<u>Спектрална теорема</u> Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

Спектрална теорема   Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова	$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

<u>Спектрална теорема</u> Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$Af_j = \lambda_j f_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N$$

реални собствени стойности

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$:
$f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$A f_j = \lambda_j f_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$ реални собствени стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$A f_j = \lambda_j f_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$ реални собствени стойности

При това:

$$\begin{cases} A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N| \\ \hat{I} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N| \end{cases}$$

упражнение
- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$
  и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$A f_j = \lambda_j f_j \, , \; \lambda_j \in \mathbb{R} \, , \; j = 1, \dots, N$$

реални собствени стойности

При това:

$$\begin{cases} A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N| \\ \hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N| \end{cases}$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$, които са единствени с точност до пренареждане

Спектрална теорема

Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$A f_j = \lambda_j f_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N$$

реални собствени стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$ и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$, които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$Af_j = \lambda_j f_j, \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, N$$

реални собствени стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$, които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* = Q_j = Q_j^2$$

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$A f_j = \lambda_j f_j , \; \lambda_j \in \mathbb{R} , \; j = 1, \dots, N$$

реални собствени стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$, които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* = Q_j = Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$

Спектрална теорема

Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$A f_j = \lambda_j f_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N$$

реални собствени стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

  и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$, които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \overset{\downarrow}{=} Q_j \overset{\downarrow}{=} Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$
- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n$, $\quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$A \in Mat_N(\mathbb{C})$, т.е., A е $N \times N$, ермитова

Съществува ортонормиран базис на $\mathbb{C}^N$: $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}^N$, от собствени вектори за A

$$Af_j = \lambda_j f_j, \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, N$$ реални собствени стойности

При това:

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение
- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$
и използвайте равенство върху базис

$A \in \mathcal{A}$ - питомна алгебра

Съществуват двойки $(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_n, Q_n)$, които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти
$$Q_j^* = Q_j = Q_j^2$$
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$
- $\underbrace{\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n}_{\text{разбиване на } \hat{1}}, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

Спектрална теорема

Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

и използвайте равенство върху базис

извод ↑

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \ldots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \overset{\downarrow}{=} Q_j \overset{\downarrow}{=} Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_n Q_n$
- $\underbrace{\hat{1} = Q_1 + \cdots + Q_n}_{\text{разбиване на } \hat{1}}, \quad Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

Нека: $\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k_1}}_{\alpha_1} < \underbrace{\lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_1+2} = \cdots = \lambda_{k_1+k_2}}_{\alpha_2} < \cdots \leq \underbrace{\lambda_N}_{\alpha_n}$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$

$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$

$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + |f_N\rangle\langle f_N|$

упражнение

-приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

и използвайте равенство върху базис

извод ↑

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти

$$Q_j^* \overset{\downarrow}{=} Q_j \overset{\downarrow}{=} Q_j^2$$

- $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_n Q_n$
- $\hat{1} = Q_1 + \cdots + Q_n$, $Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на $\hat{1}$

Спектрална теорема Нека $A = A^*$ (самоспрегнат)

Нека: $\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k_1}}_{\alpha_1} < \underbrace{\lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_1+2} = \cdots = \lambda_{k_1+k_2}}_{\alpha_2} < \cdots \underbrace{\leq \lambda_N}_{\alpha_n}$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$

$$A = \alpha_1 \underbrace{\left(|f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + |f_{k_1}\rangle\langle f_{k_1}| \right)}_{Q_1} + \alpha_2 \underbrace{\left(|f_{k_1+1}\rangle\langle f_{k_1+1}| + \cdots + |f_{k_1+k_2}\rangle\langle f_{k_1+k_2}| \right)}_{Q_2} + \cdots$$

$\xRightarrow{\text{извод}\uparrow}$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са реални и са две по две различни
- $Q_1, \dots, Q_n$ са самоспрегнати идемпотенти $Q_j^* \overset{\downarrow}{=} Q_j \overset{\downarrow}{=} Q_j^2$
- $A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_n Q_n$
- $\underbrace{\hat{1} = Q_1 + \cdots + Q_n}_{\text{разбиване на } \hat{1}}$, $Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на $\hat{1}$

$$A = \lambda_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + \lambda_N |f_N\rangle\langle f_N|$$

$$\hat{1} = |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + |f_N\rangle\langle f_N|$$

упражнение

- приложете двете страни върху $|f_j\rangle$

и използвайте равенство върху базис

За $A = A^*$ $\exists!\ \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $Q_1, \dots, Q_n$

- $Q_j^* = Q_j = Q_j^2$, $j = 1, \dots, n$
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$
- $\hat{1} = Q_1 + \dots + Q_n$, $Q_j Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$

разбиване на $\hat{1}$