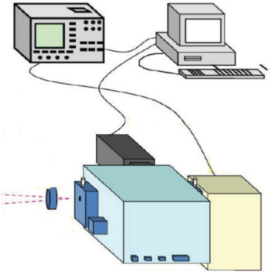
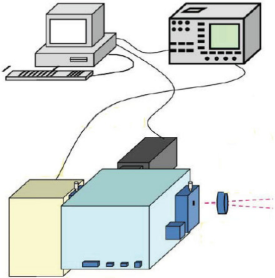
Съставни системи



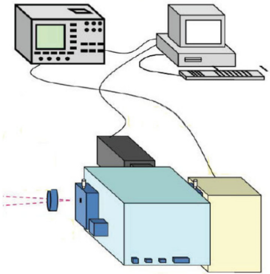
система A

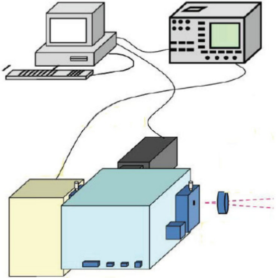


система B

Данни **A**: (α, α')

Данни **B**: (β, β', β'')



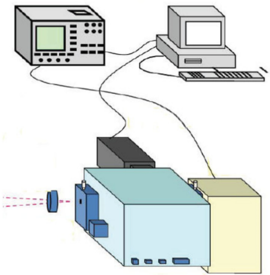


система **A**

система **B**

Данни **A**:

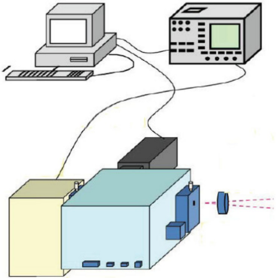
(α, α')



$|\alpha, \alpha'\rangle$

Данни **B**:

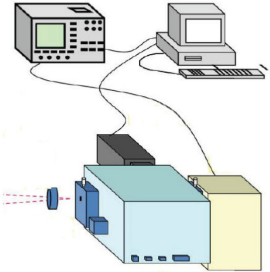
(β, β', β'')



$|\beta, \beta', \beta''\rangle$

Данни **A**:

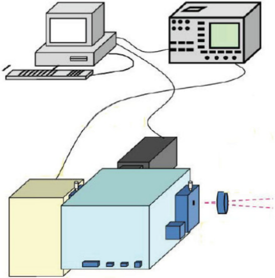
(α, α')



Ортонормиран базис индексиран с данните на експеримента "A" $\rightarrow |\alpha, \alpha'\rangle$

Данни **B**:

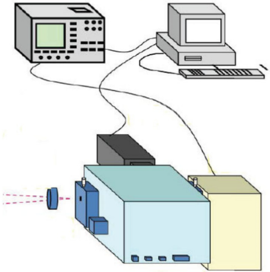
(β, β', β'')



$|\beta, \beta', \beta''\rangle$

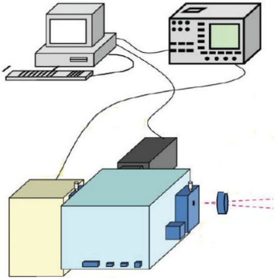
Данни **A**:

(α, α')



Данни **B**:

(β, β', β'')

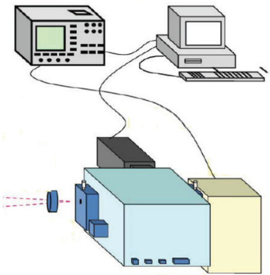


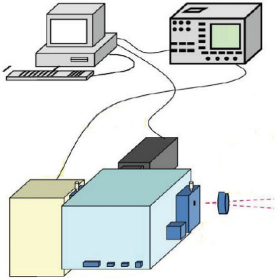
Ортонормиран базис индексиран с данните на експеримента "A" $\rightarrow |\alpha, \alpha'\rangle$

$|\beta, \beta', \beta''\rangle \leftarrow$ и аналогично за "B"

Данни **A**: (α, α')

Данни **B**: (β, β', β'')





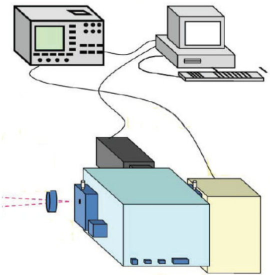
Ортонормиран базис индексиран с данните на експеримента "A" $\rightarrow |\alpha, \alpha'\rangle$

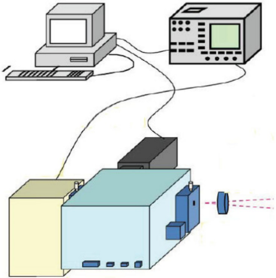
$|\beta, \beta', \beta''\rangle \leftarrow$ и аналогично за "B"

Бра-кет означения от втория вид: в скобите стои информация за базисен вектор

Данни $A \cup B$:

$$(\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta'')$$

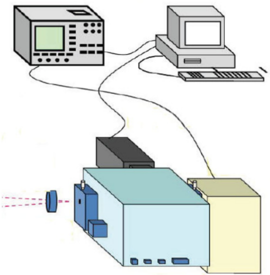


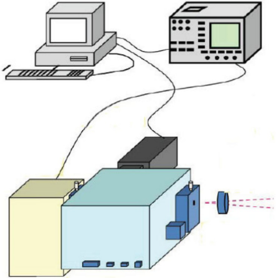


$|\alpha, \alpha'\rangle$ $\qquad$ $|\beta, \beta', \beta''\rangle$

Данни $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$:

$$(\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta'')$$



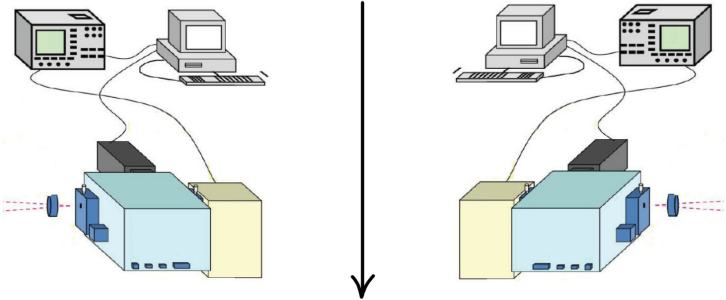


$$\downarrow$$

$$|\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta''\rangle$$

Данни $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$:

$$(\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta'')$$

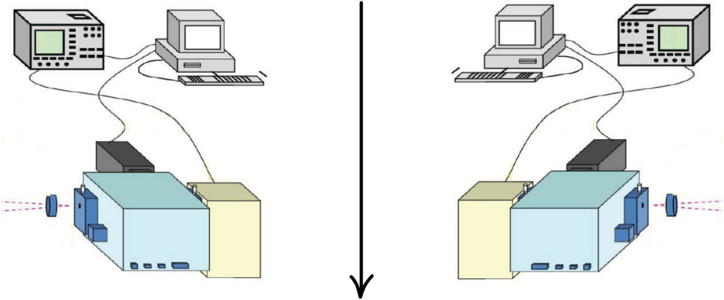


Ортонормиран базис за съставната система "A∪B"
Той е индексиран с данните на двата експеримента

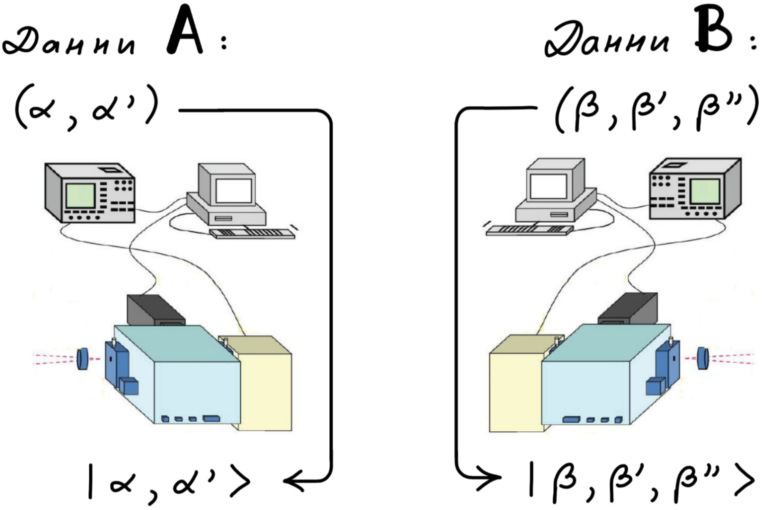
$$|\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta''\rangle$$

Данни $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$:

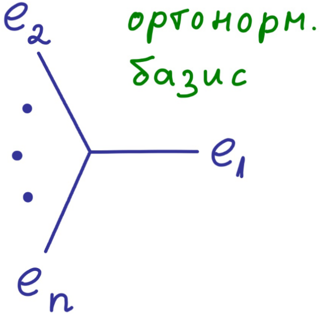
$$(\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta'')$$



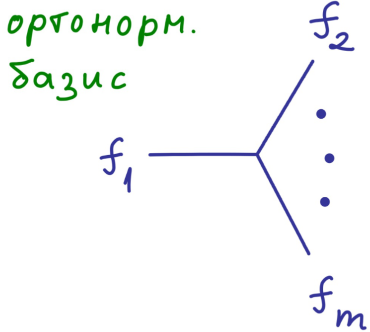
$$|\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \beta''\rangle$$


Данни A:
(α, α')
$|\alpha, \alpha'\rangle$
Данни B:
(β, β', β'')
$|\beta, \beta', \beta''\rangle$

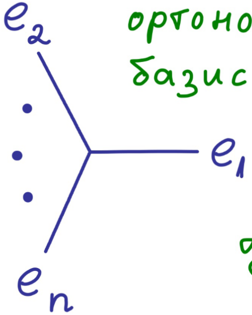
Данни **A**:



Данни **B**:



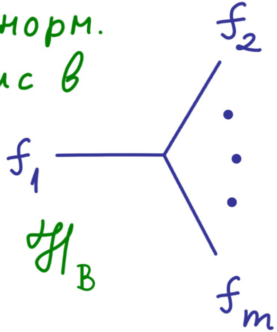
Данни **A**:

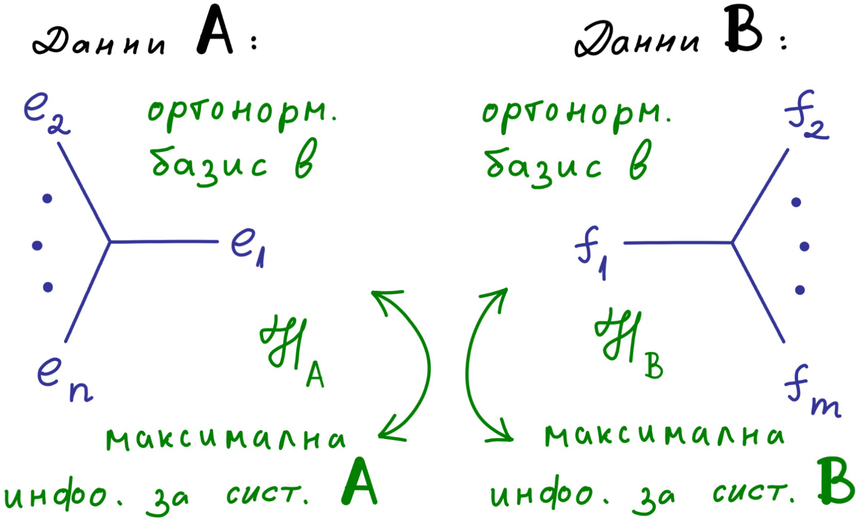


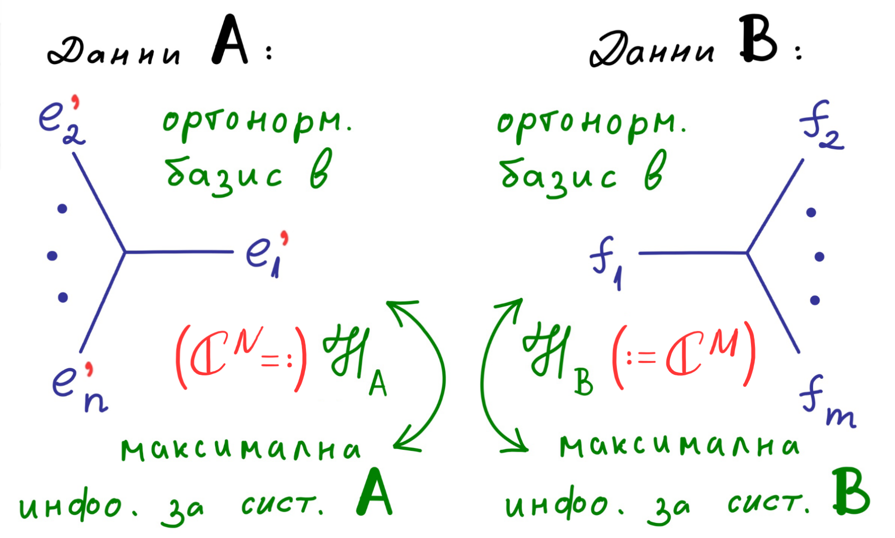
ортонорм. базис в $\mathcal{H}_A$

Данни **B**:

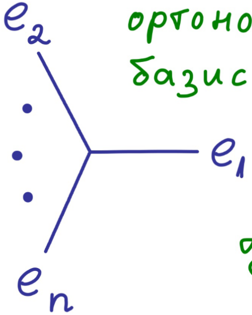
ортонорм. базис в $\mathcal{H}_B$




Данни A:
Данни B:
ортонорм. базис в
ортонорм. базис в
e2
e1
en
f2
f1
fm
HA
HB
максимална инфо. за сист. A
максимална инфо. за сист. B


Данни A:
Данни B:
ортонорм. базис в
ортонорм. базис в
e_2'
e_1'
e_n'
f_2
f_1
f_m
$(\mathbb{C}^N =:) \mathcal{H}_A$
$\mathcal{H}_B (:= \mathbb{C}^M)$
максимална инфо. за сист. A
максимална инфо. за сист. B

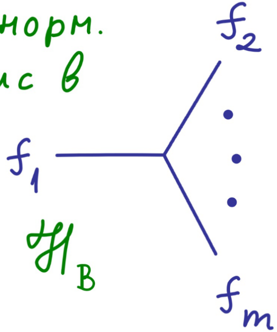
Данни **A**:



ортонорм. базис в $\mathcal{H}_A$

максимална инфо. за сист. **A**

Данни **B**:



ортонорм. базис в $\mathcal{H}_B$

максимална инфо. за сист. **B**

Данни **A**:

ортонорм.
базис
$e_j = |e_j\rangle$
в $\mathcal{H}_A$

максимална
инфо. за сист. **A**

Данни **B**:

ортонорм.
базис
$f_k = |f_k\rangle$
в $\mathcal{H}_B$

максимална
инфо. за сист. **B**

Данни **A**:

произволен

ортонорм.
базис
$e_j = |e_j\rangle$

в $\mathcal{H}_A$

Данни **B**:

ортонорм.
базис
$f_k = |f_k\rangle$

в $\mathcal{H}_B$

максимална
инфо. за сист. **A**

максимална
инфо. за сист. **B**

Данни **A**:

ортонорм. базис

$e_j = |e_j\rangle$

в $\mathcal{H}_A$

максимална инфо. за сист. **A**

Данни **B**:

ортонорм. базис

$f_k = |f_k\rangle$

в $\mathcal{H}_B$

максимална инфо. за сист. **B**

Данни $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$:

ортонорм.
базис
$|e_j\rangle |f_k\rangle$
в $\mathcal{H}_{AB}$

$\Updownarrow$

максимална
инфо. за сист. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

Данни $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$:

ортонорм.
базис

$|e_j\rangle|f_k\rangle$

в $\mathcal{H}_{AB}$

Хилбертово пространство за $A \cup B$

$\Updownarrow$

максимална
инфо. за сист. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

Данни $A \cup B$:

ортонорм.
базис

$$|e_j\rangle|f_k\rangle \equiv e_j \otimes f_k$$

алтернативни
матем.
означения

в $\mathcal{H}_{AB}$

Хилбертово пространство за $A \cup B$

$\updownarrow$

максимална
инфо. за сист. $A \cup B$

Данни $A \cup B$:

ортонорм.
базис

$|e_j\rangle|f_k\rangle \equiv e_j \otimes f_k$

алтернативни
матем.
означения

в $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

Хилбертово пространство за $A \cup B$

$\updownarrow$

максимална
инфо. за сист. $A \cup B$

$\Longrightarrow$

Необходимо ни е хилб. прост-во на състоянията $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, което е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$
$$u, v \longmapsto u \otimes v .$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B &\longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v &\longmapsto u \otimes v. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$
$$u, v \longmapsto u \otimes v.$$

а) $\forall$ два базиса $\{e_j\} \subset \mathcal{H}_A$ и $\{f_k\} \subset \mathcal{H}_B$ се изобразяват във базис $\{e_j \otimes f_k\}$.

$$\Longrightarrow \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B &\longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v &\longmapsto u \otimes v . \end{aligned}$$

а) базиси $\longmapsto$ базиси ;

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B &\longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v &\longmapsto u \otimes v . \end{aligned}$$

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes v = \lambda_1 (u_1 \otimes v) + \lambda_2 (u_2 \otimes v)$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B &\longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v &\longmapsto u \otimes v. \end{aligned}$$

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes v = \lambda_1 (u_1 \otimes v) + \lambda_2 (u_2 \otimes v)$$

$$u \otimes (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u \otimes v_1) + \lambda_2 (u \otimes v_2)$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$u, v \longmapsto u \otimes v.$$

= разделна линейност

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes v = \lambda_1 (u_1 \otimes v) + \lambda_2 (u_2 \otimes v)$$

$$u \otimes (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u \otimes v_1) + \lambda_2 (u \otimes v_2)$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$u, v \longmapsto u \otimes v.$$

= разделна линейност

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

Физиците казват

$\underbrace{\text{“суперпозиция}}_{=\text{ линейна комбинация}} \longmapsto \text{суперпозиция”}$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ е снабдено с изображение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B &\longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v &\longmapsto u \otimes v . \end{aligned}$$

= разделна линейност

а) базиси $\longmapsto$ базиси ; б) Билинейност:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes v = \lambda_1 (u_1 \otimes v) + \lambda_2 (u_2 \otimes v)$$

$$u \otimes (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u \otimes v_1) + \lambda_2 (u \otimes v_2)$$

Конструиране (модел) на тенз. произведение

посредством **произведението на Кронекер**

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & \dots & a_{11} b_{1n} & & a_{1\ell} b_{11} & \dots & a_{1\ell} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} b_{m1} & \dots & a_{11} b_{mn} & & a_{1\ell} b_{m1} & \dots & a_{1\ell} b_{mn} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{k1} b_{11} & \dots & a_{k1} b_{1n} & & a_{k\ell} b_{11} & \dots & a_{k\ell} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} b_{m1} & \dots & a_{k1} b_{mn} & & a_{k\ell} b_{m1} & \dots & a_{k\ell} b_{mn} \end{pmatrix}$$

за: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\ell} \end{pmatrix}$ $k \times \ell$ - матрица и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ - матрица

Конструиране (модел) на тенз. произведение

посредством произведението на Кронекер

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & & a_{1l}b_{11} & \cdots & a_{1l}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{m1} & \cdots & a_{11}b_{mn} & & a_{1l}b_{m1} & \cdots & a_{1l}b_{mn} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{k1}b_{11} & \cdots & a_{k1}b_{1n} & & a_{kl}b_{11} & \cdots & a_{kl}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}b_{m1} & \cdots & a_{k1}b_{mn} & & a_{kl}b_{m1} & \cdots & a_{kl}b_{mn} \end{pmatrix}$$

за: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}$ $k \times l$ - матрица и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ - матрица

Конструиране (модел) на тенз. произведение

посредством **произведението на Кронекер**

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & \cdots & a_{11} b_{1n} & & a_{1\ell} b_{11} & \cdots & a_{1\ell} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} b_{m1} & \cdots & a_{11} b_{mn} & & a_{1\ell} b_{m1} & \cdots & a_{1\ell} b_{mn} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{k1} b_{11} & \cdots & a_{k1} b_{1n} & & a_{k\ell} b_{11} & \cdots & a_{k\ell} b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} b_{m1} & \cdots & a_{k1} b_{mn} & & a_{k\ell} b_{m1} & \cdots & a_{k\ell} b_{mn} \end{pmatrix}$$

за: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\ell} \end{pmatrix}$ $k \times \ell$ - матрица и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ - матрица

Конструиране (модел) на тенз. произведение

За $\begin{rcases} \mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N \\ \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M \end{rcases}$ линейни пространства от вектор-стълбове

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \; \left(= \mathcal{H}_{AB} \right) := \overbrace{\mathbb{C}^{NM}}$$

Конструиране (модел) на тенз. произведение

За $\left.\begin{array}{l}\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N \\ \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M\end{array}\right\}$ линейни пространства от вектор-стълбове

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \; \left(= \mathcal{H}_{AB}\right) := \overbrace{\mathbb{C}^{NM}}$$

с операция:
- по Кронекер

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B & \longrightarrow & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v & \longmapsto & u \otimes v \end{array}$$

Конструиране (модел) на тенз. произведение

За $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N$, $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M$ } линейни пространства от вектор-стълбове

тази конструкция не зависи от избора на базиси

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \ (= \mathcal{H}_{AB}) := \overbrace{\mathbb{C}^{NM}}$$

с операция:
- по Кронекер

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B &\longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ u, v &\longmapsto u \otimes v \end{aligned}$$

Основен принцип:

Основен принцип:

Елементите от вида $u \otimes v \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

– разложими елементи (има и неразложими!)

Основен принцип:

Елементите от вида $u \otimes v \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

– разложими елементи (има и неразложими!)

Тогава, за да се определи (поли) линейно изображение

Основен принцип:

Елементите от вида $u \otimes v \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
– разложими елементи (има и неразложими!)

Тогава, за да се определи (поли) линейно изображение е достатъчно то да се определи коректно за разложими елементи:

$$\varphi(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \ldots)$$

Основен принцип:

Елементите от вида $u \otimes v \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

– разложими елементи (има и неразложими!)

Тогава, за да се определи (поли) линейно изображение е достатъчно то да се определи коректно за разложими елементи:

(поли) линейно

$$\varphi(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \dots)$$

Неразложимите вектори на състояния в $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ се наричат във физиката

сплетени състояния (entangled states)

Пример: $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{ A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A \}$

Пример: $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{ A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A \}$

$\mathcal{B} := Op\,\mathcal{H}_B \equiv \{ B : \mathcal{H}_B \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_B \}$

Пример: $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{ A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A \}$

$\mathcal{B} := Op\,\mathcal{H}_B \equiv \{ B : \mathcal{H}_B \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_B \}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ действа върху $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

Пример: $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A\}$

$$\mathcal{B} := Op\,\mathcal{H}_B \equiv \{B : \mathcal{H}_B \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_B\}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ действа върху $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

$$A \otimes B \quad , \quad u \otimes v \longmapsto (Au) \otimes (Bv)$$

<u>Пример:</u> $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{ A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A \}$

$$\mathcal{B} := Op\,\mathcal{H}_B \equiv \{ B : \mathcal{H}_B \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_B \}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ действа върху $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) & \times & (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) & \longrightarrow & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ A \otimes B & , & u \otimes v & \longmapsto & (Au) \otimes (Bv) \end{array}$$

Пример: $\mathcal{A} := Op\,\mathcal{H}_A \equiv \{ A : \mathcal{H}_A \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_A \}$

$$\mathcal{B} := Op\,\mathcal{H}_B \equiv \{ B : \mathcal{H}_B \xrightarrow{\text{лин.}} \mathcal{H}_B \}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ действа върху $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \longrightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} & & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B & & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ A \otimes B & , & u \otimes v & \longmapsto & (Au) \otimes (Bv) \end{array}$$

абстрактно определение на тензорно произведение на линейни оператори

Тензорното произведение на лин. оператори може да се представи в матричен вид чрез **кронекеровото произведение:**

$$\text{Нека} \quad t = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} t_{j,k}\, e_j \otimes f_k = \begin{pmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{1m} \\ \vdots \\ t_{n1} \\ \vdots \\ t_{nm} \end{pmatrix}$$

лексикографска наредба

Тогава имаме съгласуваност: $(A \otimes B)t =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} & \cdots & a_{nn}\boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{1m} \\ \vdots \\ t_{n1} \\ \vdots \\ t_{nm} \end{vmatrix}$$

Забележете, че ако работим с $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N$ и $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M$, то при модела с тензорно произведение на Кронекер тензорните произведения на векторите от стандартните базиси $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ са отново от стандартния базис на $\mathbb{C}^{NM}$, при това, в лексикографски ред.

Забележете, че ако работим с $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^N$ и $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^M$, то при модела с тензорно произведение на Крьонекер тензорните произведения на векторите от стандартните базиси $\left(\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ са отново от стандартния базис на $\mathbb{C}^{NM}$, при това, в лексикографски ред.

Това е всъщност и характеризация на модела на тензорно произведение на Кронекер.