Квантов (q-) бит : $\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$ - размерност = 4 , ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

Квантов (q-)бит : $\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$ - размерност $= 4$, ниво $= 2$ (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a},\ d = \bar{d} \text{ - реални} \longleftrightarrow a = r+z,\ d = r-z,\ \underline{r, z \in \mathbb{R}} \\ \bar{b} = c := x + iy,\ \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

общо 4 реални

Квантов (q-) бит: $\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$ - размерност = 4, ниво = 2 (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A = A^*} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a},\ d = \bar{d} \text{ - реални} \longleftrightarrow a = r + z,\ d = r - z,\ \underline{r, z \in \mathbb{R}} \\ \bar{b} = c := x + iy,\ \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

общо 4 реални

$$A = \begin{pmatrix} r + z & x - iy \\ x + iy & r - z \end{pmatrix}$$

Квантов (q-) бит : $\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$ - размерност $= 4$, ниво $= 2$ (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar{a},\ d = \bar{d} \text{ - реални} \longleftrightarrow a = r+z,\ d = r-z,\ \underline{r, z \in \mathbb{R}} \\ \bar{b} = c := x + iy,\ \underline{x, y \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

общо 4 реални

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}, \quad \det\left(A - \lambda \hat{1}\right) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

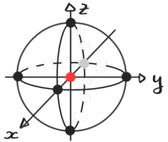
Квантов (q-) бит : $\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$ - размерност $= 4$, ниво $= 2$ (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \overset{\text{наблюдаема}}{=} A^* = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \bar a,\ d = \bar d \text{ - реални} \longleftrightarrow a = r + z,\ d = r - z,\ r, z \in \mathbb{R} \\ \bar b = c := x + iy,\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

общо 4 реални

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix},\quad \det(A - \lambda \hat{1}) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2,\quad \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A \text{ е събитие} \overset{\text{Сп.Т.}}{\iff} \lambda_{1,2} \in \{0, 1\} \iff A = \hat{0},\ \hat{1} \text{ или } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \begin{cases} \text{за } (x,y,z) \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \text{т.е., за } x^2 + y^2 + z^2 = 1. \\ \text{сфера на Блох / Bloch} \end{cases}$$



Квантов (q-) бит : $\mathcal{A} = Mat_2(\mathbb{C})$ - размерност $= 4$, ниво $= 2$ (всяка наблюдаема може да има най-много две стойности)

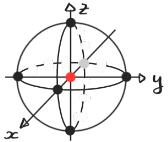
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overset{\text{наблюдаема}}{A} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \bar{a},\ d = \bar{d} \text{ - реални} \longleftrightarrow a = r + z,\ d = r - z,\ r, z \in \mathbb{R} \\ \bar{b} = c := x + iy,\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

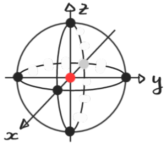
общо 4 реални

$$A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix},\quad \det(A - \lambda \hat{1}) = (r-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2,\quad \lambda_{1,2} = r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A \text{ е събитие} \overset{\text{Сп.Т.}}{\Longleftrightarrow} \lambda_{1,2} \in \{0, 1\} \Longleftrightarrow A = \hat{0},\ \hat{1} \text{ или } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \begin{cases} \text{за } (x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \text{т.е., за } x^2 + y^2 + z^2 = 1 . \\ \text{сфера на Блох / Bloch} \end{cases}$$

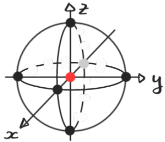
<u>Уникално съвпадение</u> Множеството на елементарните събития (най-простата квантова логическа структура) има геометрията и симетрията на $\mathbb{S}^2$ (двумерната сфера).




z
y
x

Состояния : $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$ линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

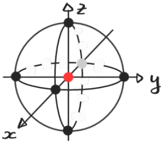
$$= \rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21} + \rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}$$



Состояния : $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} := \hat{\rho}$$

$$= \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}}$$



Състояния : $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

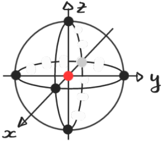
$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} := \hat{\rho}$

$$= \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = tr(\hat{\rho} A)$$

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ ← квадратна

trace

$tr\, A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$



Състояния : $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

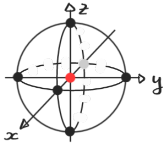
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}}_{:= \hat{\rho}} \quad = \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = tr(\hat{\rho} A)$$

"матрица на плътността" на състоянието ρ

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ ← квадратна

trace

$$tr A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$$



Състояния : $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix} := \hat{\rho}$$

$$= \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = tr(\hat{\rho} A)$$

"матрица на плътността" на състоянието ρ

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN}\end{pmatrix}$ ← квадратна

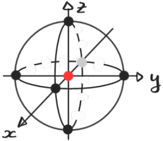
trace

$$tr\, A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$$

Основни свойства на следата

- $tr(\underbrace{AB \cdots C}_{\text{квадратна}}) = tr(B \cdots CA)$ ← цикличност

  квадратна, но $A, B, \ldots, C$ - по-общи
- $tr\, \hat{1}_N = N$ $\quad N \times N$



Състояния: $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$= \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = tr(\hat{\rho} A)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} := \hat{\rho}$$

"матрица на плътността" на състоянието ρ

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ ← квадратна

trace

$$tr\, A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$$

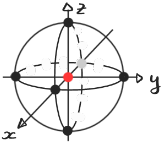
Основни свойства на следата

- $tr(\underbrace{AB \cdots C}) = tr(B \cdots CA)$ ← цикличност

  квадратна, но $A, B, \ldots, C$ - по-общи
- $tr\, \hat{1}_N = N$ $N \times N$

Теорема ρ е състояние (т.е., $\rho(\hat{1}) = 1$ и $\rho(A^* A) \geq 0$) $\Longleftrightarrow$

- $tr\, \hat{\rho} = 1$
- $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$
- $\hat{\rho}$ е положително дефинитна



Състояния: $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} := \hat{\rho}$$

$$= \underbrace{\rho_{11} a_{11} + \rho_{12} a_{21}}_{(\hat{\rho} A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21} a_{12} + \rho_{22} a_{22}}_{(\hat{\rho} A)_{22}} = tr(\hat{\rho} A)$$

"матрица на плътността" на състоянието ρ

Теорема ρ е състояние (т.е., $\rho(\hat{1}) = 1$ и $\rho(A^* A) \geq 0$) $\Leftrightarrow$

- $tr\,\hat{\rho} = 1$
- $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$
- $\hat{\rho}$ е положително дефинитна

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ ← квадратна

trace

$$tr\,A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$$

Основни свойства на следата

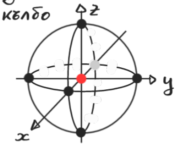
- $tr(\underbrace{AB \cdots C}) = tr(B \cdots CA)$ ← цикличност
  квадратна, но $A, B, \ldots, C$ - по-общи
- $tr\,\hat{1}_N = N$ — $N \times N$

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

кълбо



Състояния: $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$= \underbrace{\rho_{11}a_{11} + \rho_{12}a_{21}}_{(\hat\rho A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21}a_{12} + \rho_{22}a_{22}}_{(\hat\rho A)_{22}} = tr(\hat\rho A)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix} := \hat\rho$$

"матрица на плътността" на състоянието ρ

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN}\end{pmatrix}$ ← квадратна

trace

$$tr\, A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$$

Основни свойства на следата

- $tr(\underbrace{AB\cdots C}) = tr(B\cdots CA)$ ← цикличност
  квадратна, но $A, B, \ldots, C$ - по-общи
- $tr\,\hat{1}_N = N$ — $N\times N$

Теорема ρ е състояние (т.е., $\rho(\hat 1) = 1$ и $\rho(A^*A) \geq 0$) $\Leftrightarrow$

- $tr\,\hat\rho = 1$
- $\hat\rho = \hat\rho^*$
- $\hat\rho$ е положително дефинитна

Теорема $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - смес

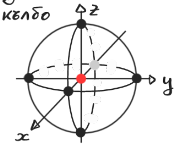
$$\Leftrightarrow \quad \hat\rho = q_1\hat\rho_1 + q_2\hat\rho_2$$

За квантов бит

$$\hat\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z\end{pmatrix}$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

кълбо



Състояния: $\rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ ← линейно по $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$= \underbrace{\rho_{11}a_{11} + \rho_{12}a_{21}}_{(\hat\rho A)_{11}} + \underbrace{\rho_{21}a_{12} + \rho_{22}a_{22}}_{(\hat\rho A)_{22}} = \operatorname{tr}(\hat\rho A)$$

$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix} := \hat\rho$ — "матрица на плътността" на състоянието ρ

Следа на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN}\end{pmatrix}$ ← квадратна

trace

$\operatorname{tr} A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$

Основни свойства на следата

- $\operatorname{tr}(\underbrace{AB\cdots C}_{\text{квадратна, но } A, B, \ldots, C \text{ - по-общи}}) = \operatorname{tr}(B\cdots CA)$ ← цикличност
- $\operatorname{tr} \hat 1_N = N$ $N \times N$

Теорема ρ е състояние (т.е., $\rho(\hat 1) = 1$ и $\rho(A^*A) \geq 0$) $\Longleftrightarrow$
- $\operatorname{tr}\hat\rho = 1$
- $\hat\rho = \hat\rho^*$
- $\hat\rho$ е положително дефинитна

Теорема $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - смес

$\Longleftrightarrow \hat\rho = q_1\hat\rho_1 + q_2\hat\rho_2$

Следствие ρ - чисто $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\hat\rho = 1$

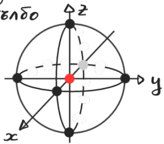
$\Longleftrightarrow \hat\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

За квантов бит

$$\hat\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z\end{pmatrix}$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

кълбо



<u>Следствие</u> ρ - чисто $\Leftrightarrow \operatorname{rank} \hat{\rho} = 1$

$\Leftrightarrow \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

За квантов бит

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

при $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

кълбо