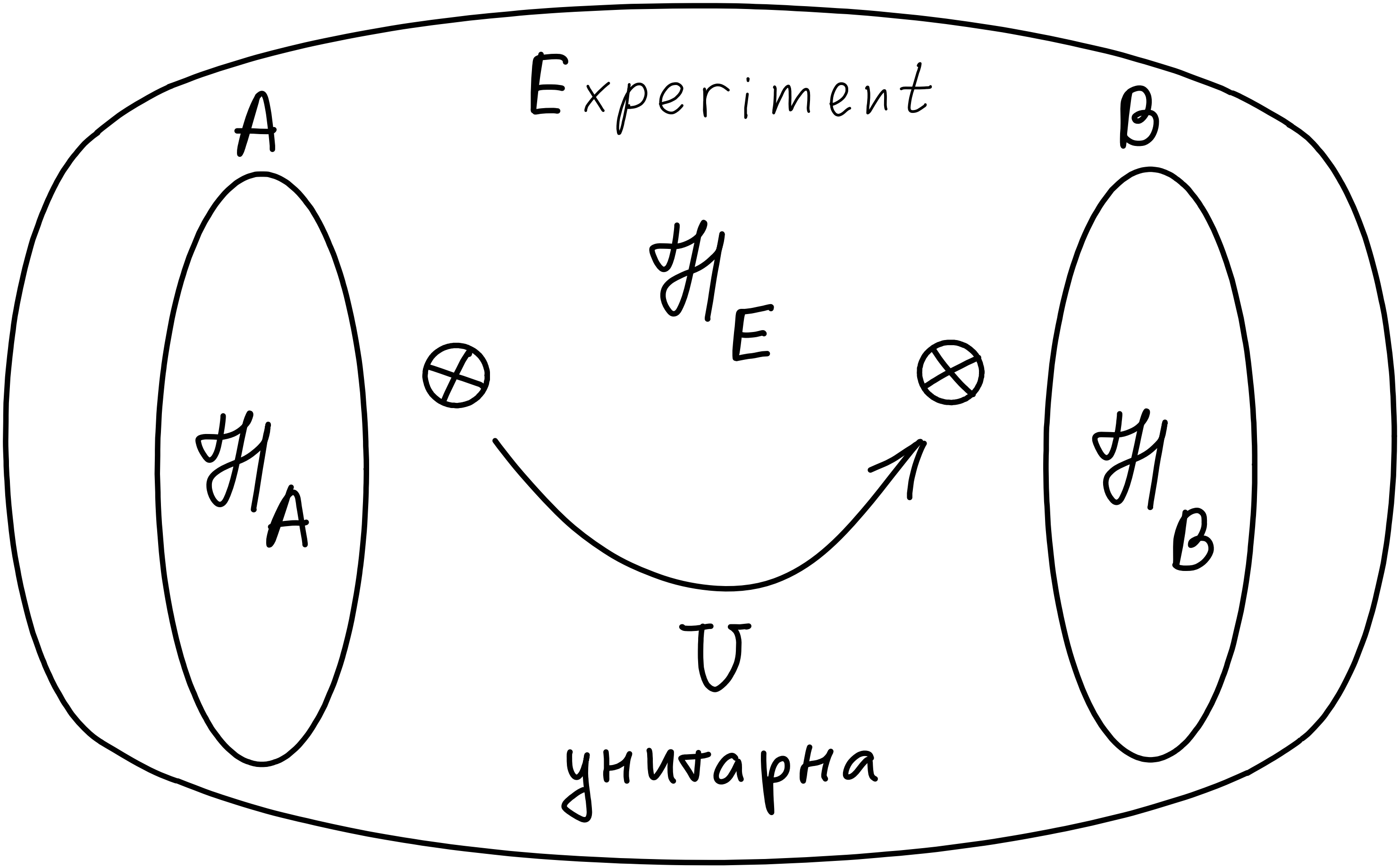
$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{U} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\hat{\rho}_A \xmapsto{V} \hat{\rho}_B$$

<u>Теорема</u> $\exists\ E_r : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B$ за $r = 1, \ldots, s$, т.че:

$$V(\hat{\rho}_A) = \sum_{r=1}^{s} E_r \hat{\rho}_A E_r^*$$

Модел на квантово измерване



Модел на квантово измерване

$\Longrightarrow$

$$\hat{\rho}_A \longmapsto \hat{\rho}_B = \sum_{r=1}^{s} E_r \hat{\rho}_A E_r^*$$

– това обаче е модел, който не може да измести проекционния постулат на фон Нойман

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

A предава класическо съобщение

определено от $\underline{p} = \left(p(x)\right)_{x \in X}$

B разчита класическо съобщение

определено от $\underline{q} = \left(q(y)\right)_{y \in Y}$

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

Комуникацията е по квантов канал

A приготвя за $\forall x \in X$ - състояние $\hat{\rho}_x$

$$\hat{\rho}_x \longmapsto V(\hat{\rho}_x) \text{ - квантов канал}$$

B измерва дизюнктивна система

от събития $(R_y)_{y \in Y}$:

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

Комуникацията е по квантов канал

A приготвя за $\forall x \in X$ – състояние $\hat{\rho}_x$

$\hat{\rho}_x \longmapsto V(\hat{\rho}_x)$ – квантов канал

B измерва $(R_y)_{y \in Y}$: $\sum_y R_y = \hat{1}$,

R_y – събитие, $R_y R_{y'} = 0$ за $y \neq y'$

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

Комуникацията е по квантов канал

A приготвя за $\forall x \in X$ - състояние $\hat{\rho}_x$

$\hat{\rho}_x \longmapsto V(\hat{\rho}_x)$ – квантов канал

B измерва $(R_y)_{y \in Y}$

$$\Longrightarrow \quad q(y|x) = \mathrm{Tr}\left(V(\hat{\rho}_x) R_y\right)$$

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

С това имаме $\underline{p} = (p(x))_{x \in X}$

$\underline{q}|_x = (q(y|x))_{y \in Y}$

$\Longrightarrow$ може да определим

$$S(X:Y) \leq \chi$$

Холево / Holevo

Модели на квант. комуникация
– неравенство на Холево

С това имаме $\underline{p} = \left(p(x)\right)_{x \in X}$

$\underline{q}|_x = \left(q(y|x)\right)_{y \in Y}$

$\Longrightarrow$ може да определим

$$S(X:Y) \leq \chi$$

Холево / Holevo

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

$\Longrightarrow$ може да определим

$$S(X:Y) \leq \chi :=$$

Холево / Holevo

$$S\left(\sum_{x\in X} p(x)\,\hat{\rho}_x\right) - \sum_{x\in X} p(x)\, S(\hat{\rho}_x)$$

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

В търсене на "квантов авантаж"

Кога ще е макс.: $\chi :=$

$$S\left(\sum_{x\in X} p(x)\,\hat{\rho}_x\right) - \sum_{x\in X} p(x)\, S(\hat{\rho}_x)$$

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

В търсене на "квантов авантаж"

Кога ще е макс.: $\chi :=$

$$S\Big(\sum_{x\in X} p(x)\,\hat{\rho}_x\Big) - \sum_{x\in X} p(x) \underbrace{S(\hat{\rho}_x)}_{=\,0}$$

$\hat{\rho}_x$ – чисти $\Rightarrow$ 0

Модели на квант. комуникация – неравенство на Холево

В търсене на "квантов авантаж"

Кога ще е макс.: $\chi :=$

$$\underbrace{S\left(\sum_{x\in X} p(x)\,\hat{\rho}_x\right)}_{\leq\; S(\underline{p}) \,\equiv\, S(\underline{X})} - \sum_{x\in X} p(x)\, \underbrace{S(\hat{\rho}_x)}_{=\,0}$$

$\hat{\rho}_x$ – чисти

Модели на квант. комуникация
– неравенство на Холево

В търсене на "квантов авантаж"

$\Longrightarrow$ класическата оценка

$$S(X:Y) \leq S(X)$$

се влошава (намалява се), ако

$\hat{\rho}_x$ се изберат чисти и

взаимно НЕортогонални