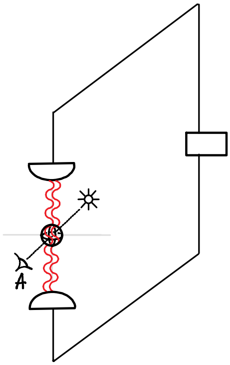
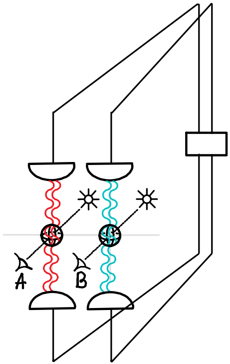
Составни системи

Съставни системи



$\mathcal{A}$

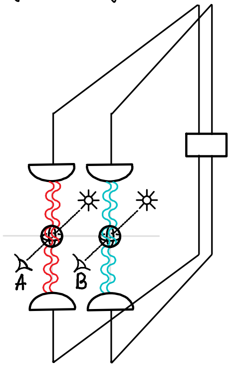
Съставни системи



$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$

Съставни системи

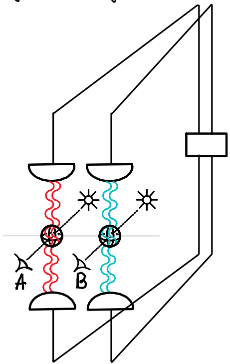
Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"

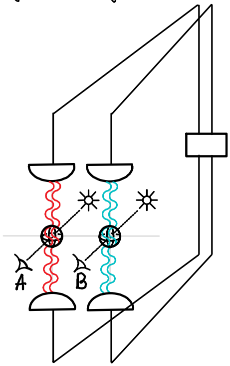


Нека C е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

$\mathcal{A} \qquad \mathcal{C} \qquad \mathcal{B}$

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



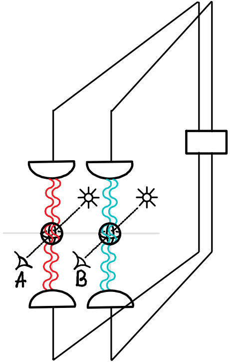
Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\mathcal{A} \quad \mathcal{C} \quad \mathcal{B}$

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека C е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

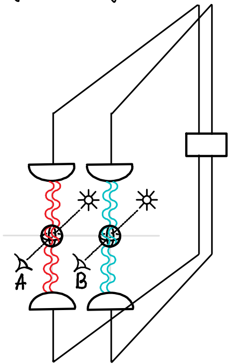
Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $*$-подалгебри с $\hat{1}$ на C

$$\mathcal{A} \overset{}{\underset{\iota_1}{\hookrightarrow}} C \underset{\iota_2}{\hookleftarrow} \mathcal{B}$$

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

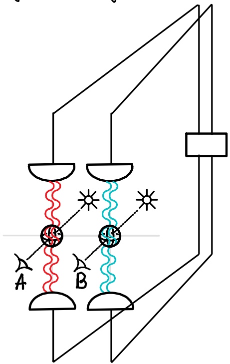
$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $*$-подалгебри с $\mathbb{1}$ на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow[\iota_1]{} \mathcal{C} \xhookleftarrow[\iota_2]{} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека $\mathcal{C}$ е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $*$-подалгебри с $\mathbb{1}$ на $\mathcal{C}$

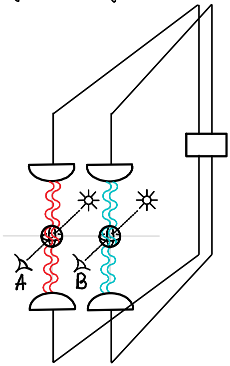
$$\mathcal{A} \xhookrightarrow[\iota_1]{} \mathcal{C} \xhookleftarrow[\iota_2]{} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall B \in \mathcal{B}$: $\iota_1(A)\,\iota_2(B) = \iota_2(B)\,\iota_1(A)$

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека C е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно,

да са $*$-подалгебри с $\mathbb{1}$ на C

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow[\iota_1]{} C \xhookleftarrow[\iota_2]{} \mathcal{B}$$

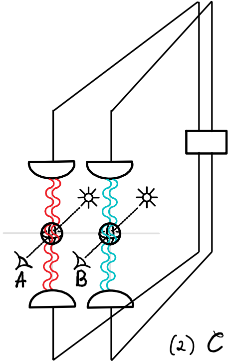
Освен това искаме:

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall B \in \mathcal{B}$: $\iota_1(A)\iota_2(B) = \iota_2(B)\iota_1(A)$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

Съставни системи

Ще ги въведем на примера на 2 квантови бита: кубит "1" и кубит "2"



Нека C е алгебрата на наблюдаемите на кубити "1 и 2"

Искаме отделните кубити да са подсистеми

$\Rightarrow$ техните алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, да са $*$-подалгебри с $\hat{1}$ на C

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow[\iota_1]{} C \xhookleftarrow[\iota_2]{} \mathcal{B}$$

Освен това искаме:

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall B \in \mathcal{B}$: $\iota_1(A)\iota_2(B) = \iota_2(B)\iota_1(A)$

(едновременна измеримост за отделните кубити)

(2) C да се поражда алгебрично от $\iota_1(A)$ и $\iota_2(B)$ за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall B \in \mathcal{B}$

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathbb{C}$ с точност до изоморфизъм:

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathbb{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по Крьонекер (Krönecker)

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по Крьонекер (Krönecker)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}$$

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по Крьонекер (Krönecker)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \phi_1\psi_2 \\ \phi_2\psi_1 \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Доказва се, че за това има единствен модел за $\mathcal{C}$ с точност до изоморфизъм:

Тензорни произведения по Крьонекер (Krönecker)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \phi_1\psi_2 \\ \phi_2\psi_1 \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

Основно свойство: $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

$$(A \otimes B)(\Phi \otimes \Psi) = (A\Phi) \otimes (B\Psi)$$

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $Mat_4(\mathbb{C}) = Mat_2(\mathbb{C}) \otimes Mat_2(\mathbb{C})$

Спрягане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $Mat_4(\mathbb{C}) = Mat_2(\mathbb{C}) \otimes Mat_2(\mathbb{C})$

Спрягане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ – няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $Mat_4(\mathbb{C}) = Mat_2(\mathbb{C}) \otimes Mat_2(\mathbb{C})$

Спрягане : $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ - няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

- наистина : $(\Phi \otimes \Psi)^* (\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \cancel{\otimes} (\Psi^* \Psi')$

Имаме $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $Mat_4(\mathbb{C}) = Mat_2(\mathbb{C}) \otimes Mat_2(\mathbb{C})$

Спрягане: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ – няма промяна в реда !!!

Скаларното произведение в $\mathbb{C}^4$: $\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle$

– наистина: $(\Phi \otimes \Psi)^* (\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') = (\Phi^* \Phi') \cancel{\otimes} (\Psi^* \Psi')$

Стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^4$:

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_0, \quad e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_1,$$

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_0, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_1,$$

Влаганията :

$$\mathcal{A} \underset{\iota_1}{\hookrightarrow} \mathcal{C} \underset{\iota_2}{\hookleftarrow} \mathcal{B}$$

Влаганията:

$$A \longmapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \overset{}{\underset{\iota_1}{\hookrightarrow}} \mathcal{C} \underset{\iota_2}{\hookleftarrow} \mathcal{B}$$

Съставни системи

Влаганията :

$$A \longmapsto A \otimes \hat{1}$$

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow[\iota_1]{} \mathcal{C} \xhookleftarrow[\iota_2]{} \mathcal{B}$$

$$\hat{1} \otimes B \longmapsfrom B$$

Съставни системи

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] & \overbrace{A \otimes \hat{1}} & \\
\mathcal{A} \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, hook', "\iota_2"] \\
 & \hat{1} \otimes B & B \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \longmapsto \overbrace{A \otimes \hat{1}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, hook', "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\hat{1} \otimes B} \longleftarrow B$$

$\iota_2(B) =: B_{(2)}$

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \longmapsto \underbrace{A \otimes \hat{1}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, hook', "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\hat{1} \otimes B} \longleftarrow B$$

$\iota_2(B) =: B_{(2)}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}\cdot 1 & a_{11}\cdot 0 & a_{12}\cdot 1 & a_{12}\cdot 0 \\ a_{11}\cdot 0 & a_{11}\cdot 1 & a_{12}\cdot 0 & a_{12}\cdot 1 \\ \hline a_{21}\cdot 1 & a_{21}\cdot 0 & a_{22}\cdot 1 & a_{22}\cdot 0 \\ a_{21}\cdot 0 & a_{21}\cdot 1 & a_{22}\cdot 0 & a_{22}\cdot 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Влаганията: $\overbrace{\iota_1(A) =: A_{(1)}}$

$$A \longmapsto \overbrace{A \otimes \hat{1}}$$

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow{\iota_1} \mathcal{C} \xhookleftarrow{\iota_2} \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\hat{1} \otimes B}_{\iota_2(B) =: B_{(2)}} \longleftarrow B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 & a_{11}\cdot 0 & a_{12}\cdot 1 & a_{12}\cdot 0 \\ a_{11}\cdot 0 & a_{11}\cdot 1 & a_{12}\cdot 0 & a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 & a_{21}\cdot 0 & a_{22}\cdot 1 & a_{22}\cdot 0 \\ a_{21}\cdot 0 & a_{21}\cdot 1 & a_{22}\cdot 0 & a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot b_{11} & 1\cdot b_{12} & 0\cdot b_{11} & 0\cdot b_{12} \\ 1\cdot b_{21} & 1\cdot b_{22} & 0\cdot b_{21} & 0\cdot b_{22} \\ 0\cdot b_{11} & 0\cdot b_{12} & 1\cdot b_{11} & 1\cdot b_{12} \\ 0\cdot b_{21} & 0\cdot b_{22} & 1\cdot b_{21} & 1\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Влаганията: $\quad \iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \longmapsto \overbrace{A \otimes \hat{1}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, hook', "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\hat{1} \otimes B} \longleftarrow B$$

$\iota_2(B) =: B_{(2)}$

$\Rightarrow \quad A \otimes B =$

$$= (A.1) \otimes (1.B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}.1 & a_{11}.0 & a_{12}.1 & a_{12}.0 \\ a_{11}.0 & a_{11}.1 & a_{12}.0 & a_{12}.1 \\ \hline a_{21}.1 & a_{21}.0 & a_{22}.1 & a_{22}.0 \\ a_{21}.0 & a_{21}.1 & a_{22}.0 & a_{22}.1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1.b_{11} & 1.b_{12} & 0.b_{11} & 0.b_{12} \\ 1.b_{21} & 1.b_{22} & 0.b_{21} & 0.b_{22} \\ \hline 0.b_{11} & 0.b_{12} & 1.b_{11} & 1.b_{12} \\ 0.b_{21} & 0.b_{22} & 1.b_{21} & 1.b_{22} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] & \overbrace{A \otimes \hat{1}} \\
\mathcal{A} \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, hook', "\iota_2"] \\
& \underbrace{\hat{1} \otimes B} & B \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$\iota_2(B) =: B_{(2)}$

$$\Rightarrow \quad A \otimes B =$$
$$= (A.1) \otimes (1.B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B)$$
$$= (1.A) \otimes (B.1) = (1 \otimes B)\ (A \otimes 1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}.1 & a_{11}.0 & a_{12}.1 & a_{12}.0 \\ a_{11}.0 & a_{11}.1 & a_{12}.0 & a_{12}.1 \\ \hline a_{21}.1 & a_{21}.0 & a_{22}.1 & a_{22}.0 \\ a_{21}.0 & a_{21}.1 & a_{22}.0 & a_{22}.1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1.b_{11} & 1.b_{12} & 0.b_{11} & 0.b_{12} \\ 1.b_{21} & 1.b_{22} & 0.b_{21} & 0.b_{22} \\ \hline 0.b_{11} & 0.b_{12} & 1.b_{11} & 1.b_{12} \\ 0.b_{21} & 0.b_{22} & 1.b_{21} & 1.b_{22} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Влаганията: $\iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \longmapsto \overbrace{A \otimes \hat{1}}$$

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow[\iota_1]{} \mathcal{C} \xhookleftarrow[\iota_2]{} \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\hat{1} \otimes B} \longleftarrow B$$

$\iota_2(B) =: B_{(2)}$

$\Rightarrow \quad A \otimes B =$

$$= (A.1) \otimes (1.B) = (A \otimes 1)(1 \otimes B)$$

$$= (1.A) \otimes (B.1) = (1 \otimes B)\,(A \otimes 1)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}.1 & a_{11}.0 & a_{12}.1 & a_{12}.0 \\ a_{11}.0 & a_{11}.1 & a_{12}.0 & a_{12}.1 \\ \hline a_{21}.1 & a_{21}.0 & a_{22}.1 & a_{22}.0 \\ a_{21}.0 & a_{21}.1 & a_{22}.0 & a_{22}.1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1.b_{11} & 1.b_{12} & 0.b_{11} & 0.b_{12} \\ 1.b_{21} & 1.b_{22} & 0.b_{21} & 0.b_{22} \\ \hline 0.b_{11} & 0.b_{12} & 1.b_{11} & 1.b_{12} \\ 0.b_{21} & 0.b_{22} & 1.b_{21} & 1.b_{22} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Влаганията: $\quad \iota_1(A) =: A_{(1)}$

$$A \longmapsto \underbrace{A \otimes \hat{1}}$$

$$\mathcal{A} \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} \mathcal{C} \overset{\iota_2}{\hookleftarrow} \mathcal{B}$$

$$\overbrace{\hat{1} \otimes B} \longleftarrow B$$

$$\iota_2(B) =: B_{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B}$$

Съставни системи

Влаганията:

$$\overbrace{A \otimes \hat{I}}^{\iota_1(A) =: A_{(1)}}$$

$$A \longmapsto A \otimes \hat{I}$$

$$\mathcal{A} \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} \mathcal{C} \overset{\iota_2}{\hookleftarrow} \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\hat{I} \otimes B}_{\iota_2(B) =: B_{(2)}} \longleftarrow B$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{(1)} B_{(2)} = B_{(2)} A_{(1)} \equiv A \otimes B}$$

т.е., както и поискахме: абсолютно всяка наблюдаема на системата "1", $A_{(1)}$, е съвместно измерима с всяка наблюдаема на системата "2", $B_{(2)}$.

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система.

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на битове "1 и 2" е $Mat_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in Mat_4(\mathbb{C})$, за което $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\, C)$.

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на битове "1 и 2" е $Mat_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in Mat_4(\mathbb{C})$, за което $Tr\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = Tr(\hat{\rho}\, C)$.

Използваме формулата $Tr(A \otimes B) = Tr(A)\,Tr(B)$

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на двата "1 и 2" е $Mat_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in Mat_4(\mathbb{C})$, за което $Tr\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = Tr(\hat{\rho}\, C)$.

Използваме формулата $Tr(A \otimes B) = Tr(A)\,Tr(B)$ - наистина:

$$Tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \equiv Tr \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} b_{11}} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & \boxed{a_{11} b_{22}} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & \boxed{a_{22} b_{11}} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & \boxed{a_{22} b_{22}} \end{pmatrix}$$

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на битове "1 и 2" е $Mat_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in Mat_4(\mathbb{C})$, за което $Tr\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = Tr(\hat{\rho}\, C)$.

Използваме формулата $Tr(A \otimes B) = Tr(A)\,Tr(B)$ - наистина:

$$Tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \equiv Tr \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на битове "1 и 2" е $Mat_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in Mat_4(\mathbb{C})$, за която $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$ - наистина:

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \equiv \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

$$= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

До тук изяснихме наблюдаемите в съставна система. Състоянията?

Понеже алгебрата на наблюдаемите на битове "1 и 2" е $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$, то общо състояние се определя от матрица на плътността $\hat{\rho} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$, за която $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$ и $\hat{\rho} \geq 0$ по формулата $\rho(C) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho} C)$.

Използваме формулата $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$ - наистина:

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \equiv \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

$$= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Следователно, всеки две отделни състояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на подсистемите води до състояние $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ на съставната система, така че за всеки две наблюдаеми A и B на подсистемите

$$\boxed{\langle A \otimes B \rangle_\rho \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_\rho = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2} \text{ - независимост}}$$

Следователно, всеки две отделни състояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на подсистемите води до състояние $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ на съставната система, така че за всеки две наблюдаеми A и B на подсистемите

$$\boxed{\langle A \otimes B \rangle_\rho \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_\rho = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2} \text{ - независимост}}$$

- наистина

$$Tr\left((\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(A \otimes B) \right) = Tr\left((\hat{\rho}_1 A) \otimes (\hat{\rho}_2 B) \right) = Tr(\hat{\rho}_1 A)\, Tr(\hat{\rho}_2 B)$$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^*$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*)$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = (\Psi\Psi^*) \otimes (\Phi\Phi^*)$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi\otimes\Phi)(\Psi\otimes\Phi)^* = (\Psi\otimes\Phi)(\Psi^*\otimes\Phi^*) = (\underbrace{\Psi\Psi^*}_{\hat{\rho}_1})\otimes(\underbrace{\Phi\Phi^*}_{\hat{\rho}_2})$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = \underbrace{(\Psi\Psi^*)}_{\hat{\rho}_1} \otimes \underbrace{(\Phi\Phi^*)}_{\hat{\rho}_2}$

$= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi \otimes \Phi)^* = (\Psi \otimes \Phi)(\Psi^* \otimes \Phi^*) = \underbrace{(\Psi\Psi^*)}_{\hat{\rho}_1} \otimes \underbrace{(\Phi\Phi^*)}_{\hat{\rho}_2}$

$= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$

Това се наричат **несплетени чисти състояния.**

Чисти състояния: $\hat{\rho} = \Theta\Theta^*$, за $\Theta \in \mathbb{C}^4$ - единичен.

Специален случай: $\Theta = \Psi \otimes \Phi$ за $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^2$ - единични

Тогава $\hat{\rho} = \Theta\Theta^* = (\Psi\otimes\Phi)(\Psi\otimes\Phi)^* = (\Psi\otimes\Phi)(\Psi^*\otimes\Phi^*) = \underbrace{(\Psi\Psi^*)}_{\hat{\rho}_1}\otimes\underbrace{(\Phi\Phi^*)}_{\hat{\rho}_2}$
$= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$

Това се наричат несплетени чисти състояния.

Чисти състояния в $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$, чийто вектори на състояние Θ не могат да се представят, като $\Theta = \Phi\otimes\Psi$ се наричат сплетени / entangled

Специално за 2 бита има прост критерий за сплетеност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \iff \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Специално за 2 бита има прост критерий за сплетеност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \iff \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Пример:

$$e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– определя сплетено чисто състояние.

Специално за 2 бита има прост критерий за сплетеност:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix} \iff \theta_1 \theta_4 \neq \theta_2 \theta_3$$

Пример: $\sqrt{2}\,\Theta := e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

за нормировка

– определя сплетено чисто състояние.