Напомняме

P е събитие (в чисто квантова система от ниво n) $\Leftrightarrow$ P е ортогонален проектор в $\mathbb{C}^n$ $\Leftrightarrow$ P е $n\times n$-матица, $P^* = P = P^2$

Теорема (Gleason)

Всяко чисто състояние ρ на чисто квантова система от ниво n над хилбертовото пространство $\mathbb{C}^n$ при $n \geq 3$ е от вида

$$\rho(P) = \|P\Psi\|^2 \text{ за някакъв единичен вектор } \Psi \in \mathbb{C}^n,$$

където P е произволен ортогонален проектор на събитие.

Векторът Ψ се нарича вектор на състоянието. Този вектор е определен от състоянието ρ с точност до умножение по комплексно число по модул 1:

Ψ и Ψ' определят едно и също състояние

$$\Leftrightarrow \quad \Psi' = e^{i\varphi}\Psi \quad \text{за } \varphi \in \mathbb{R}$$

$\square$

Забележете:

$$\|P\Psi\|^2 = \langle P\Psi | P\Psi \rangle = \langle \Psi | P^* P \Psi \rangle = \langle \Psi | PP\Psi \rangle$$

$$= \langle \Psi | P\Psi \rangle = \rho(P)$$ – алтернативно представяне на състоянието

И така, чистите състояния имат вектори Ψ на състоянието и ние често ще казваме "състоянието Ψ". Например:

$$\mathrm{Prob}_\Psi(P) \equiv \mathrm{Prob}(P|\Psi) = \langle \Psi | P\Psi \rangle = \|P\Psi\|^2$$

– вероятност за измерване на събитие P в състояние Ψ.

Допълнителни сведения от матричното смятане

а) Следа Tr - trace : на квадратна матрица

$$C = (c_{jk})_{j,k=1}^{n} \, , \ \mathrm{Tr}\, C = \sum_{j=1}^{n} c_{jj}$$ - сума на диагоналните.

Основно свойство $\boxed{\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA}$, където

$$A = (a_{jk})_{n\times m} \, , \quad B = (b_{kl})_{m\times n}$$

$$AB = C = (c_{jl})_{n\times n} \, , \quad c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}$$

$$BA = D = (d_{kj})_{m\times m} \, , \quad d_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} a_{lj}$$

$$\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, C = \sum_{j=1}^{n} c_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kj}$$

$$\mathrm{Tr}\, BA = \mathrm{Tr}\, D = \sum_{k=1}^{m} d_{kk} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{jk}$$

Следствие: $\boxed{\mathrm{Tr}\, A_1 \cdots A_{n-1} A_n = \mathrm{Tr}\, A_n A_1 \cdots A_{n-1}}$ - общо циклично свойство

Събитие ⟺ P – матрица $n \times n$

$$P^* = P = P^2$$

⟺ ортогонален проектор в $\mathbb{C}^n$

<u>Теорема</u> (Gleason)

ρ – <u>чисто</u>, то $\exists\, \Psi \in \mathbb{C}^n$ – единичен

т.че: $\rho(P) = \|P\Psi\|^2$

$$\rho(P) = \mathrm{Prob}_\rho(P)$$

Ψ се нарича вектор на състоянието

Ψ и Ψ' определят едно и също състояние (т.е. $\|P\Psi\| = \|P\Psi'\|$ за вс. събитие P)

$$\Longleftrightarrow \Psi' = e^{i\varphi} \cdot \Psi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

<u>Зад. 1</u>

$P,\ P^\perp$

$$P \vee \underbrace{P^\perp} = 1$$

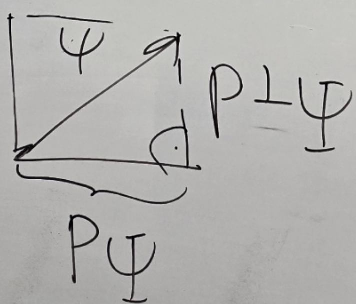
$$1 \wedge P = 1 \wedge P^\perp$$

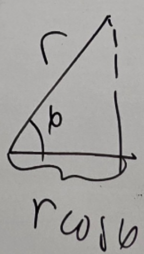
$$\rho(P) + \rho(P^\perp) = \rho(1) = 1$$

Дали:

$$\|P\Psi\|^2 + \|P^\perp\Psi\|^2 \overset{?}{=} 1 = \|\Psi\|^2$$

т-ма – „Питагор"





<u>Зад. 2:</u>

$$\rho(P) = \|P\Psi\|^2$$

$$= \langle P\Psi | P\Psi \rangle =$$

$$= \langle \Psi | P^* P \Psi \rangle$$

$$= \langle \Psi | P P \Psi \rangle$$

$$= \langle \Psi | P \Psi \rangle$$

$$\left(= \mathrm{Prob}_\rho(P)\right)$$

Доп. сведение от матрич. сметки

а) Следа – Tr – trace – на квадратна матр.

$$C = (c_{jk})_{j,k=1}^{n}, \quad \mathrm{Tr}\, C := \sum_{j=1}^{n} c_{jj}$$

– сума по диагонала

Тв. $\mathrm{Tr}\, \underbrace{AB}_{\substack{(n\times m)(m\times n)\\ n\times n}} = \mathrm{Tr}\, \underbrace{BA}_{\substack{(m\times n)(n\times m)\\ m\times m}}$

$$A = (a_{jk})_{n\times m}, \quad B = (b_{kl})_{m\times n}$$

$$AB = C = (c_{jl})_{n\times n}, \quad c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}$$

$$BA = D = (d_{kj})_{m\times m}, \quad d_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} a_{lj}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kj} = \mathrm{Tr}\, AB$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_{kk} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{jk} \quad \mathrm{Tr}\, BA$$

Следствие: (циклично св-во)

$$\mathrm{Tr}\, A_1 \cdots A_{n-1} A_n = \mathrm{Tr}\, A_n A_1 \cdots A_{n-1}$$

Приложение:

$$\langle \Psi | P | \Psi \rangle \quad (= \Psi^* P \Psi)$$

$$= \mathrm{Tr} \langle \Psi | P | \Psi \rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\, \underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\hat{\rho}_\Psi} P$$

$\hat{\rho}_\Psi$ – орт. проектор в/у Ψ

Следствие от Th-Gleason

Всяко състояние ρ на квант. система от ниво n над хилб. пр-во $\mathbb{C}^n$ е в 1–1 съответствие с матрица $\hat{\rho}$, $n\times n$, т.че:

1) $\hat{\rho}$ е полож. дефинитна (матрич. деф.)
$(\forall \Psi \in \mathbb{C}^n : \langle \Psi | \hat{\rho} \Psi \rangle \geq 0)$

2) $\mathrm{Tr}\, \hat{\rho} = 1$

Съответствието се основава на формулата

$$\boxed{\rho(P) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\,P}$$

"матрица на плътността"

При това:

ако ρ_1, ρ_2, ρ – състояния

$$\begin{array}{ccc} \rho_1 & \rho_2 & \rho \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \hat{\rho} \end{array}$$

Тогава

$$\underset{\text{смес}}{\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2} \Longleftrightarrow \hat{\rho} = q_1\hat{\rho}_1 + q_2\hat{\rho}_2$$

Заб. – фрагменти от док.

а) за смисъла на условията 1) и 2) – те са необходими

– за 2) – необходимо е, защото

$$1 = \rho(\hat{1}) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\,\hat{1} = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}$$

– за 1) – необходимо е, защото

нека $P = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

– събитие (елем.)

$$0 \le \rho(|\Psi\rangle\langle\Psi|) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\,|\Psi\rangle\langle\Psi|$$
$$= \mathrm{Tr}\,\langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \text{ – число}$$
$$= \langle\Psi|\hat{\rho}\,\Psi\rangle$$

б) Доказателство на допълн.

след: $\forall P$

(*) $\rho(P) = q_1\,\rho_1(P) + q_2\,\rho_2(P)$

$\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$

(**) $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}P) = q_1\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1 P) + q_2\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_2 P)$

(*) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}\big((\hat{\rho} - q_1\hat{\rho}_1 - q_2\hat{\rho}_2)P\big) = 0$

$\forall P$ – проектор.

слагаме $P = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

(*) $\Rightarrow$ $\langle\Psi|(\hat{\rho} - q_1\hat{\rho}_1 - q_2\hat{\rho}_2)\Psi\rangle = 0 \quad \forall \Psi \in \mathbb{C}^n$

в компл. лин. ан. $\quad \Downarrow \quad$ използва т. нар. "поляризационни формули"

$$\boxed{\hat{\rho} - q_1\hat{\rho}_1 - q_2\hat{\rho}_2 = 0}$$

Наблюдаема:

експеримент, чийто резултати са числа

, изходи

$$P_1, \ P_2, \ \dots, \ P_k$$

$$1 = P_1 \dot\vee P_2 \dot\vee \dots \dot\vee P_2$$

$\Updownarrow$ от мин. лекция

$$\mathbb{1} = P_1 + P_2 + \dots + P_k$$

$$P_j P_k = 0, \ \text{за } j \neq k$$

Нека наблюдаемата дава

при P_1, при P_2, …, при P_k

$\downarrow$ резултат

$\mathbb{R} \ni a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_k$

$$\boxed{A := a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k}$$

— наблюдаема (P-exp)

Теорема (Hermit)

Наблюдаема A е всяка матрица, която изпълнява условието $\boxed{A = A^*}$ (H)

т.е., всяка ермитова (самосп. матрица).

Док. $\Rightarrow$) защо ако (P-exp) $\Rightarrow$ (H)

$$A^* = (a_1 P_1 + \dots + a_k P_k)^*$$

$$= \bar{a}_1 P_1^* + \dots + \bar{a}_k P_k^* = A$$

$\bar{a}_1 = a_1$, $P_1^* = P_1$, …, $\bar{a}_k = a_k$, $P_k^* = P_k$

$\Leftarrow$) (H) $\Rightarrow$ (P-exp)

— тук се използва т.нар. $\boxed{\text{спектрална теорема}}$

Подтема Спектрална теорема

„Стандартна спектрална теорема"

Ако $A = A^*$ – ермитова матрица, тогава

A има реални собствени стойности и базис от собствени вектори, който е орто-нормиран

Детайлно:

$f_1, \dots, f_n$ – о.н.б. на $\mathbb{C}^n$

т.че

$$A f_j = \alpha_j f_j$$

$$\langle f_j | f_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Твърдим, че

$$A = \alpha_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \alpha_2 |f_2\rangle\langle f_2| + \dots + \alpha_n |f_n\rangle\langle f_n|$$

$$A' := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |f_k\rangle\langle f_k|$$

$$A' f_j = A' |f_j\rangle$$

$$= \big(\alpha_1 |f_1\rangle\langle f_1| + \dots + \alpha_j |f_j\rangle\langle f_j| + \dots + \alpha_n |f_n\rangle\langle f_n|\big) |f_j\rangle =$$

$$= \alpha_1 |f_1\rangle \underbrace{\langle f_1 | f_j\rangle}_{=0} + \dots + \alpha_j |f_j\rangle \underbrace{\langle f_j | f_j\rangle}_{=1} + \dots + \alpha_n |f_n\rangle \underbrace{\langle f_n | f_j\rangle}_{=0}$$

$$= \alpha_j |f_j\rangle = \alpha_j f_j = A f_j$$