

Квантова логика - логика на квантовите събития

$\mathcal{E}vents :=$ множество на квантовите събития

- това е частично наредено множество (ч.н.м.) / *partially ordered set (poset)*, което по определение е множество с бинарна релация " \preceq ", която изпълнява свойствата:

(рефлексивност) $P \preceq P$;

(антисиметрия) $P \preceq Q$ и $Q \preceq P \Rightarrow P = Q$;

(транзитивност) $P \preceq Q$ и $Q \preceq R \Rightarrow P \preceq R$;

за всеки $P, Q, R \in \mathcal{E}vents$ $Q \succeq P \stackrel{опр.}{\iff} P \preceq Q$

Квантово-логически операции

\wedge - квантова конюнкция ("и") : $P \wedge Q$

\vee - квантова дизюнкция ("или") : $P \vee Q$

\perp - квантово отрицание ("не") : P^\perp

Изискваме \wedge и \vee да се пораждат от \preceq като точни долни и горни граници ($P, Q, R \in \mathcal{E}vents$):

$$P \wedge Q = R \stackrel{опр.}{\iff} \begin{cases} R \preceq P \text{ и } R \preceq Q, \text{ и} \\ T \preceq P \text{ и } T \preceq Q \Rightarrow T \preceq R (\forall T \in \mathcal{E}vents). \end{cases}$$

$$P \vee Q = R \stackrel{опр.}{\iff} \begin{cases} R \succeq P \text{ и } R \succeq Q, \text{ и} \\ T \succeq P \text{ и } T \succeq Q \Rightarrow T \succeq R (\forall T \in \mathcal{E}vents). \end{cases}$$

От антисиметрията на \preceq следва, че елементите $P \wedge Q$ и $P \vee Q$ са еднозначно определени, т.е., \wedge и \vee са бинарни операции - такива ч.н.м. се наричат решетки / lattices

Решетките могат да се зададат и алгебрично - с аксиоми

(L1) - асоциативност

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$$

(L2) - комутативност

$$P \wedge Q = Q \wedge P, \quad P \vee Q = Q \vee P,$$

(L3) - закон за поглъщането

$$P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P,$$

(L4) - идемпотентност

$$P \wedge P = P, \quad P \vee P = P$$

($P, Q, R \in \text{Events}$).

Тогави " \preceq " се изразява:

$$P \preceq Q \iff_{\text{опр.}} P \wedge Q = P \iff_{\text{св.}} P \vee Q = Q$$

(Твърденията до тук - без доказателства.)

И така Events е решетка - аксиома.

В Events пропускаме важен закон:

(D) - дистрибутивност

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Решетки, в които се изпълнява (D) се наричат дистрибутивни

В общия случай: Events не е дистрибутивна решетка

Аксиома за 0 и 1 - в $\mathcal{E}vents$ има най-малък ($0 \in \mathcal{E}vents$) и най-голям елемент ($1 \in \mathcal{E}vents$):

$$\begin{array}{l} (0) \quad 0 \preceq P \quad (\forall P) \\ (1) \quad 1 \succeq P \quad (\forall P) \end{array} \quad \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{св.}} \\ \xleftrightarrow{\text{св.}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \wedge P = 0 \\ 1 \wedge P = P \end{array} \quad \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{св.}} \\ \xleftrightarrow{\text{св.}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \vee P = P \\ 1 \vee P = 1 \end{array}$$

Решетки с 0 и 1 се наричат още и ограничени решетки.

Квантово отрицание - аксиома: $\mathcal{E}vents$ е орторешетка

По определение:

(OL1) идемпотентност на отрицанието
 $(P^\perp)^\perp = P$

(OL2) "взаимна допълнителност" и "изключеното трето"
 $P \wedge P^\perp = 0, P \vee P^\perp = 1$

(OL3) "закони на Де Морган"
 $(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$

Следствие $P \preceq Q \iff Q^\perp \preceq P^\perp$

Последни аксиоми на квантовата логика

(OML) - ортомодуларност

$$P \preceq Q \implies P \vee (Q \wedge P^\perp) = Q$$

$:= Q \setminus P$ - относително допълнение

И още две...

Схематично до тук:

Квантова съждителна (propositional) логика - това е:

класическа съждителна логика

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P, P \vee Q = Q \vee P,$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P,$$

$$P \wedge P = P, P \vee P = P,$$

$$0 \wedge P = 0, 0 \vee P = P, 1 \wedge P = P, 1 \vee P = 1$$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$

$$P \wedge P^\perp = 0, P \vee P^\perp = 1$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp, (P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp,$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

без

дистрибутивност

Също, компактен математически изказ на аксиомите до тук е:

Events е ортомодуларна решетка

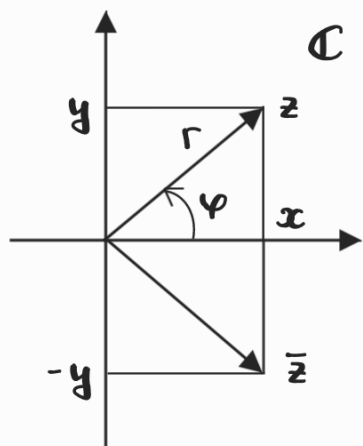
За допълнителна мотивация и илюстрация на недистрибутивността в квантовата теория - виж приложението след тези тази лекция.

Основен модел на квантовата логика

Преговор по алгебра:

Комплексни числа: $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$x =: \operatorname{Re} z, \quad y =: \operatorname{Im} z$$



Напр.: $1.2 + 3.4i$, $4 - 5i = 4 + (-5)i$

Операции: $i^2 = -1$

$$(1.2 + 3.4i) + (4 - 5i) = 5.2 - 1.6i$$

$$\left(\begin{array}{c} - \\ / \\ - \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} - \\ / \\ - \end{array} \right)$$

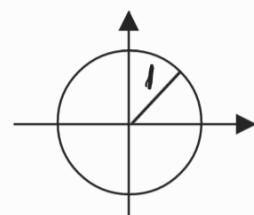
$$= 1.2 \cdot 4 - 3.4(-5) + (1.2(-5) + 3.4 \cdot 4) \cdot i = 21.8 + 7.6i$$

Спрягане: $\overline{(x + yi)} := x - iy$. Свойство: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ за вс. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Модул: $|z| := \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (за $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ - ф-ла на Ойлер / Euler

↑ общ вид на компл. число по модул = 1 за $\varphi \in \mathbb{R}$



$z = r e^{i\varphi}$, $r = |z| \geq 0$ - модул, $\varphi \in \mathbb{R}$ - аргумент, фаза

$$\varphi = \operatorname{arctg} (\operatorname{Re} z / \operatorname{Im} z)$$

Хилбертово пространство \mathcal{H} - това комплексно линейно пр. снабдено с "ермитово скалярно произведение"

$$\langle \Psi | \Phi \rangle \in \mathbb{C} \text{ за всеки } \Psi, \Phi \in \mathcal{H}$$

свс свойствата (а) $\langle \Psi | \Phi \rangle = \overline{\langle \Phi | \Psi \rangle}$;

$$\begin{aligned} (\delta) \quad \langle a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 | b_1 \Phi_1 + b_2 \Phi_2 \rangle &= \bar{a}_1 b_1 \langle \Psi_1 | \Phi_1 \rangle + \bar{a}_1 b_2 \langle \Psi_1 | \Phi_2 \rangle \\ &+ \bar{a}_2 b_1 \langle \Psi_2 | \Phi_1 \rangle + \bar{a}_2 b_2 \langle \Psi_2 | \Phi_2 \rangle ; \end{aligned}$$

$$(\epsilon) \quad \langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle \Psi | \Psi \rangle = 0 \iff \Psi = 0 \quad ;$$

(2) пълнота (... - излишно в крайно-мерния случай).

Ортонормиран базис : $\{e_j\} \subseteq \mathcal{H}$ - базис , т.е :

(о.н.б.)

$$\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk} := \begin{cases} 1 \text{ при } j = k \\ 0 \text{ при } j \neq k \end{cases}$$

Основен пример :

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle := \bar{a}_1 b_1 + \dots + \bar{a}_n b_n$$

$$e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \quad - \text{о.н.б.}$$

Твърдение Ако $\dim \mathcal{H} = n$, $\{e_j\} \subseteq \mathcal{H}$ - о.н.б. и

$$\text{и } \Psi = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \quad \Phi = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

$$\text{то } \langle \Psi | \Phi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ортогоналност и ортогонални разбивания

$$\Psi \perp \Phi \stackrel{\text{опр.}}{\iff} \langle \Psi | \Phi \rangle = 0 \quad (\text{за } \Psi, \Phi \in \mathcal{H} \text{ - хилб. пр.})$$

Ако $S \subseteq \mathcal{H}$, то $S^\perp := \{ \Psi \in \mathcal{H} \mid \Psi \perp \Phi \text{ за всяко } \Phi \in S \}$

- S^\perp е винаги линейно подпространство на \mathcal{H}

Теорема 1. Нека $V \stackrel{\text{лин.}}{\subseteq} \mathcal{H}$ - хилб. пр.

тогава $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$ - пряка сума

Подробно: $\mathcal{H} = V + V^\perp$ и $V \cap V^\perp = \{0\} =: 0$ - нулевото пр.

и за всяко $\Psi \in \mathcal{H}$: $\Psi = \Phi + \Theta$ за единствени $\Phi \in V$, $\Theta \in V^\perp$

Следствие Съответствието $P := P_V : \Psi \mapsto \Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ е

линеен оператор със свойствата (1) $P^2 = P$

(2) $\langle \Psi_1 | P\Psi_2 \rangle = \langle P\Psi_1 | \Psi_2 \rangle$ за всеки $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$

(3) $V = \{ \Phi \in \mathcal{H} \mid P\Phi = \Phi \}$

- без доказателство.

Линейният оператор P_V се нарича ортогонален проектор върху V .

Теорема 2. *Events* := всички линейни подпространства на \mathcal{H} - хилбертово (крайно-мерно), задава модел на квантовата логика спрямо " \subseteq " и \perp - орт. доп.

- без доказателство.

Следствие: В горния модел

$$\triangleright V \wedge W = V \cap W$$

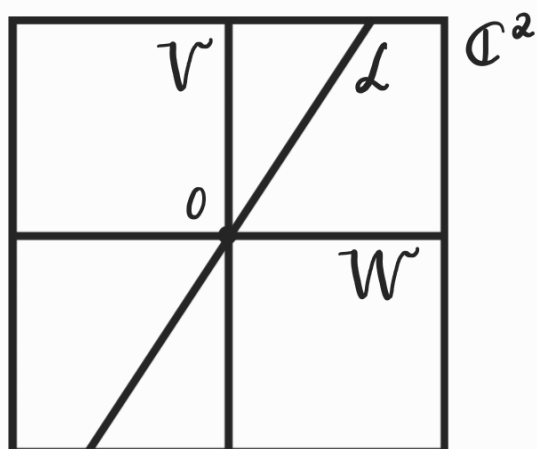
- сечението на лин. подпр. е пак лин. подпр. и затова, то е най-голямото, което $\subseteq V$ и $\subseteq W$

$$\triangleright V \vee W = V + W$$

- $V \cup W$ е най-малкото **подмножество** на \mathcal{H} , което $\supseteq V, W$; но то не е лин. подпр. в общия случай и най-малкото лин. подпр., което $\supseteq V \cup W$ е $\text{Span}(V \cup W) = V + W$

$$\triangleright 0 = \text{нулевото подпр.}$$

$$\triangleright 1 = \mathcal{H}$$

Нарушение на дистрибутивността

$$1 = \mathcal{H} = \mathcal{L} \wedge (\overbrace{V \vee W}^{\mathcal{H}}) \\ \neq \underbrace{(\mathcal{L} \wedge V)}_0 \vee \underbrace{(\mathcal{L} \wedge W)}_0 = 0$$

Ермитово спрягане на матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \mapsto A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1m} & \dots & \bar{a}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \bar{A}^T = \overline{A^T}$$

$$\Rightarrow A^{**} = A, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad A^{-1*} = A^{*-1}$$

$$\text{В } \mathbb{C}^n : \langle \Psi | \Phi \rangle = \Psi^* \Phi \equiv \langle \Psi | \cdot | \Phi \rangle$$

Общо ермитово спрягане

Ако $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ са лин. оператори в хилб. пр. и

$$\langle \Psi | A\Phi \rangle = \langle B\Psi | \Phi \rangle,$$

то се доказва, че B е еднозначно определен от A и пишем

$$B =: A^*$$

Ако $\dim \mathcal{H} < \infty$, то винаги $\exists A^*$

Линейните оператори в $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ са еквивалентни на умножение с матрици и там двете определения за ермитово спрягане съвпадат:

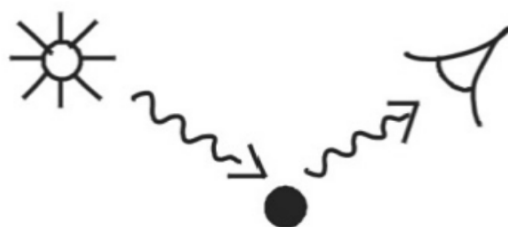
$$\begin{aligned} \langle A^*\Psi | \Phi \rangle &= (A^*\Psi)^* \Phi = \Psi^* A^{**} \Phi = \Psi^* (A\Phi) \\ &= \langle \Psi | A\Phi \rangle \end{aligned}$$

Следствие Алгебрична характеристика на квантовите събития
в нашия основен модел, определен от $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$

P е квантово събитие $\Leftrightarrow P$ е комплексна $n \times n$ -матрица
т.е: $P^* = P = P^2$

$\Leftrightarrow P$ е (матрица на) ортогонален
проектор върху линейно подпр.
на \mathbb{C}^n

Физическото обяснение на квантовите феномени е, че всяко наблюдение и измерване в природата е активен процес. Това означава, че при всяко наблюдение ние сме принудени да смущаваме изследваната система. Например, за да видим обект, първо трябва да го осветим със светлина и след това да наблюдаваме отразената светлина.



фиг. 6: Наблюдението представено схематично: то винаги е придружено от смущение (въздействие) върху наблюдавания обект.

В класическата физика, където наблюдаваме макро-системи, смущенията, внесени от нашите наблюдения, също са неизбежни. Там

обаче се счита, че смущенията винаги могат да бъдат намалени под нашия праг на чувствителност и следователно могат да бъдат пренебрегнати. Оказва се обаче, че в квантовата физика, т.е., в микро-света, нашите въздействия винаги имат *неотстраним долен (минимален) праг*. Има конкретна физична величина, която се въвежда в механиката и която отговаря за “въздействието”: тя се нарича “*действие*”. Минимална порция на действието, наричана още *квант на действието*, е една от фундаменталните физични константи. Това е така наречената *константа на Планк* и тя има изключително малка стойност ($< 10^{-33}$) в сравнение със стандартната единица за действие в макро света. Това е причината, поради която във физиката на макро-света смущенията внасяни при нашите

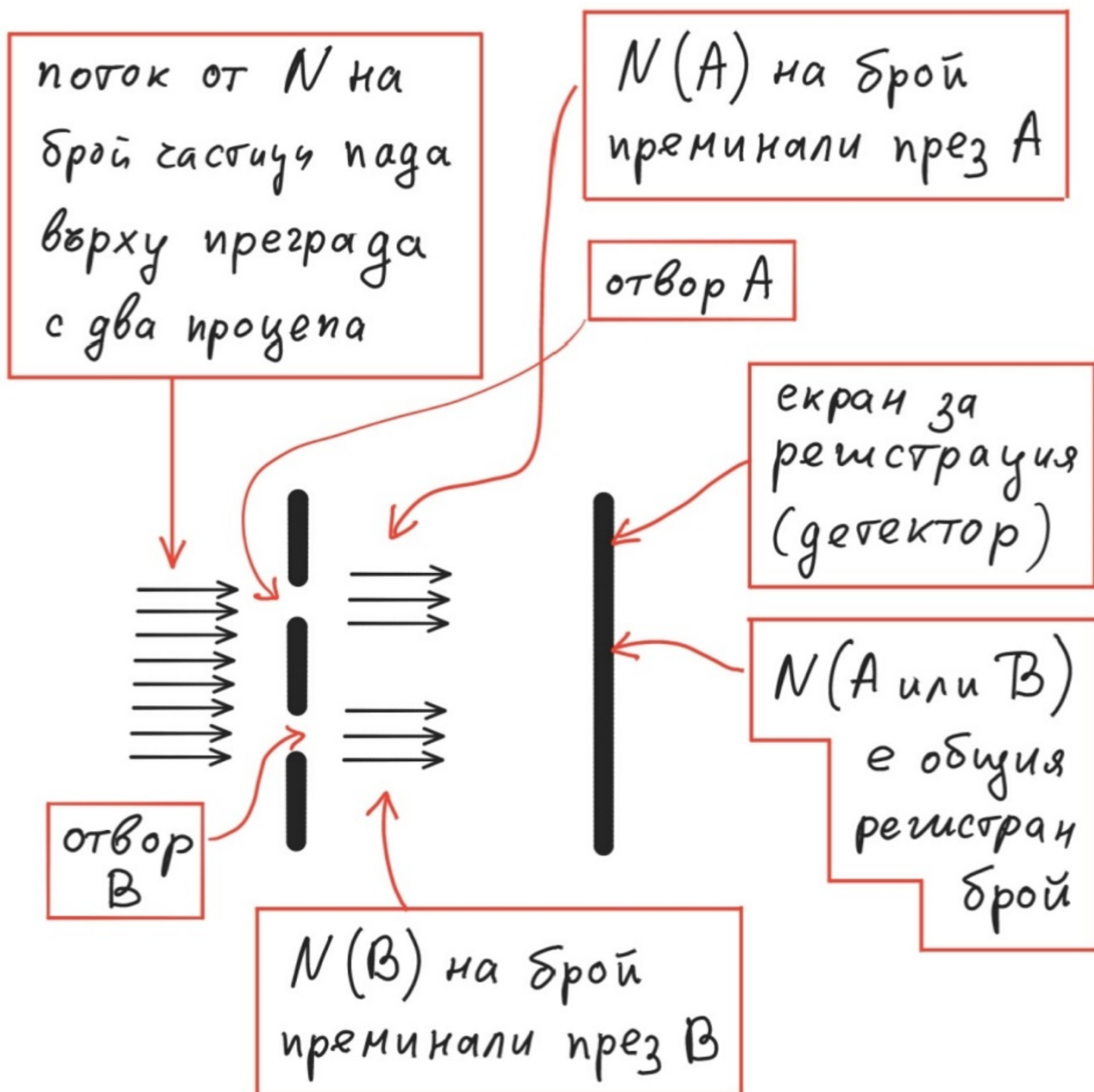
наблюдения винаги могат да бъдат пренебрегнати. Така откриването на кванта на действието е довело до квантовата механика и физика и на нея се дължи името “квантова”.

Квантов феномен : интерференция на вероятността.

Той се основава на един реален опит, наречен *експеримент с двоен процеп*,⁷ който ще представим тук в опростена схема. В опита, поток от частици се пропуска през преграда с два процепи и преминалите частици се регистрират върху екран с фото-плака поставен след преградата с процепите. Опитът се провежда в няколко варианта.

– Случай (1): в този случай се изследва общото количество на преминалите частици. На фиг. 8 по-долу е представена схемата.

Извадка от записките от 2021/22 (уводна лекция: "QI_bk_BG_rdr_I01-v0130.pdf") - извън курса



фиг. 8: Опит с общо преброяване на преминалите частици

Общият брой $N(A \text{ или } B)$ регистрирани частици по целия екран е сума на броевете $N(A)$ и $N(B)$ на частиците преминали през отвор A и отвор B , съответно:

$$N(A \text{ или } B) = N(A) + N(B) < N$$

всяка преминала частица се регистрира

но не всяка частица преминава

За да се определят експериментално числата $N(A)$, $N(B)$ и $N(A \text{ или } B)$, поотделно се изследват следните три случая, съответно

(1_A) отворен е само процеп A , при което определяме $N(A)$;

(1_B) отворен е само процеп B , при което определяме $N(B)$;

$(1_{A \text{ или } B})$ отворени са A и B , т.е. всяка частица преминава през A или B и следователно, така определяме $N(A \text{ или } B)$.

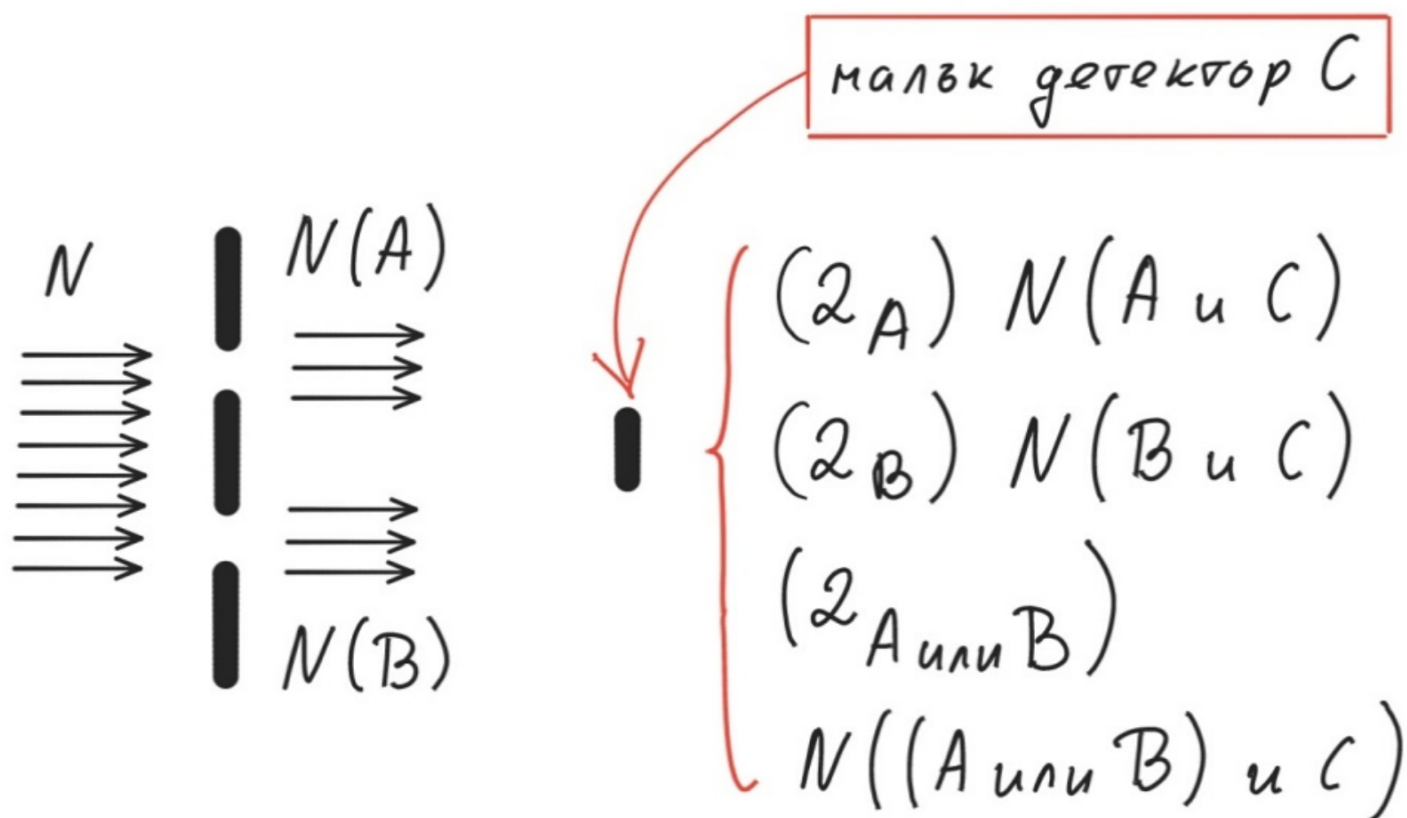
За да са сравними получените числа $N(A)$, $N(B)$ и $N(A \text{ или } B)$, в трите подслучая по-горе е необходимо да осигурим еднакъв начален брой N на частиците падащи върху процесите (или равносилно, еднакви начални потоци на частиците). Изводът от този случай е, че ако поставим достатъчно широк екран (детектор), ние улавяме всички частици, които преминават през двата отвора. Така, тук няма никаква разлика с между класическата и квантовата теория.

– Случай (2): зад процепите е поставен малък екран (детектор) C и тогава ние регистрираме само малка част от преминалите частици – тези, които попадат в C . Отново проследяваме \mathcal{Z} под случая:

(2_A) отворен е само процеп A . Тогава в C се регистрират $N(A \text{ и } C)$ на брой частици.

(2_B) отворен е само процеп B . Тогава в C се регистрират $N(B \text{ и } C)$ на брой частици.

($2_{A \text{ или } B}$) отворени са A и B . Тогава в C се регистрират $N((A \text{ или } B) \text{ и } C)$ на брой частици.

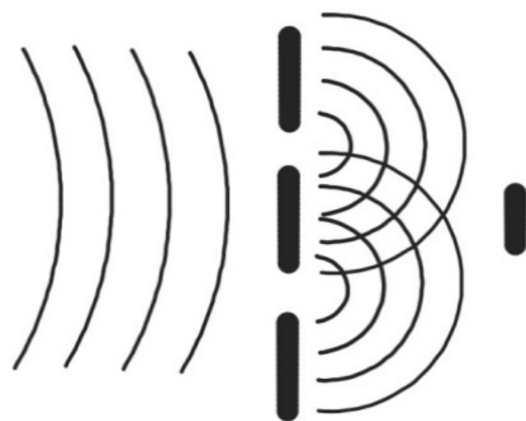


фиг. 9: Опит с локално преброяване на преминалите частици

Резултатът сега е, че:

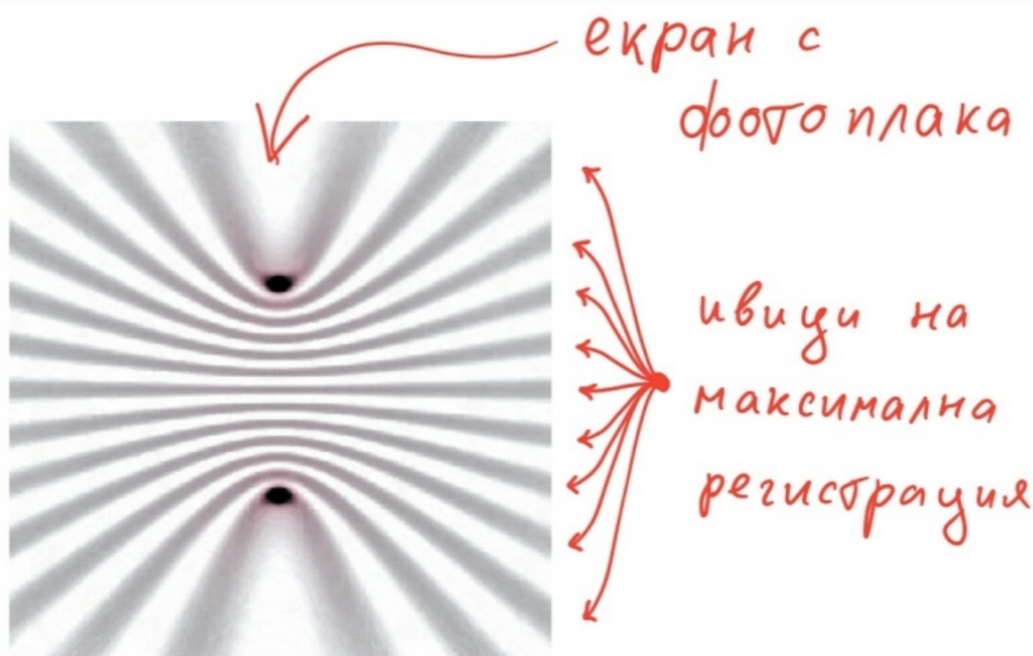
$$N(A \text{ и } C) + N(B \text{ и } C) \neq N((A \text{ или } B) \text{ и } C).$$

Първи опит за интерпретация: имаме работа не с частици, а с вълни, и наблюдаваме явлениято *интерференция*.



фиг. 10: Общата картина на локалното разпределение на преминалите частици изглежда, като картина на интерференция на вълни. Нека припомним, че при интерференцията освен усилващото събиране на вълните имаме също и взаимно погасяване в определени точки.

И наистина, при по-детайлен вариант на случай (2), при който се поставя голяма фотоплака (т.е. множество малки детектори), се наблюдава типична интерференчна картина, когато и двата процепа са отворени. Сякаш тогава частиците преминават и през двата процепа едновременно, подобно на вълните и в определени точки става “погасяване” на въздействието им върху екрана.



фиг. 11: Наблюдаваната интерференционна картина върху екрана (фото-плаката)

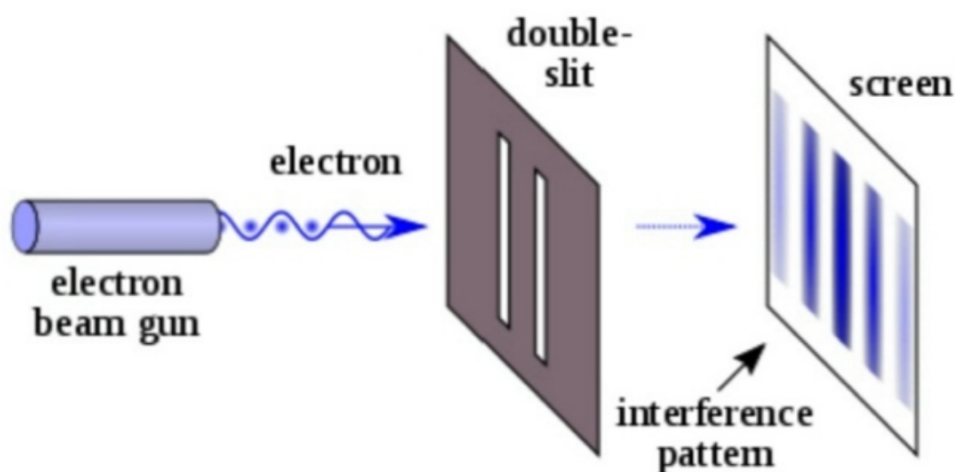
Предложеното обяснение обаче противоречи на следния трети вариант на опита:

– Случай (3): в този случай, посредством малки детектори, които се поставят непосредствено зад процепите ние се убеждаваме, че частиците винаги преминават само през единия процеп. За целта ние пускаме слаб поток от частици, при което те практически се излъчват една по една. В резултат, двата детектора никога не регистрират заедно частица.



фиг. 12: Опит с индивидуална регистрация пред всеки процепа: той показва, че всяка частица преминава през точно един от процепите.

Нещо повече, оказва се, че ако повторим по този начин и случай (2), т.е., пускаме частиците една по една, то те ще оставят последователно точкови следи върху фото-плаката, които след достатъчно дълго натрупване ще оформят интерференчна картина. Следователно, оказва се, че вълни са не частиците, а вероятността за тяхната регистрация!



фиг. 13: Опитната постановка в реалистичен вид

И така, констатирахме че (виж. фиг. 14):
за една частица

да премине през A и

да попадне в C

или да премине през B и

да попадне в C

не е същото, като

да премине без проследяване през

A или B и да попадне в C .

Извадка от записките от 2021/22 (уводна лекция: "QI_bk_BG_rdr_I01-v0130.pdf") - извън курса



фиг. 14: Нарушение на дистрибутивността

С това констатираме нарушение на дистрибутивността при квантовите събития:

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup C,$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap C.$$

спрямо логическите операции произтичащи от логическата им подредба (мажорирането).

Недистрибутивността също е пряко свързана със съвместната неизмеримост на две събития. В крайна сметка, логическата структура на събитията, които се наблюдават (измерват) в общ експеримент, трябва да бъде класическа и в частност, дистрибутивна. Следователно, отклонението от дистрибутивността при някои събития означава и невъзможност за съвместно им наблюдение. По-нататък ние специално ще въведем и изучим релацията на съвместност между събитията, а след това, при въвеждането на т.нар. *проекционен постулат*⁹ окончателно ще свържем това по-