# Квантова съждителна (propositional) логика

Тази презентация е посветена на кратък преглед на квантовата логика: основни аксиоми, понятия и структурни твърдения.

# Квантова съждителна (propositional) логика

Терминът "квантова логика" е въведен от Биркхоф и Фон Нойман през 1936 в статия, която може да се разглежда като завършек на базисния период от аксиоматизацията на квантовата теория.

(1911 – 1996)

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

By Garrett Birkhoff and John von Neumann

(Received April 4, 1936)

Annals of Mathematics
Vol. 37, No. 4, October, 1936

(1903 – 1957)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/BVN1936.pdf

# Квантова съждителна (propositional) логика

Ние ще разгледаме тук по-късна и завършена версия на аксиомите на квантовата логика.

Квантовата логика представлява логическата структура на множеството на всички събития $\mathscr{E}vents$.

От гледна точка на математическата логика, става дума за т.нар. "съждителна логика", която касае единствено аксиомите за работа с логическите операции на

– конюнкция ("и"): $\wedge$;
– дизюнкция ("или"): $\vee$;
– отрицание ("не"): $\perp$.

# Квантова съждителна (propositional) логика

## класическа съждителна логика

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R, \quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$
$$P\wedge Q = Q\wedge P, \quad P\vee Q = Q\vee P,$$
$$P\vee(P\wedge Q) = P, \quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$
$$P\wedge P = P, \quad P\vee P = P \quad ,$$
$$0\wedge P = 0, \quad 0\vee P = P \quad , \quad 1\wedge P = P, 1\vee P = 1$$
$$(P^\perp)^\perp = P \quad ,$$
$$P\wedge P^\perp = 0, \quad P\vee P^\perp = 1$$
$$(P\wedge Q)^\perp = P^\perp\vee Q^\perp, \quad (P\vee Q)^\perp = P^\perp\wedge Q^\perp,$$
$$P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$$
$$P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

Квантовата съждителна логика е отслабена версия на класическата съждителна логика, чийто аксиоми са преведени най-напред.

Тук, $P, Q, R$ са събития, т.е., елементи на $\mathscr{Events}$.

# Квантова съждителна (propositional) логика

класическа съждителна логика

$$P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R$$
$$P\wedge Q=Q\wedge P,\quad P\vee Q=Q\vee P,$$
$$P\vee(P\wedge Q)=P,\quad P\wedge(P\vee Q)=P,$$
$$P\wedge P=P,\quad P\vee P=P,$$
$$0\wedge P=0,\quad 0\vee P=P,\quad 1\wedge P=P,\quad 1\vee P=1$$
$$(P^{\perp})^{\perp}=P,$$
$$P\wedge P^{\perp}=0,\quad P\vee P^{\perp}=1$$
$$(P\wedge Q)^{\perp}=P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp}=P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$
$$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$$
$$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

булева алгебра

Тези аксиоми превръщат множеството $\mathscr{Events}$ в **булева алгебра**.

# Квантова съждителна (propositional) логика

Специална роля в квантова логика играят аксиомите за *дистрибутивност* на класическата логика.

класическа съждителна логика

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P,$$

$$0\wedge P = 0,\quad 0\vee P = P,\quad 1\wedge P = P,\quad 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0,\quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$\boxed{\begin{aligned} P\wedge(Q\vee R) &= (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)\\ P\vee(Q\wedge R) &= (P\vee Q)\wedge(P\vee R)\end{aligned}}$$

дистрибутивност

булева алгебра

# Квантова съждителна (propositional) логика - това е :

класическа съждителна логика

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$
$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$
$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$
$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P\ ,$$
$$0\wedge P = 0,\quad 0\vee P = P\ ,\quad 1\wedge P = P,\ 1\vee P = 1$$
$$(P^{\perp})^{\perp} = P\ ,$$
$$P\wedge P^{\perp} = 0,\quad P\vee P^{\perp} = 1$$
$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\ (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$$
$$P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

без дистрибутивност

Булева алгебра

Изпускайки дистрибутивните закони от системата аксиоми получаваме и началната версия на аксиомите на квантовата логика.

Получаваме вид "некласическа" логика чийто модели в общия случай престават да са булеви алгебри.

Тези структури се наричат **орторешетки**.

Квантова съждителна (propositional) логика – това е :

~~класическа съждителна логика~~

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R, \quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P, \quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P, \quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P, \quad P\vee P = P,$$

$$0\wedge P = 0, \quad 0\vee P = P, \quad 1\wedge P = P, \quad 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0, \quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp}, \quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$\cancel{P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)}$$

$$\cancel{P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)}$$

~~дистрибутивност~~

~~Булева алгебра~~

## Квантова съждителна (propositional) логика - това е :

~~класическа съждителна логика~~

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P\quad ,$$

$$0\wedge P = 0,\quad 0\vee P = P\quad ,\quad 1\wedge P = P,\; 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P\quad ,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0,\quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$P\preccurlyeq Q \implies P\vee(Q\wedge P^{\perp}) = Q \qquad \text{ортомодуларност}$$

$$\cancel{P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)} \qquad \cancel{\text{дистрибутивност}}$$

~~Булева алгебра~~

Все пак на мястото на дистрибутивността оставяме една отслабена версия, наречена **ортомодуларност**.

Непосредствено се съобразява, че ортомодуларността следва от втория закон за дистрибутивност (който все още стои изписан): *наистина*, от това, че $P$ се мажорира от $Q$ следва, че $P \vee Q = Q$ и също имаме и, че $P \vee P^{\perp} = 1$ и накрая, $Q \vee 1 = Q$.

Комбинацията $Q \wedge P^{\perp}$ се нарича относително допълнение на $P$ в $Q$.

# Квантова съждителна (propositional) логика - това е :

~~класическа съждителна логика~~

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R, \quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P, \quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P, \quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P, \quad P\vee P = P,$$

$$0\wedge P = 0, \quad 0\vee P = P, \quad 1\wedge P = P, \quad 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0, \quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp}, \quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$\boxed{P \preccurlyeq Q \implies P\vee\underbrace{(Q\wedge P^{\perp})}_{:= Q\setminus P} = Q}$$

ортомодуларност

$:= Q\setminus P$ - относително допълнение

~~булева алгебра~~

Аксиомите до тук превръщат $\mathcal{E}vents$ в **ортомодуларна решетка**.

# Квантова съждителна (propositional) логика

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R, \quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P, \quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P, \quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P, \quad P\vee P = P \quad ,$$

$$0\wedge P = 0, \quad 0\vee P = P, \quad 1\wedge P = P, \quad 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0, \quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp}, \quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$P \preccurlyeq Q \Rightarrow P\vee(Q\wedge P^{\perp}) = Q \quad \text{(ортомодуларност)}$$

ортомодуларна решетка

Остават три заключителни аксиоми на квантовата логика:

– аксиомата за атомарност;
– закона за покриването;
– аксиомата за крайност.

# Квантова съждителна (propositional) логика

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P,$$

$$0\wedge P = 0,\quad 0\vee P = P,\quad 1\wedge P = P,\quad 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0,\quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$P \preccurlyeq Q \implies P\vee(Q\wedge P^{\perp}) = Q \quad \text{(ортомодуларност)}$$

- атомарност
- закон за покриването
- крайност

ортомодуларна решетка

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- атомарност
- закон за покриването
- крайност

Сега ще приведем последователно и техните формулировки.

# Квантова съждителна (propositional) логика

Заключителни аксиоми

- атомарност
- закон за покриването
- крайност

В тях се използва понятието: **покриване** в частично наредено множество (ч.н.м.).

Казваме, че събитието $Q$ покрива $P$, ако $P$ и $Q$ са различни, $Q$ мажорира $P$ и между тях няма друго събитие.

Определения: в ч.н.м. (Events)

- $P \prec\!\!\cdot\, Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q \text{ и от } P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{cases}$

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- атомарност
- закон за покриването
- крайност

Непосредствено следващо от тук понятие е за **елементарно събитие**: това е събитие $P$, което покрива нулевото събитие. То-ест, елементарните събития са *минималните* ненулеви събития.

В контекста на теория на частично наредените множества (с нула), такива елементи $P$ се наричат **атоми** в частично наредено множество.

Определения: в ч.н.м. ($\mathcal{E}vents$)

- $P \lessdot Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q \text{ и от } P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{cases}$
- $P$ е елементарно събитие (атом) $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \lessdot P$

И така, първата от заключителните аксиоми – тази за атомарност – гласи, че под всяко събитие има поне едно елементарно събитие.

Ще отбележим като допълнение извън този курс, че има безкрайни квантови системи, които не изпълняват това условие за атомарност: в тях процесът на свиване до нулата е ``непрекъснат'' (в известен смисъл).

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- Атомарност:

  за всяко събитие $P$ съществува елементарно събитие $Q \preccurlyeq P$
- Закон за покриването
- Крайност

Определения: в ч.н.м. (Events)

- $P \precdot Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q \text{ и от } P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{cases}$
- $P$ е елементарно събитие (атом) $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \precdot P$

Законът за покриването гласи, че ако елементарното събитие $P$ има нулево сечение с $Q$, то $P \vee Q$ покрива $Q$. Така, ние може да надграждаме всяко събитие посредством квантова конюнкция с непресичащо го елементарно събитие.

Обръщаме внимание, че тук "непресичането", т.е., "нулево сечение" е съществено по-слабо условие от "взаимното изключване", наричано още "дизюнктивност", което ще въведем по-късно тук.

Тази аксиома, както и предходната може да се наруши в безкрайни квантови системи.

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- Атомарност:
  за всяко събитие $P$ съществува елементарно събитие $Q \precnsim P$
- Закон за покриването
  ако $0 \lessdot P$ и $P \wedge Q = 0$, то $Q \lessdot P \vee Q$
- Крайност

## Определения: в ч.н.м. (Events)

- $P \lessdot Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\iff}}$ $\begin{cases} P \underset{\neq}{\precsim} Q \text{ и от } P \precsim R \precsim Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{cases}$
- $P$ е елементарно събитие (атом) $\underset{\text{опр.}}{\iff}$ $0 \lessdot P$

Законът за покриването се изпълнява в основния модел на квантовата логика: орто-решетката на всички линейни подпространства на едно крайно-мерно хилбертово пространство.

*Наистина*: там елементарните събития са едномерните линейни подпространства, а нулевото сечение на две линейни подпространства означава тяхната трасверзалност; затова, при квантовата конюнкция, в случай на трасверзалност, се явява пряка сума (възможно не ортогонална) и при нея размерността скача с единица, което е индикатор за покриване.

По-долу отново ще се върнем на този основен модел на квантовата логика.

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- **Атомарност:**
  за всяко събитие $P$ съществува елементарно събитие $Q \precdot P$
- **Закон за покриването**
  ако $0 \precdot P$ и $P \wedge Q = 0$, то $Q \precdot P \vee Q$
- **Крайност**

## Определения: в ч.н.м. (Events)

- $P \precdot Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} P \underset{\neq}{\prec} Q \text{ и от } P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{cases}$
- $P$ е елементарно събитие (атом) $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \precdot P$

Аксиомата за крайност гласи, че между нулата и единицата в $\mathscr{Events}$ има крайна верига от покриващи се събития.

Тази аксиома очевидно се нарушава за безкрайни системи: то това е и определението за безкрайна система.

Информационните системи по необходимост са крайни, но са *потенциално безкрайни*: могат неограничени да се надграждат. В този курс ще ни се наложи да направим този граничен преход и така да нарушим тази аксиома, но все пак разглеждането ще остава "по същество" на крайно ниво.

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- **Атомарност:**
  за всяко събитие $P$ съществува елементарно събитие $Q \preccurlyeq P$
- **Закон за покриването**
  ако $0 \lessdot P$ и $P \wedge Q = 0$, то $Q \lessdot P \vee Q$
- **Крайност**
  съществува крайна редица $0 \lessdot P_1 \lessdot P_2 \lessdot \quad \lessdot P_{n-1} \lessdot 1$

## Определения: в ч.н.м. ($\mathscr{Events}$)

- $P \lessdot Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ $\left\{ \begin{array}{l} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q \text{ и от } P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{array} \right.$
- $P$ е елементарно събитие (атом) $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \lessdot P$

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- **Атомарност:**
  за всяко събитие $P$ съществува елементарно събитие $Q \preccurlyeq P$
- **Закон за покриването**
  ако $0 \lessdot P$ и $P \wedge Q = 0$, то $Q \lessdot P \vee Q$
- **Крайност**
  съществува крайна редица $0 \lessdot P_1 \lessdot P_2 \lessdot \ldots \lessdot \underbrace{P_{n-1}}_{n\text{ - ниво/ранг}} \lessdot 1$

Дължината $n+1$ на тази верига се оказва, като следствие от аксиомите до тук, че не зависи от веригата. Числото $n$ се нарича **ниво** на системата.

## Определения: в ч.н.м. (Events)

- $P \lessdot Q$ (чете се: "$P$ покрива $Q$") $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q \text{ и от } P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q \\ \text{следва } P = R \text{ или } R = Q \end{cases}$
- $P$ е елементарно събитие (атом) $\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \lessdot P$

Ето примери за най-ниските нива:

– Ниво $0$: това е “невъзможната система” – аналог на празното множество. Тук нулата съвпада с единицата.
– Ниво $1$: в $\mathscr{Events}$ има само нула и единица. Има само една такава система (с точност до изоморфизъм) – това е “синглетона”.
– Ниво $2$: система “бит”. В този курс ще имаме примерите на класически и квантов бит, наричан още кубит ($q$–бит).

# Квантова съждителна (propositional) логика

## Заключителни аксиоми

- **Атомарност:**
  за всяко събитие $P$ съществува елементарно събитие $Q \precsim P$
- **Закон за покриването**
  ако $0 \precdot P$ и $P \wedge Q = 0$, то $Q \precdot P \vee Q$
- **Крайност**
  съществува крайна редица $0 \precdot P_1 \precdot P_2 \precdot \ldots \precdot P_{n-1} \precdot 1$
  └ ниво/ранг

Ниво $0$ : $0 = 1$ – “невъзможното”

Ниво $1$ : $0 \precdot 1$ – синглетон / singleton

Ниво $2$ : $0 \precdot P \precdot 1$ – бит

Това са аксиомите на квантовата логика: логиката на квантовите събития.

# Квантова съждителна (propositional) логика

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P,$$

$$0\wedge P = 0,\quad 0\vee P = P,\quad 1\wedge P = P,\quad 1\vee P = 1$$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\wedge P^{\perp} = 0,\quad P\vee P^{\perp} = 1$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

$$P \preccurlyeq Q \implies P\vee(Q\wedge P^{\perp}) = Q \quad \text{(ортомодуларност)}$$

- атомарност
- закон за покриването
- крайност

ортомодуларна решетка

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

Тук аксиомите на квантовата логика са изписани съвсем накратко.

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

Горните аксиоми, макар и да не са формулирани точно в този пълен вид от Биркхоф и фон Нойман, но все пак тяхната работа остава основополагаща.

(1911 – 1996)

**THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS**

By Garrett Birkhoff and John von Neumann

(Received April 4, 1936)

Annals of Mathematics
Vol. 37, No. 4, October, 1936

(1903 – 1957)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/BVN1936.pdf

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

В тези монографии се съдържат горните аксиоми, заедно с произтичащите от тях следствия, главните от които ще приведем сега.

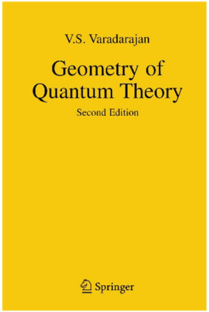
THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

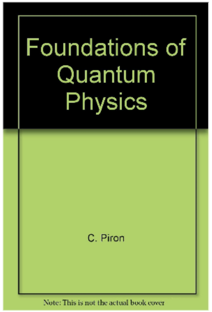
BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/BVN1936.pdf




http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Varadarajan.pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Piron.pdf

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

Преминаваме към основните следствия на тези аксиоми.

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Структурна теория

Това е структурната теория на квантовата логика.

Първата структурна теорема разкрива "**полупростотата**" на квантовите системи: те се разбиват в пряка сума на прости системи.

В точен математически смисъл това се отнася до орторешетката на събитията $\mathscr{E}vents$. Ние няма да даваме пълната теория на преките произведения на решетки, а само ще опишем накратко основната им структура.

## Квантова съждителна (propositional) логика

- $\mathscr{E}vents$ е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Структурна теория

**Теорема** В следствие на горните аксиоми $\mathscr{E}vents$ се представя в пряко произведение на прости

$$\mathscr{E}vents \cong \mathscr{E}vents_1 \times \cdots \times \mathscr{E}vents_k$$ на прости

# Квантова съждителна (propositional) логика

- $\mathcal{E}vents$ е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Структурна теория

Частичната наредба в пряко произведение на частично наредени множества е покомпонентна – това е определение.

<u>Теорема</u> В следствие на горните аксиоми $\mathcal{E}vents$ се представя в пряко произведение на прости

$$\mathcal{E}vents \cong \mathcal{E}vents_1 \times \cdots \times \mathcal{E}vents_k$$ на прости

Допълнителен коментар: в пряко произведение

$$(P_1, \dots, P_k) \preccurlyeq (Q_1, \dots, Q_k) \overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}} P_1 \preccurlyeq Q_1, \dots, P_k \preccurlyeq Q_k$$

Оттук следва, че покомпонентни са и операциите на конюнкция и,

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Структурна теория

Теорема В следствие на горните аксиоми Events се представя в пряко произведение на прости

$$Events \cong Events_1 \times \cdots \times Events_k$$ на прости

Допълнителен коментар: в пряко произведение

$$(P_1, \dots, P_k) \wedge (Q_1, \dots, Q_k) = (P_1 \wedge Q_1, \dots, P_k \wedge Q_k)$$

на дизюнкция – в случаите когато имаме произведение на решетки.

# Квантова съждителна (propositional) логика

- $\mathcal{E}vents$ е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Структурна теория

**Теорема** В следствие на горните аксиоми $\mathcal{E}vents$ се представя в пряко произведение на прости

$$\mathcal{E}vents \cong \mathcal{E}vents_1 \times \cdots \times \mathcal{E}vents_k$$ на прости

Допълнителен коментар: в пряко произведение

$$(P_1, \ldots, P_k) \vee (Q_1, \ldots, Q_k) = (P_1 \vee Q_1, \ldots, P_k \vee Q_k)$$

В случая на преки произведение на орторешетки, следното полагане води до структура на орторешетка в прякото произведение. В дясната страна конюнкцията е по всевъзможните разполагания на отрицанието в редицата $P_1, \ldots, P_k$, започвайки с поне едно.

# Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Структурна теория

<u>Теорема</u> В следствие на горните аксиоми Events се представя в пряко произведение на прости

$$\mathcal{E}vents \cong \mathcal{E}vents_1 \times \cdots \times \mathcal{E}vents_k$$ на прости

Допълнителен коментар: в пряко произведение

$$(P_1, \ldots, P_k)^\perp = (P_1^\perp, \ldots, P_k) \vee \cdots \vee (P_1, \ldots, P_k^\perp) \vee \cdots \vee (P_1^\perp, \ldots, P_k^\perp)$$

Простотата означава, по определение, че такова разбиване в нетривиално пряко произведение за $k > 1$ е невъзможно.

Системите с прости орто-решетки на събитията ще наричаме **неприводими**.

## Квантова съждителна (propositional) логика

- Events е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

**Структурна теория**

Теорема. В следствие на горните аксиоми Events се представя в пряко произведение на прости

$$\mathrm{Events} \cong \mathrm{Events}_1 \times \cdots \times \mathrm{Events}_k$$ на прости

Допълнителен коментар: простота = неразложимост ($k = 1$)

Неприводими системи $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ Events е проста

# Неприводими системи от ниво $\geqslant 2 \overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ чисто квантови

От ниво $1$ имаме само една система – това е синглетона – неприводима система. Освен това $\mathscr{Events}$ е булева алгебра в този случай.

При ниво $\geqslant 2$ неприводимите системи са задължително небулеви. Ще ги наречем: "**чисто квантови**".

Неприводими системи от ниво $\geq 2$ $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ чисто квантови

Пример: (от миналата лекция)

$\mathcal{E}vents = \{ V \mid V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$ - крайно-мерно хилбертово простр. $\}$

$=: \mathcal{L}_n$

Ето основния пример за чисто квантова система: множеството от събития е частично нареденото множество на всички линейни подпространства в хилбертово пространство $\mathbb{C}^n$.

Неприводими системи от ниво $\geq 2$ $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ чисто квантови

Пример: (от миналата лекция)

$$\text{Events} = \{ V \mid V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n \text{ - крайно-мерно хилбертово простр.} \}$$

$$=: \mathcal{L}_n$$

- ниво $N$: $\hat{0} = \{0\} \subseteq \mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n = \hat{1}$

Нивото на системата е $n$: всяка верига от линейни подпространства, чиято размерност нараства с единица е нужната верига според аксиомата за крайност.

Елементарните събития са едномерните линейни подпространства.

Неприводими системи от ниво $\geq 2 \overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ чисто квантови

Пример: (от миналата лекция)

$$\mathcal{E}vents = \{ V \mid V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n \text{- крайно-мерно хилбертово простр.} \}$$

$$=: \mathcal{L}_n$$

- ниво $N$: $\hat{0} = \{0\} \subseteq \mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n = \hat{1}$

- елементарните събития: $V$ - едномерно

Виждаме: системата е "крайна", но елементарните събития са безкрайно много!

# Неприводими системи от ниво $\geq 2$ $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ чисто квантови

Пример: (от миналата лекция)

$$\mathcal{E}vents = \{ V \mid V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n \text{ - крайно-мерно хилбертово простр.} \}$$

$$=: \mathcal{L}_n$$

- ниво $N$: $\hat{0} = \{0\} \subseteq \mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n = \hat{1}$

- елементарните събития: $V$ - едномерно

- Така: системата е "крайна", но има безкрайно много елем. събития

Приведеният пример ще основния пример в нашия курс и можеше направо да положим за "аксиома".

И все пак, от концептуална и дори, философска гледна точка е интересно да отбележим, че това е "почти общия случай на чисто квантови системи".

Неприводими системи от ниво $\geq 2$ $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ чисто квантови

Пример: (от миналата лекция)

$$\mathcal{E}vents = \{ V \mid V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n \text{ - крайно-мерно хилбертово простр.} \}$$

$$=: \mathcal{L}_n$$

- ниво $N$: $\hat{0} = \{0\} \subseteq \mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n = \hat{1}$

- елементарните събития: $V$ - едномерно

- Така: системата е "крайна", но има безкрайно много елем. събития

Това е "почти" общия случай

## Геометрия на квантовата логика

В пояснение на последното изявление ще скицираме накратко конструкцията, която показва как приведените по-горе аксиоми водят до геометричната интерпретация на квантовата логика.

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Изхождаме от определенията по-горе за покриване

## Геометрия на квантовата логика

Определения ■ $P \lessdot Q \overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва,

"$Q$ покрива $P$" че $P = R$ или $R = Q$.

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

## Геометрия на квантовата логика

Определения ▪ $P \lessdot Q$ $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ $\underset{\neq}{P \precneqq Q}$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва,

"Q покрива P" че $P = R$ или $R = Q$.

▪ $P$ е елементарно събитие $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \lessdot P$

и за елементарност.

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

И сега следва геометричната интерпретация:

Обявяваме елементарните събития за “точки”.

## Геометрия на квантовата логика

Определения

- $P \lessdot Q \underset{\text{опр.}}{\iff} P \underset{\neq}{\preceq} Q$ и от $P \preceq R \preceq Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$.

  “$Q$ покрива $P$”

- $P$ е елементарно събитие $\underset{\text{опр.}}{\iff} 0 \lessdot P$

- Обявяваме елементарните събития $P$ за “точки на геометрия”

## Геометрия на квантовата логика

Определения ▪ $P \lessdot Q \underset{\text{опр.}}{\iff} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва,

"Q покрива P" че $P = R$ или $R = Q$.

▪ $P$ е елементарно събитие $\underset{\text{опр.}}{\iff} 0 \lessdot P$

▪ Обявяваме елементарните събития $P$ за "точки на геометрия", а събитията $L$, които покриват елементарни събития обявяваме за "прави на геометрия"

Обявяваме събитията от ниво 2 (т.е., тези които покриват елементарни събития) за "прави".

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Релацията на инцидентност – “лежи на” – се задава от релацията на мажориране. Оттук произтичат и понятия като “прави се пресичат в точка”.

## Геометрия на квантовата логика

Определения

- $P \lessdot Q$ $\underset{\text{опр.}}{\iff}$ $P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$.

  “Q покрива P”

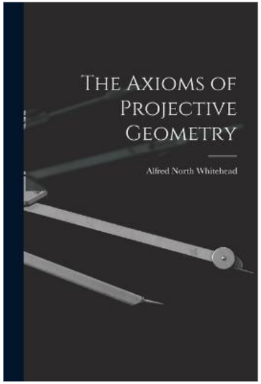
- $P$ е елементарно събитие $\underset{\text{опр.}}{\iff}$ $0 \lessdot P$

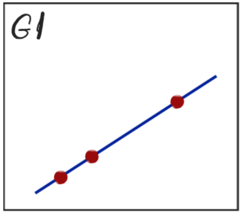
- Обявяваме елементарните събития $P$ за “точки на геометрия”, а събитията $L$, които покриват елементарни събития обявяваме за “прави на геометрия” и казваме, че: “$P$ лежи на $L$” $\underset{\text{опр.}}{\iff}$ $P \preccurlyeq L$.

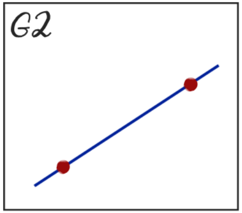
# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

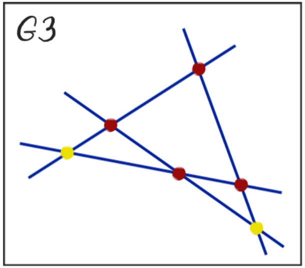
В следствие на приведените по-горе аксиоми на квантовата логика се доказва, че при горни определения се изпълняват т.нар. “аксиоми на Уайтхед на проективната геометрия” (Wikipedia).

Тогава, при определени допълнителни аксиоматични предположения за орторешетката на събитията следва, че полученото геометрично пространство ще изпълнява т.нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) на проективната геометрия



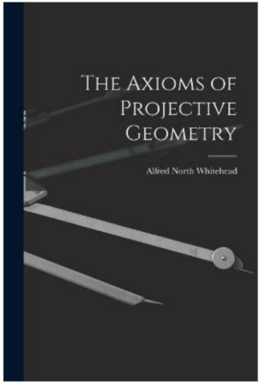



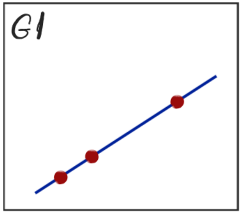



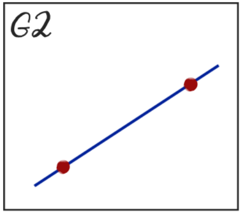



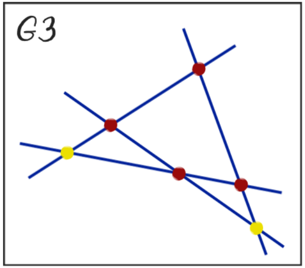
# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Тогава, при определени допълнителни аксиоматични предположения за орторешетката на събитията следва, че полученото геометрично пространство ще изпълнява т.нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) на проективната геометрия




Аксиома G1:

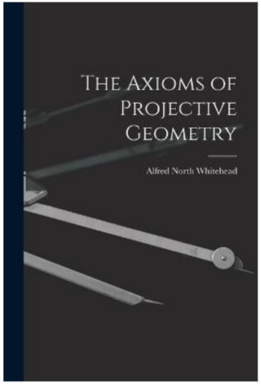
Всяка линия има поне три точки.

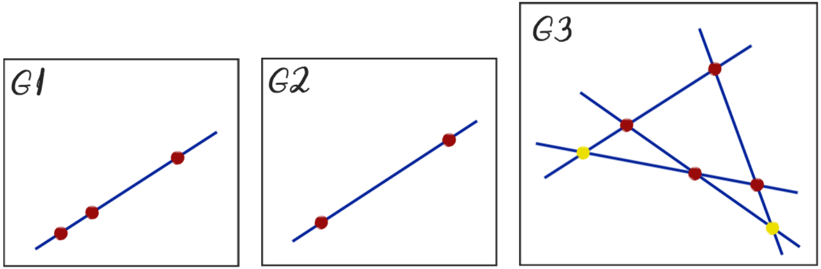
Аксиома G2:

Все две различни точки $a$ и $b$ лежат на единствена права – означаваме я с $ab$.

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Тогава, при определени допълнителни аксиоматични предположения за орторешетката на събитията следва, че полученото геометрично пространство ще изпълнява т.нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) на проективната геометрия



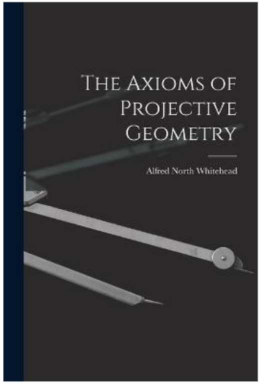
# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

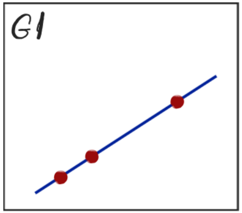
Тогава, при определени допълнителни аксиоматични предположения за орторешетката на събитията следва, че полученото геометрично пространство ще изпълнява т. нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) на проективната геометрия

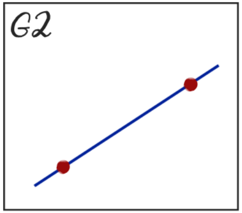
Аксиома G3:

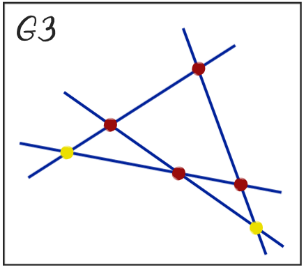
Ако правите $ab$ и $cd$ се пресичат, то се пресичат и правите $ac$ и $bd$ (предполагайки, че $a$ и $d$ са отлични от $b$ и $c$).

Тази аксиома въвежда понятието "компланарност" за четири точки.



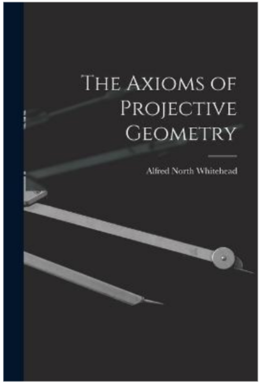
# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

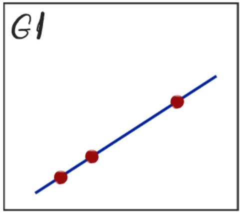
В следствие на тези аксиоми, нивото $n$ на решетката от събития се оказва равно на размерността на полученото проективно пространство минус едно. Така, това проективно пространство на свой ред идва от $n$ мерно "линейно пространство".

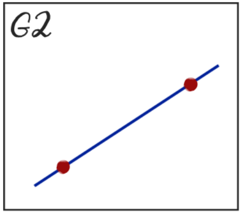
Тук сме сложили "линейно" в кавички, понеже освен над комплексните числа $\mathbb{C}$ ние може да получим пространства и над други "числови системи" (числови полета).

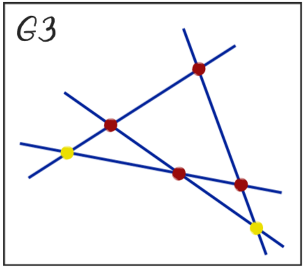
Преди всичко обаче, за да е възможна тази конструкция е необходимо нивото да е поне $3$. Тоест, системите от тип "бит" имат твърде слаба структура за да породят геометрия.

Тогава, при определени допълнителни аксиоматични предположения за орторешетката на събитията следва, че полученото геометрично пространство ще изпълнява т. нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) на проективната геометрия



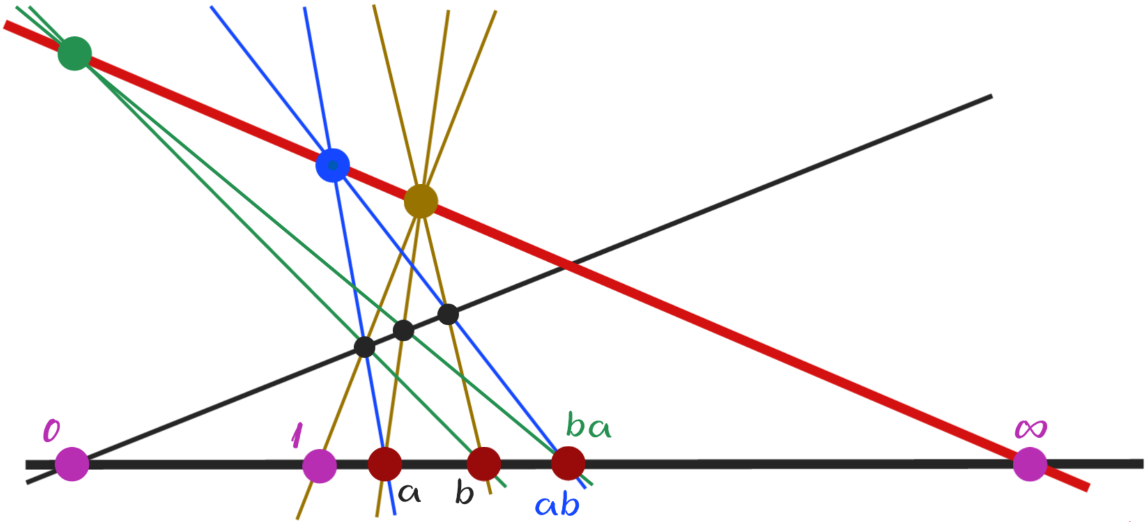



# Аритметика в проективната геометрия: произведение

И така, всяка решетка на събитията $\mathscr{E}vents$ на чисто квантова система поражда най-напред собствена числова система над която се строи проективното пространство, което моделира геометрично събитията.

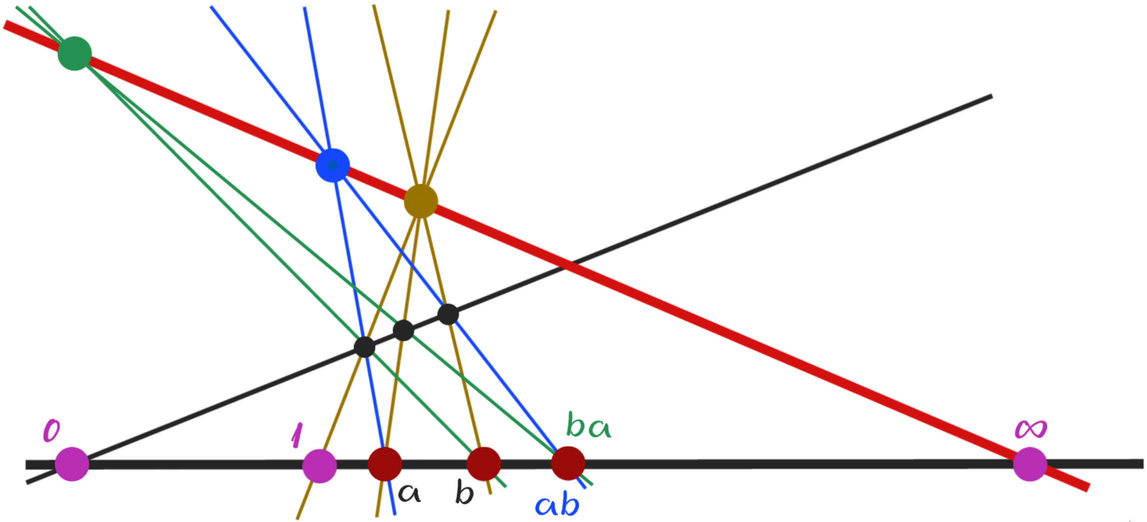
Оказва се, че върху ако върху произволна права се изберат три различни точки: “нула”, “единица” и “безкрайност”, то в допълнението на точката “безкрайност” се индуцира единствена структура на т.нар. “реални алгебри с делене” (real division algebras, Wikipedia).




Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# Аритметика в проективната геометрия : произведение

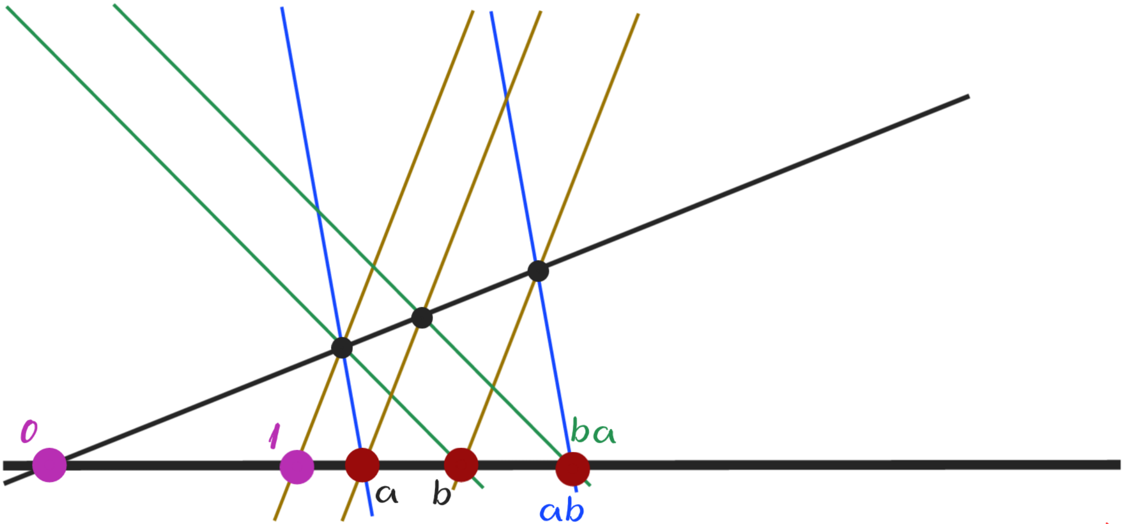
Ето например как се строи произведението на две точки $a$ и $b$.




Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# Аритметика в проективната геометрия : произведение

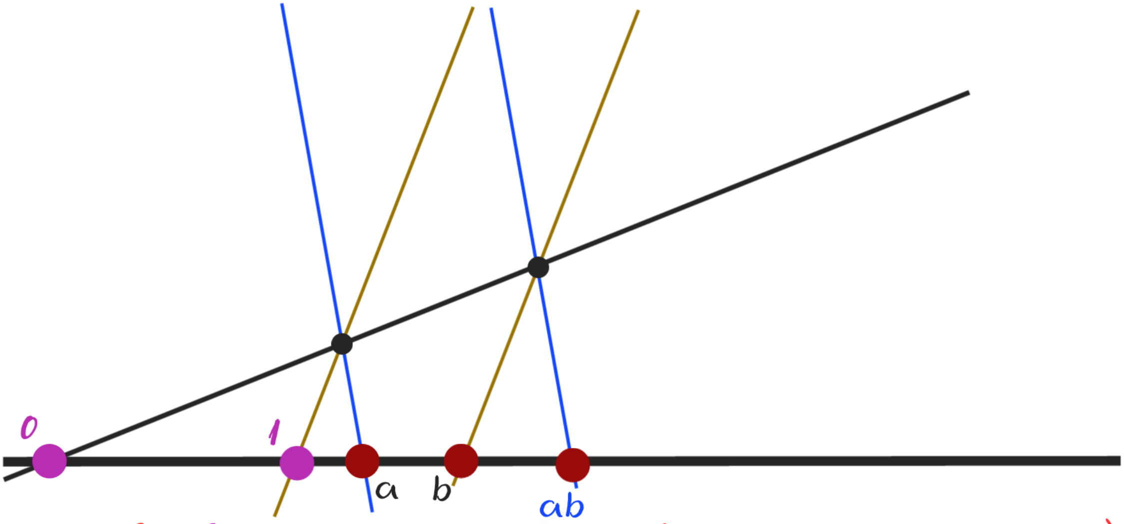
Ако изпратим точката "безкрайност" – на безкрайност и заедно с нея и червената права, то оставащите едноцветни прави ще са съответно успоредни. Това е афинна реализация на произведението и тя следва директно от съображения за подобие.




Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

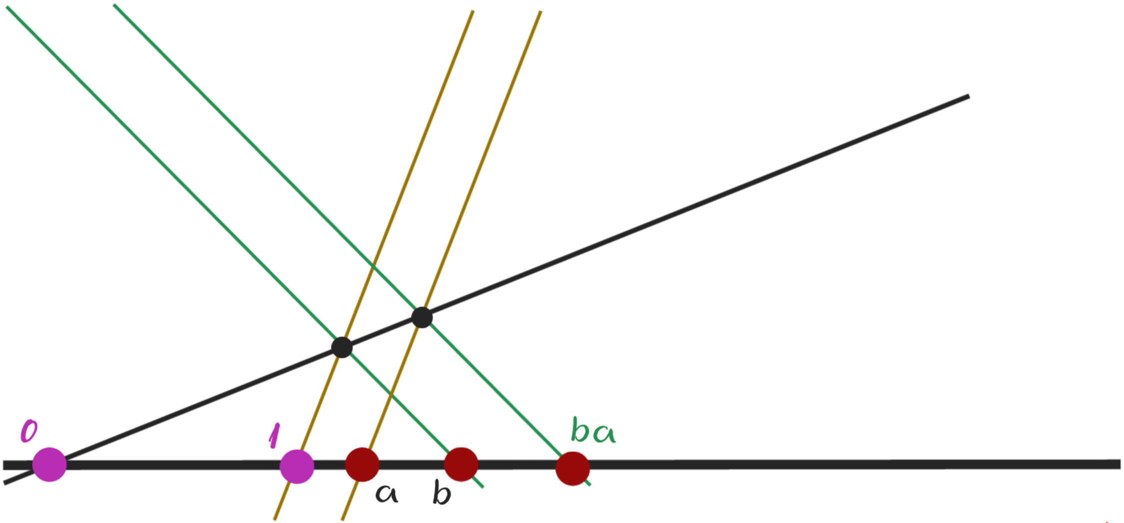
# Аритметика в проективната геометрия: произведение

Виждаме, че имаме два начина за умножаване: $ab$




Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# Аритметика в проективната геометрия: произведение

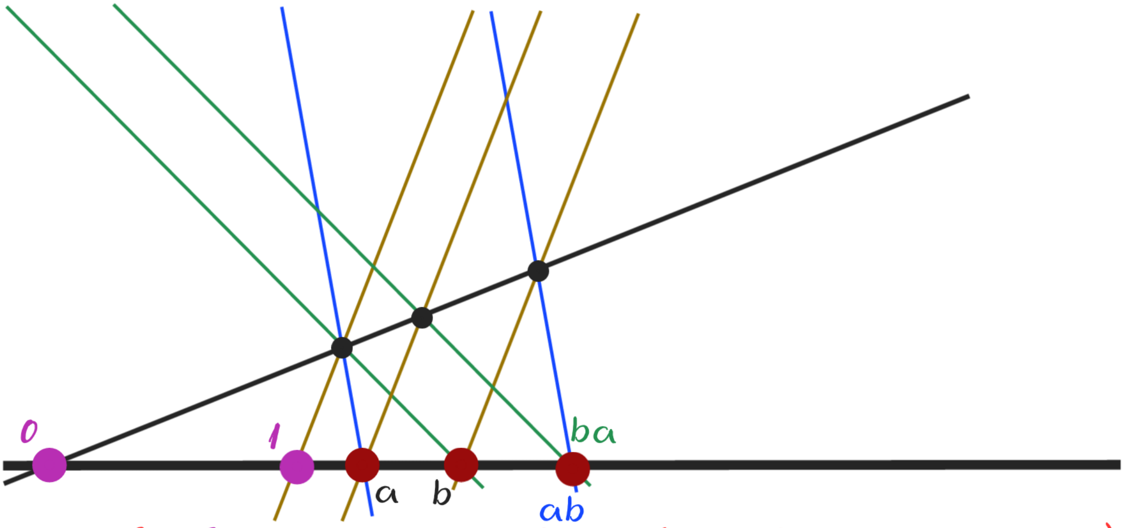



Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

и $ba$.

# Аритметика в проективната геометрия : произведение

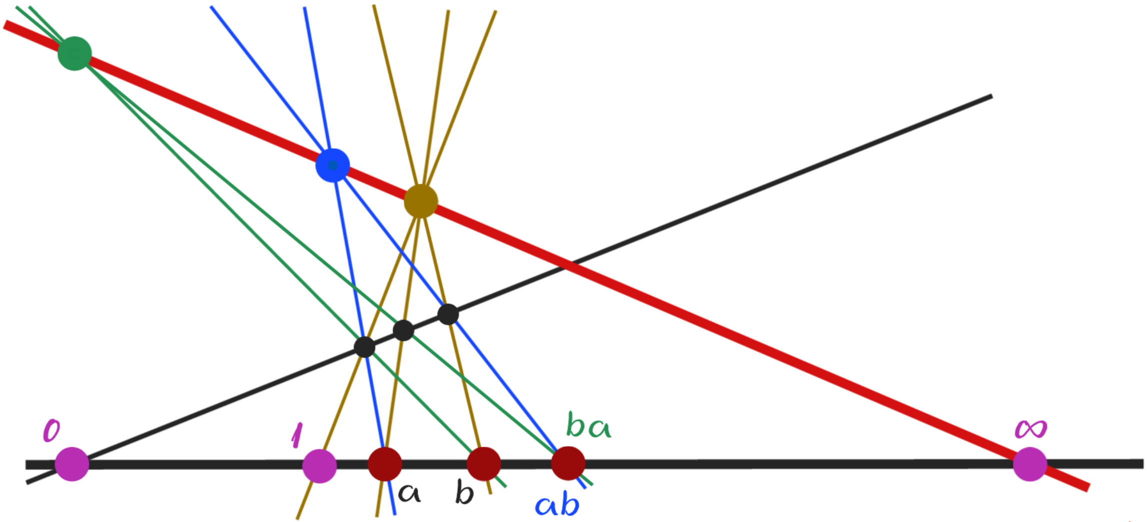
В случая те съвпадат, понеже сме в “реална геометрия” и реалните числа са комутативни.




Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# Аритметика в проективната геометрия: произведение

Ето съвпадението $ab = ba$ в най-обща геометрична ситуация. Това е т.нар. теорема на Пап (Papus theorem), която в определени ситуации обаче може да се наруши и получените числови системи да се окажат некомутативни.

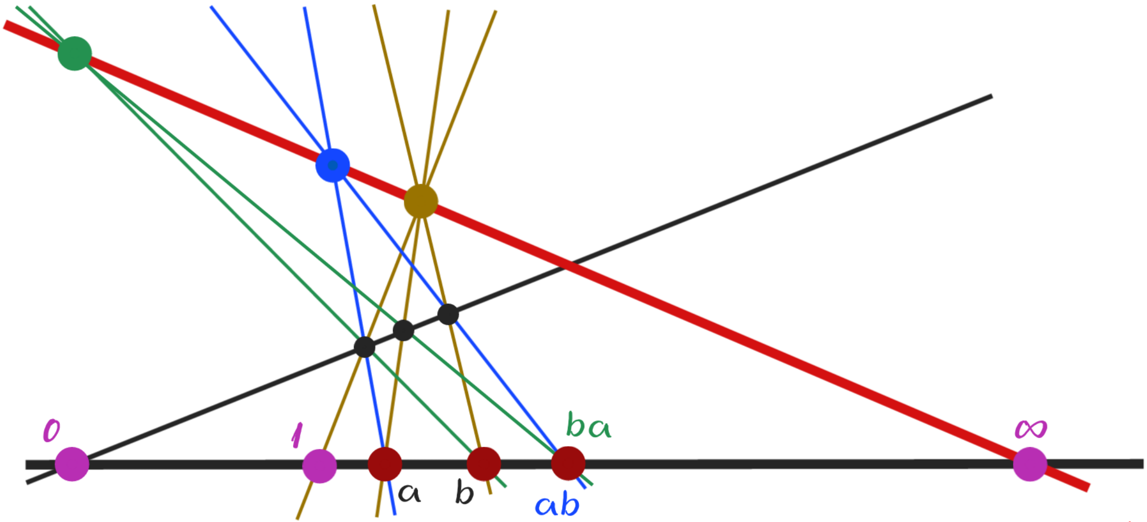



Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# Аритметика в проективната геометрия : произведение

Доказва се, че при размерност на проективното пространство (= нивото-1) $\geqslant 2$ получената числова система е винаги асоциативна – това е т.нар. теорема на Дезарг.

В тези случаи получаваме три възможни числови системи (три реални асоциативни алгебри с деление): $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ (кватерниони). Това гласи теоремата на Фробениус.

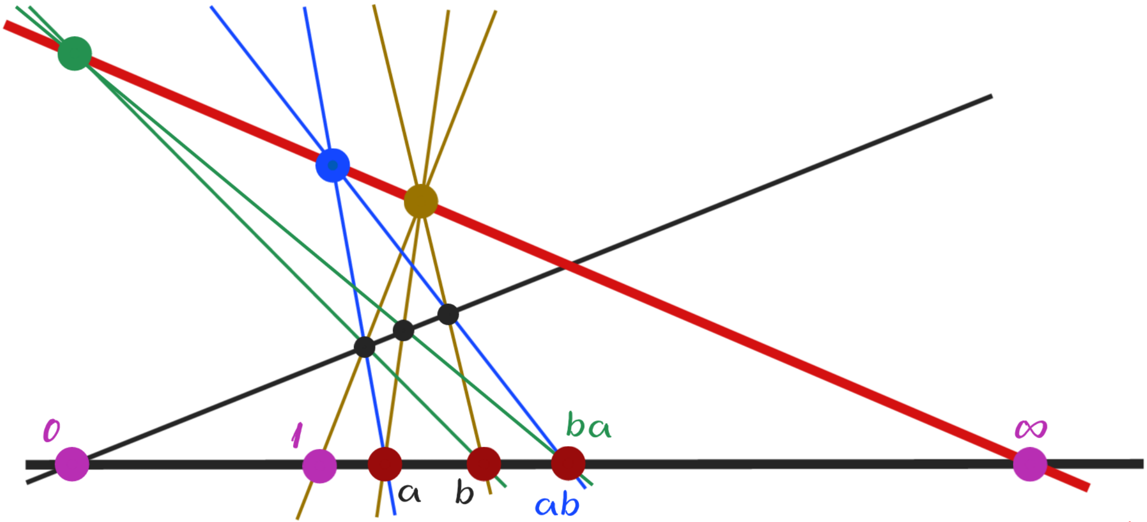



Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# Аритметика в проективната геометрия : произведение

Случаят с ниво 3, който съответства на размерност 2 на проективната геометрия (проективни равнини) носи допълнителна възможност.

Това е т.нар. изключителна недезаргова геометрия на Кейли Cayley plane. Съответната числова система е алгебрата на октонионите $\mathbb{O}$, която е неасоциативна.




Всяка права с белязани три точки става тяло (поле, евентуално некомутативно)

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Основните модели на орторешетките "Events" на квантовите събития са от вида:

Events := $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ := множеството на всички (затворени) линейни подпространства на (комплексно) хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с частичната наредба на включване $\subseteq$ и $\perp$ := ортогоналното допълнение

$\boxed{\mathfrak{L}}$ алтернативно означение

"хилбертово пространство на състоянията"

Горните конструкции ни водят до пълна класификация на орторешетките на събитията за чисто квантовите системи.

При нива $\geqslant 4$ те са винаги хилбертови пространства (и по-общо, леви хилбертови модули) над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Подробно горните резултати могат да се намерят в цитираните монографии.

За сега в природата сме наблюдавали само квантови системи над комплексните числа. Теоретично няма проблем да работим и над реалните числа. Кватернионите обаче остават до днес теоретично предизвикателство, тъй като те при тях остава неясна ситуацията с описанието на т.нар. съставни квантови системи (ще ги разгледаме в третата аксиоматична част).

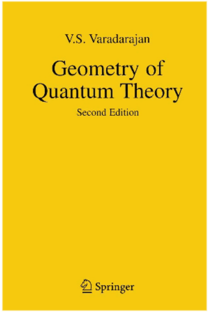
Основните модели на орторешетките "Events" на квантовите събития са от вида:

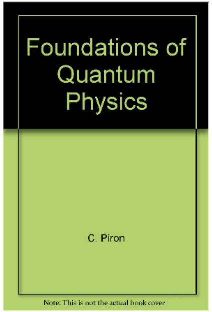
Events $:= \mathcal{G}(\mathcal{H}) :=$ множеството на всички (затворени) линейни подпространства на (комплексно) хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с частичната наредба на включване $\subseteq$ и $\perp :=$ ортогоналното допълнение

$\boxed{\mathfrak{L}}$ алтернативно означение

"хилбертово пространство на състоянията"

Възможни са и по-общи модели




http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Varadarajan.pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Piron.pdf

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Както изтъкнахме по-горе, случаят с ниво $3$ ни води и до една изключителна квантова система – над октонионите. Тези квантови системи са още по-предизвикателни и от кватернионните. В тях има една “мистична троичност”, която в последните години стана актуална във връзка с описание на кварките в теорията на елементарните частици.

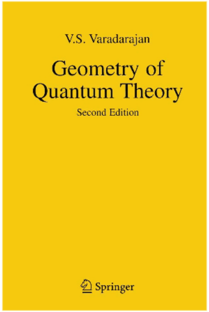
Основните модели на орторешетките “Events” на квантовите събития са от вида:

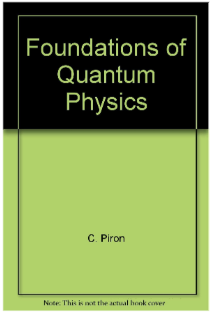
Events $:= \mathcal{G}(\mathcal{H}) :=$ множеството на всички (затворени) линейни подпространства на (комплексно) хилбертово пространство $\mathcal{H}$ с частичната наредба на включване $\subseteq$ и $\perp :=$ ортогоналното допълнение

$\boxed{\mathfrak{L}}$ алтернативно означение

$\boxed{\text{“хилбертово пространство на състоянията”}}$

Възможни са и по-общи модели




http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Varadarajan.pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Piron.pdf

И така, връщаме се към основното изложение на тази презентация.

В горното допълнение обяснихме защо нашия основен модел на квантовите събития в (крайните) чисто квантови системи е "почти" общия случай. В настоящия курс това ще бъде и единствения квантов случай.

## Квантова съждителна (propositional) логика

- $\mathcal{E}vents$ е ортомодуларна решетка, която изпълнява още:
- атомарност
- закон за покриването
- крайност

## Основен модел:

$$\mathcal{E}vents = \mathfrak{L}_N$$

$$:= \{ V \mid V \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^N \text{ - крайно-мерно хилбертово простр.} \}$$

# Класически системи $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ Events е булева алгебра

Нека да определим: **класическа система** – това е система, в която ортоарешетката на събитията е булева алгебра.

Известна теорема от теорията на булевите алгебри ни дава като следствие, че класическите системи от ниво $n$ имат орторешетки на събитията, които могат да се представят като степенно множество (power set) над $n$ елементно множество.

Класически системи $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ Events е булева алгебра

Теорема За класическа система от ниво n

$$Events \cong \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

(степенното множество / power set

С други думи, можем да разглеждаме събитията в тези системи като подмножества на някакво $n$ елементно множество, да речем, $\{1, \dots, n\}$.

Основните релации и операции над събития тогава имат естествената интерпретация в термини на теорията на множествата.

Класически системи $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ Events е булева алгебра

<u>Теорема</u> За класическа система от ниво $n$

$$\text{Events} \cong \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

(степенното множество / power set

Подробно:
- събитие $P \Longleftrightarrow P \subseteq \{1, \dots, n\}$
- $P \preccurlyeq Q \Longleftrightarrow P \subseteq Q$
- $P \wedge Q = P \cap Q$
- $P \vee Q = P \cup Q$
- $P^{\perp} = \{1, \dots, n\} \setminus P$

За общи системи (дори не непременно неприводими), нека да въведем понятието "подсистема". Една такава се характеризира с орторешетка на събитията $\mathscr{E}vents_1$, която е **подрешетка** на изходната $\mathscr{E}vents$.

По определение, последното означава, че логическите операции $\wedge$, $\vee$ и $\perp$ не ни извеждат извън $\mathscr{E}vents_1$.

Смисълът на това определение е, че разглеждането на подсистема е равносилно на това да отделим подмножество от събития, което да е затворено спрямо логическите операции.

$$\boxed{\text{Подсистема} \underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \text{под-орторешетка на } \mathscr{E}vents}$$

Тоест, $\mathscr{E}vents_1 \subseteq \mathscr{E}vents$ задава подсистема, ако е затворена спрямо операциите $\wedge, \vee, \perp$.

И сега, ще определим "**експеримент**" в нашата система като подсистема, която сама по себе си е класическа. С други думи, това е булева подалгебра на орторешетката на събитията.

Това е съвсем естествено: нашата собствена логика на събитията винаги ще остава класическа и булева.

$$\boxed{\text{Подсистема} \underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \text{под-орторешетка на } \mathcal{E}vents}$$

Тоест, $\mathcal{E}vents_1 \subseteq \mathcal{E}vents$ задава подсистема, ако е затворена спрямо операциите $\wedge, \vee, \perp$.

$$\boxed{\text{Експеримент} \underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \text{класическа подсистема}}$$

Тоест, това е под-орторешетка $\mathcal{E}vents_1 \subseteq \mathcal{E}vents$, която е дистрибутивна (булева алгебра е). $\underset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow}$ "булева подалгебра"

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение: • $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент

Събитията $P_1, \dots, P_k$ ще наричаме **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент. С други думи, ако участват в обща булева подалгебра на $\mathscr{E}vents$.

С това можем да кажем, че "прокудената дистрибутивност се завръща на бял кон".

Ние не сме забранявали дистрибутивността, а просто я изпуснахме от задължителните, общовалидни аксиоми. Сега тя влиза в общата квантова теория като условие за съвместна измеримост. Излиза, че допускането на недистрибутивността ни позволи да моделираме математически един от най-основните квантови феномени – този на съвместната неизмеримост.

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение:

- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент
- $P, Q \in \mathcal{E}vents$ **комутират** - пишем $P \,\mathbf{C}\, Q$ - ако $P \vee (Q \wedge P^{\perp}) = Q$

В практически план, оказва се че има техническипо-просто понятие, което се оказва еквивалентно на съвместната измеримост. Това релацията "**комутируемост** в орторешетка" – дефинирана както е показано.

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение: • $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент

• $P, Q \in \mathcal{E}vents$ **комутират** - пишем $P \mathbf{C} Q$ - ако $P \vee \underbrace{(Q \wedge P^{\perp})}_{Q \setminus P} = Q$

Припомняме означението $Q \backslash P := Q \wedge P^{\perp}$,

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение:

- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент
- $P, Q \in \mathcal{E}vents$ **комутират** - пишем $P \mathbf{C} Q$ - ако $P \vee (Q \setminus P) = Q$

което по-нататък основно ще използваме.

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение:
- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq Events$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент
- $P, Q \in Events$ **комутират** - пишем $P \mathbf{C} Q$ - ако $P \vee (Q \setminus P) = Q$

Забележете, че операцията на относително допълнение $Q \backslash P$ вече използваме за общи събития $P$ и $Q$, а не само за случая когато $Q$ мажорира $P$.

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение:

- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент
- $P, Q \in \mathcal{E}vents$ **комутират** - пишем $P \mathbf{C} Q$ - ако $P \vee (Q \setminus P) = Q$

Така, ортомодуларността: $P \preccurlyeq Q \implies P \mathbf{C} Q$

В такъв случай, аксиомата за ортомодуларност може да се преизкаже така: ако $P$ се мажорира от $Q$, то $P$ комутира с $Q$.

Основният резултат от теорията на съвместната измеримост е, че тя е равносилна на комутируемост по двойки (при предположение на аксиомите на квантовата логика). В частност, комутируемостта е *симетрична релация*. И също, за съвместната измеримост е необходимо и достатъчно тя да се случва по двойки.

И така, комутируемостта е равносилна на съвместната измеримост на двойката събития. ***Забележете обаче, че в общия случай това не е транзитивна релация!***

# Съвместна измеримост и комутируемост

По определение:
- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са съвместно измерими, ако участват в общ експеримент
- $P, Q \in \mathcal{E}vents$ комутират – пишем $P \mathbf{C} Q$ – ако $P \vee (Q \setminus P) = Q$

Така, ортомодуларността: $P \preccurlyeq Q \implies P \mathbf{C} Q$

<u>Теорема</u> $P_1, \dots, P_k$ са съвместно измерими $\iff$ те комутират две по две

# Съвместна измеримост и комутируемост

Нека да определим **център** на орторешетката на квантовите събития като подмножеството от тези събития, които комутира с всички останали. Така, централните събития се добавят към всеки експеримент. Също, нулата и единицата са винаги централни събития. Ако нулата и единицата са единствените централни събития, то казваме, че **центърът е тривиален**.

Приведеният резултат гласи, че всяка неприводима система има тривиален център.

Вярно е и обратното: тривиалния център е индикатор за неприводимост.

По определение:

- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са **съвместно измерими**, ако участват в общ експеримент
- $P, Q \in \mathcal{E}vents$ **комутират** - пишем $P \mathbf{C} Q$ - ако $P \vee (Q \setminus P) = Q$

Така, ортомодуларността: $P \preccurlyeq Q \implies P \mathbf{C} Q$

Теорема $P_1, \dots, P_k$ са съвместно измерими $\iff$ те комутират две по две

Теорема В неприводима система: ако $P$ комутира с всяко събитие $Q$, то $P = 0$ или $1$.

Тоест, **центърът** $\mathcal{Z}(\mathcal{E}vents) := \{P \in \mathcal{E}vents \mid P \mathbf{C} Q \; (\forall Q)\}$
$= \{0, 1\}$ - тривиален

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

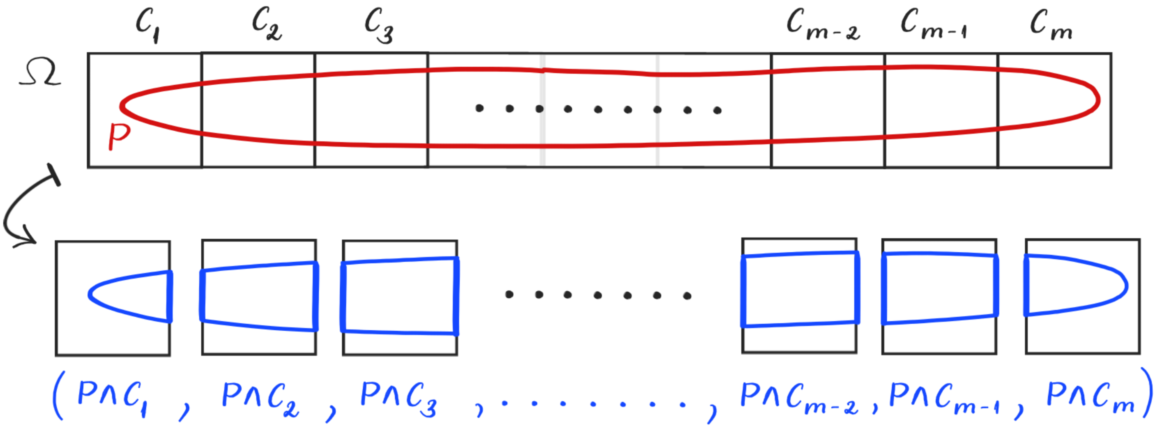
Като второ допълнение, извън основното изложение на тази презентация, ще скицираме как понятието център ни позволява да докажем първата структурна теорема (тази, която се отнасяше до разбиването на орторешетката на събитията на пряко произведение на прости).

Конструкцията обобщава известния комбинаторен изоморфизъм на булеви алгебри, който се индуцира при разбиване (partition) на основното множество $\Omega$ на булевата алгебра. Както се вижда от картинката, всяко подмножество $P \subseteq \Omega$ е в 1–1 съответствие със "следите", които оставя в разбиването. По такъв начин и булевата алгебра $\mathcal{P}(\Omega)$ се представя като пряко произведение.

## Централно разбиване

Това обобщава комбинаторният изоморфизъм на степенните множества

$$\mathcal{P}(\Omega) \cong \mathcal{P}(C_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(C_m)$$



# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

## Централно разбиване

Events се разбива в произведение на неприводими блокове

$$\mathit{Events} \cong \mathit{Events}_1 \times \cdots \times \mathit{Events}_m$$

Тази конструкция се прилага и общия случай, но спрямо атомите на центъра. Те водят до простите множители в прякото произведение на разлагането на $\mathcal{E}vents$.

## Централно разбиване

Класическите неприводими системи са точките

$$\mathcal{P}(\Omega) \cong \mathcal{P}(\{\bullet\}) \times \cdots \times \mathcal{P}(\{\bullet\})$$

$$\{\hat{0},\hat{1}\} \times \{\hat{0},\hat{1}\} \times \{\hat{0},\hat{1}\} \times \cdots \times \{\hat{0},\hat{1}\} \times \{\hat{0},\hat{1}\} \times \{\hat{0},\hat{1}\}$$

За случая на разлагане на булева алгебра: прости множители са булевите алгебри на синглетоните.

# ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

$\mathcal{P}(\{\bullet\}) \cong \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$.

## Централно разбиване

Класическите неприводими системи са точките

$$\mathcal{P}(\Omega) \cong \mathcal{P}(\{\bullet\}) \times \cdots \times \mathcal{P}(\{\bullet\})$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\{\hat{0},\hat{1}\} & \times & \{\hat{0},\hat{1}\} & \times & \{\hat{0},\hat{1}\} & \times & \cdots & \times & \{\hat{0},\hat{1}\} & \times & \{\hat{0},\hat{1}\} & \times & \underbrace{\{\hat{0},\hat{1}\}}_{\mathcal{P}(\{\bullet\})}
\end{array}$$

## ДОПЪЛНЕНИЕ ИЗВЪН КУРСА

Така, общия случай на орторешетка на събития описва "хибридна система", която е съставена от чисто квантови системи взети като класически алтернативи.

Такава би била ситуацията при т.нар. "хибридни изчисления", които имат квантови подмодули, резултатите от които се сечетават от последващо класическо изчисление.

### Централно разбиване

Events се разбива в произведение на неприводими блокове

$$\text{Events} \cong \text{Events}_1 \times \cdots \times \text{Events}_m$$

Това е общия случай на статистическа система: хибридна

Връщаме се към основната презентация и едно допълнително развитие на понятията свързани със съвместната измеримост и експерименти.

**Дизюнктивни** събития – това са нулево пресичащи се по двойки събития, които освен това са и съвместно измерими.

И така, за взаимното изключване на две събитията не е достатъчно нулевото им пресичане! Нужно е и да комутират, т.е., да са съвместно измерими.

# Дизюнктивност и дизюнктивни разбивания

По определение: • $\{P_1, \ldots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са дизюнктивни (дизюнктивна система/взаимно изключващи се алтернативи), ако са съвместно измерими

$P_{j_1} \wedge P_{j_2} = 0$ за всеки $j_1, j_2$

(така и, $P_{j_1} \mathbf{C}\, P_{j_2}$)

# Дизюнктивност и дизюнктивни разбивания

По определение:

- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са дизюнктивни (дизюнктивна система/взаимно изключващи се алтернативи), ако са съвместно измерими
  $P_{j_1} \wedge P_{j_2} = 0$ за всеки $j_1, j_2$
  (така и, $P_{j_1} \subset P_{j_2}$)
- Ако $P_1, \dots, P_k$ - дизюнктивни и $Q = P_1 \vee \dots \vee P_k$, то казваме, че това е дизюнктивно разбиване на $Q$ и пишем: $\boxed{Q = P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_k}$

Дизюнктивно обединение: това е обединение по дизюнктивна система.

# Дизюнктивност и дизюнктивни разбивания

По определение:

- $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{E}vents$ са дизюнктивни (дизюнктивна система / взаимно изключващи се алтернативи), ако са съвместно измерими $P_{j_1} \wedge P_{j_2} = 0$ за всеки $j_1, j_2$ (така и, $P_{j_1} \mathbf{C}\, P_{j_2}$)
- Ако $P_1, \dots, P_k$ - дизюнктивни и $Q = P_1 \vee \dots \vee P_k$, то казваме, че това е дизюнктивно разбиване на $Q$ и пишем: $\boxed{Q = P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_k}$
- В частност: $1 = P_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} P_k$ - дизюнктивно разбиване на 1

В частност, за единицата: това води до едно от най-главните понятия в курса – дизюнктивното разбиване на единицата.

Без доказателство ще приведем едно иначе просто твърдение: експериментите в една система са в 1–1 съответствие с дизюнктивните разбивания на единицата.

Фактически: едно такова дизюнктивно разбиване на единицата се състои от атомите на булевата алгебра от събитията на експеримента. С други думи, това са елементарните събития на експеримента.

# Дизюнктивност и дизюнктивни разбивания

<u>Твърдение</u> Експеримент $\iff$ $1 = P_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} P_k$

При това: $P_1, \ldots, P_k$ се явяват елементарните събития на експеримента

# Дизюнктивност и дизюнктивни разбивания

<u>Твърдение</u> Експеримент $\Longleftrightarrow$ $1 = P_1 \dot\vee \cdots \dot\vee P_k$

При това: $P_1, \ldots, P_k$ се явават елементарните събития на експеримента

Допълнителното дизюнктивно подразбиване на елементарните събития на един експеримент представлява неговото **изфиняване**. **Максималният експеримент**, т.е., максимално финия експеримент, е такъв, чийто събития не могат повече да се подразбиват дизюнктивно.

Максимален експеримент $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}}$ такъв чийто елементарни събития не могат да се подразбиват дизюнктивно

# Дизюнктивност и дизюнктивни разбивания

Така, това е експеримент, чийто елементарни събития са и елементарни събития в рамките на цялата система.

В последствие ние ще свържем максималните експерименти с ортонормирани базиси в хилбертовото пространство на системата. Оттам ще дойде и израза "измерване в базис".

**Твърдение** Експеримент $\Leftrightarrow$ $1 = P_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} P_k$

При това: $P_1, \dots, P_k$ се явяват елементарните събития на експеримента

**Максимален експеримент** $\overset{}{\underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow}}$ такъв чийто елементарни събития не могат да се подразбиват дизюнктивно

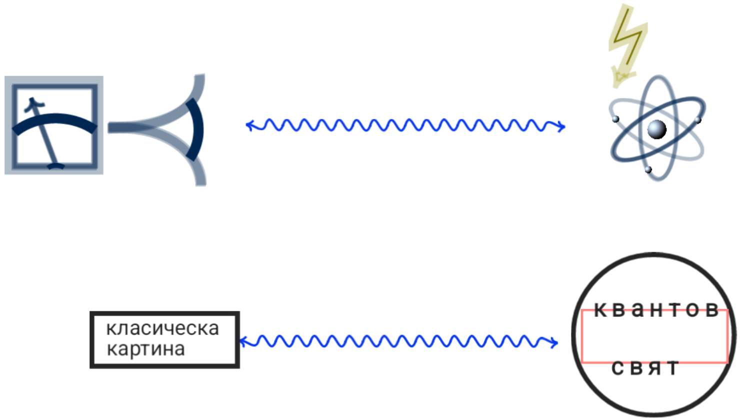
$\Leftrightarrow$ $1 = P_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} P_n$, където $P_1, \dots, P_n$ са елементарни събития за цялата система

Завършваме тази презентация с няколко картинки, илюстриращи последно въведените понятия.

Измерването или още, наблюдението в квантовата физика е активен процес, свързан с неотстранимо минимално смущение.

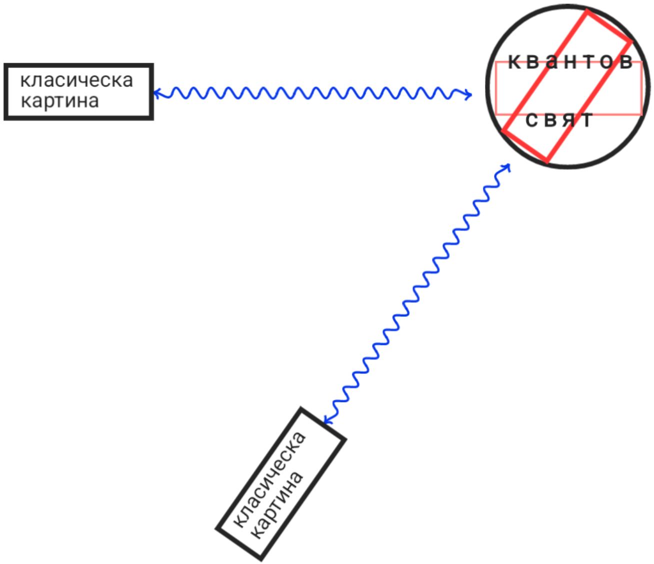
В следствие на това, ние никога не получаваме пълна информация за наблюдавания квантов обект.

При всяко измерване ние извличаме определена "класическа картина" за този обект, но тя е винаги непълна, макар и да би могла да бъде максимизирана.

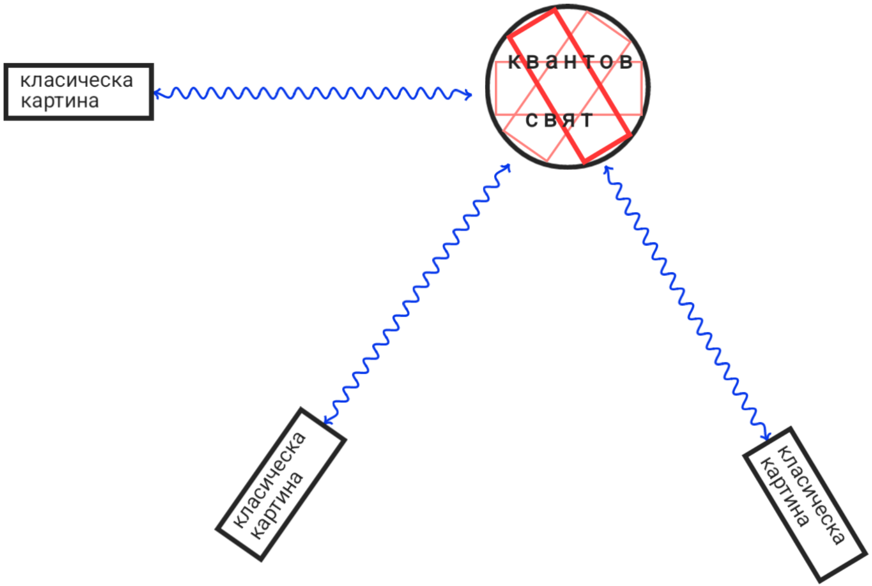


Така, поради общата недистрибутивност и наличие на съвместно неизмерими събития ние имаме множество максимални експерименти.

Всеки дава някаква “класическа подкартина”,



винаги непълна.



Съвкупността от всички тези максимални експерименти обаче, т.е., максимални булеви подалгебри покрива цялата орторешетка на събитията.