Бра-кет означения на Дирак / Dirac

$\langle \mathrm{bra}\,c\,|\,\mathrm{ket} \rangle$

В $\mathbb{C}^n$: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} =: |\psi\rangle$ - вектор-стълб := "кет-вектор"

Тогава: $(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) =: \langle \psi |$ - вектор-ред := "бра-вектор", съответстващ на кет $|\psi\rangle$

Така $\langle \psi | \phi \rangle \equiv \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{\psi}_1 \phi_1 + \dots + \bar{\psi}_n \phi_n$

$$= \langle \psi || \phi \rangle \equiv (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

Забележете: $\langle \psi | = \psi^*$ - ермитово спрягане

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \mapsto A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1m} & \dots & \bar{a}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \bar{A}^T = \overline{A^T}$$

$$\Rightarrow \quad A^{**} = A$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$A^{-1*} = A^{*-1}$$

В $\mathbb{C}^n$: $\langle \psi | \phi \rangle = \psi^* \phi \equiv \langle \psi | \cdot | \phi \rangle$

И така, $\langle\Psi|\Phi\rangle$ е число, но
$|\Phi\rangle\langle\Psi|$ е квадратна матрица - $n \times n$ (!)

$$|\Phi\rangle\langle\Psi| = \Phi\Psi^* = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\phi_1\overline{\psi_1} & \cdots & \phi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \phi_n\overline{\psi_1} & \cdots & \phi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$$

Свойства: 1) $\big(|\Phi\rangle\langle\Psi|\big)^* = |\Psi\rangle\langle\Phi|$ - наистина:
$$(\Phi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Phi^*$$

2) $|\Phi\rangle\langle\Psi| = |\Theta\rangle\langle\Xi|$ за $\Phi,\Psi,\Theta,\Xi \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\Phi = \alpha\Theta$, $\Psi = \beta\Xi$ за $\alpha,\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

- наистина: $|\Phi\rangle\langle\Psi| = |\Theta\rangle\langle\Xi| \Leftrightarrow \phi_j\overline{\psi_k} = \theta_j\overline{\xi_k}\ (\forall j,k)$.
$\Leftrightarrow \phi_j : \theta_j = \overline{\xi_k} : \overline{\psi_k}$ - не зависи от j,k.

3) $\big(|\Phi\rangle\langle\Psi|\big)^* = |\Phi\rangle\langle\Psi|$ - самоспрегната / ермитова, self-adjoint / Hermitian } без док.
$\Updownarrow$
$\Phi =$ реално число $\cdot\ \Psi$

4) $\big(|\Phi\rangle\langle\Psi|\big)\big(|\Theta\rangle\langle\Xi|\big) = \langle\Psi|\Theta\rangle\, |\Phi\rangle\langle\Xi|$ - наистина:
$$|\Phi\rangle\langle\Psi||\Theta\rangle\langle\Xi| = |\Phi\rangle\underbrace{\langle\Psi|\Theta\rangle}_{\text{число}}\langle\Xi|$$

5) $|\Phi\rangle\langle\Psi|$ е ортогонален проектор $\Leftrightarrow \begin{cases} |\Phi\rangle\langle\Psi| = 0 \\ \text{или } |\Phi\rangle\langle\Psi| = |\Theta\rangle\langle\Theta| \\ \quad \text{за } \|\Theta\| = 1 \end{cases}$

- наистина: ако $P := |\Phi\rangle\langle\Psi|$, то $P = P^* \overset{3)}{\Leftrightarrow} \Phi = \alpha\cdot\Psi$ за $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава $P = P^2 \overset{4)}{\Leftrightarrow} \alpha|\Psi\rangle\langle\Psi| = \alpha^2\|\Psi\|^2|\Psi\rangle\langle\Psi|$.
Така, ако $|\Phi\rangle\langle\Psi| \neq 0$, то имаме $\Leftrightarrow \alpha = \|\Psi\|^2 \Rightarrow \Theta = \Psi / \|\Psi\|$

6) $|\Theta\rangle\langle\Theta|$ за $\|\Theta\| = 1$ е ортогонален проектор върху $\mathcal{V} = \mathbb{C}\cdot\Theta$ (едномерно, т.е., елементарно събитие). При това,

$$|\Theta\rangle\langle\Theta| = |\Psi\rangle\langle\Psi| \iff \Theta = e^{i\varphi}\Psi$$

- наистина: ако $P := |\Theta\rangle\langle\Theta|$, то $\Psi\in\mathcal{V} \iff P\Psi = \Psi$. Но
$\Psi = P\Psi = |\Theta\rangle\langle\Theta||\Psi\rangle = \langle\Theta|\Psi\rangle|\Theta\rangle =$ число $\cdot\,\Theta$.

7) P е елементарно събитие $\iff P = |\Theta\rangle\langle\Theta|$ за $\|\Theta\| = 1$
- без док.

Итака, имаме 1-1 съответствие: $|\Theta\rangle\langle\Theta| \leftrightarrow \{e^{i\varphi}\Theta\}$

елементарни събития $\leftrightarrow$ единични лъчи в хилб. пр.

8) Ако $f_1,\dots,f_n \in \mathbb{C}^n$ - о.н.б., то

$$1 = |f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + |f_n\rangle\langle f_n|$$

- наистина: от развитието по о.н.б.

$$\begin{aligned}\Psi &= \langle f_1|\Psi\rangle f_1 + \cdots + \langle f_n|\Psi\rangle f_n \\ &= \langle f_1|\Psi\rangle|f_1\rangle + \cdots + \langle f_n|\Psi\rangle|f_n\rangle \\ &= |f_1\rangle\langle f_1||\Psi\rangle + \cdots + |f_n\rangle\langle f_n||\Psi\rangle \\ &= \big(|f_1\rangle\langle f_1| + \cdots + |f_n\rangle\langle f_n|\big)|\Psi\rangle\end{aligned}$$

Например, за стандартния базис на $\mathbb{C}^n$ това дава:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(1,0,\dots,0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(0,1,\dots,0) + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(0,0,\dots,1)$$

9) Ако $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ - о.н.б. и $P_j := |f_j\rangle\langle f_j|$

то $P_j P_k = \delta_{jk} P_k$ - следва от 4

10) Ако $V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$ и $f_1, \dots, f_k \in V$ - о.н.б., то

$|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_k\rangle\langle f_k|$ е ортогоналния проектор върху V

- без док. (обобщава 8).

11) Ако $V, W \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$ и P, Q - съответните ортогонални проектори,

то $V \subseteq W$ (т.е., $P \preccurlyeq Q$) $\Longleftrightarrow$ $QP = P$ $\Longleftrightarrow$ $PQ = P$

- без док.

12) $P^{\perp} = 1 - P$ - наистина: ако P е ортогонален проектор върху $V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$ и изберем $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ - о.н.б., така че $f_1, \dots, f_k$ е базис на V, то

$$1 = \underbrace{|f_1\rangle\langle f_1| + \dots + |f_k\rangle\langle f_k|}_{\substack{\text{ортогоналния проектор} \\ \text{върху } V}} + \underbrace{|f_{k+1}\rangle\langle f_{k+1}| + \dots + |f_n\rangle\langle f_n|}_{\substack{\text{ортогоналния проектор} \\ \text{върху } V^{\perp}}}$$

<u>Теорема 1</u> Нека P, Q - ортогонални проектори (събития). Тогава:

а) $P \, \mathbf{C} \, Q$ (P комутира с Q - в "решетъчен смисъл")

$\Longleftrightarrow$ $PQ = QP$

б) Ако $P \, \mathbf{C} \, Q$, то $P \wedge Q = PQ \; (= QP)$

$P \vee Q = P + Q - PQ$

- без док.

Следствие 2. Ако $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ - о.н.б. , то
$1 = |f_1\rangle\langle f_1| \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} |f_n\rangle\langle f_n|$ е максимално дизюнктивно разбиване
Така, максимален експеримент е равносилен на избор на о.н.б. (ортонормиран базис) в хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$ на дадената чисто квантова система

Оттук идва израза "измерване в базис".

Доказателство. От Свойство 7: $P_j := |f_j\rangle\langle f_j|$ са елементарни събития. От Свойство 9: $P_j P_k = 0 = P_k P_j$ при $j \neq k$. От Теорема 1 P_j комутират две по две и $P_j \wedge P_k = 0$ при $j \neq k$ и
$1 = |f_1\rangle\langle f_1| \vee \cdots \vee |f_n\rangle\langle f_n|$. $\square$