Аксиомите на квантовата теория, които тук ще следваме, включват три общи раздела. До тук сме започнали въвеждането на първия раздел и с това ще продължим и в тази лекция.

Най-общо, ще се изразяваме, че това са аксиоми на "**статистически системи**" като в хода на изложението ще стане ясно защо използваме този израз.

Аксиоми на квантовата теория:

I. Квантова статистика

II. Квантови трансформации

III. Съставни системи

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Ще започнем с кратък преговор на най-важното до тук с оглед на предстоящата лекция.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

До тук въведохме аксиомите или още, законите на квантовата логика: това е логическата структура на множеството $\mathscr{Events}$ на всички квантови събития. Тя се определя от две бинарни (двуместни) операции: $\wedge$ (''и'', конюнкция), $\vee$ (''или'', дизюнкция) и една едноместна операция $\perp$ (''не'', отрицание).

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R$, $P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R$,
$P\wedge Q=Q\wedge P$, $P\vee Q=Q\vee P$,
$P\vee(P\wedge Q)=P$, $P\wedge(P\vee Q)=P$,
$P\wedge P=P$, $P\vee P=P$,
— аксиоми на решетка

$P\wedge\hat{0}=\hat{0}$, $P\vee\hat{0}=P$, $P\wedge\hat{1}=P$, $P\vee\hat{1}=\hat{1}$,
— единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

$(P^\perp)^\perp=P$,
$P\vee P^\perp=\hat{1}$, $P\wedge P^\perp=\hat{0}$,
$(P\wedge Q)^\perp=P^\perp\vee Q^\perp$, $(P\vee Q)^\perp=P^\perp\wedge Q^\perp$
— аксиоми на отрицанието $\perp$

е ортоерешетка

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Ето основните закони на квантовата логика: тук те са изписани за произволни елементи $P, Q, R \in \mathscr{Events}$ (т.е., произволни квантови събития).

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или" и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R,$$
$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$
$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$
$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P,$$

аксиоми на решетка

$$P\wedge\hat{0} = \hat{0},\quad P\vee\hat{0} = P,\quad P\wedge\hat{1} = P,\quad P\vee\hat{1} = \hat{1},$$

единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

$$(P^\perp)^\perp = P,$$
$$P\vee P^\perp = \hat{1},\quad P\wedge P^\perp = \hat{0},$$
$$(P\wedge Q)^\perp = P^\perp\vee Q^\perp,\quad (P\vee Q)^\perp = P^\perp\wedge Q^\perp$$

аксиоми на отрицанието $\perp$

е орторешетка

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R,\\
&P\wedge Q=Q\wedge P,\ P\vee Q=Q\vee P,\\
&P\vee(P\wedge Q)=P,\ P\wedge(P\vee Q)=P,\\
&P\wedge P=P,\ P\vee P=P,
\end{aligned}\right\}\ \text{аксиоми на решетка}\\
&\left.\begin{aligned}
&P\wedge\hat{0}=\hat{0},\ P\vee\hat{0}=P,\ P\wedge\hat{1}=P,\ P\vee\hat{1}=\hat{1},
\end{aligned}\right\}\ \text{единица } \hat{1} \text{ и нула } \hat{0}\\
&\left.\begin{aligned}
&(P^{\perp})^{\perp}=P,\\
&P\vee P^{\perp}=\hat{1},\ P\wedge P^{\perp}=\hat{0},\\
&(P\wedge Q)^{\perp}=P^{\perp}\vee Q^{\perp},\ (P\vee Q)^{\perp}=P^{\perp}\wedge Q^{\perp}
\end{aligned}\right\}\ \text{аксиоми на отрицанието } \perp
\end{aligned}\right\}\ \text{е орторешетка}
$$

Тези закони се подразделят на три подгрупи: първата съставляват аксиомите на *решетка* (*lattice*, в надердбен смисъл).

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$\left.\begin{array}{l} P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R,\\ P\wedge Q=Q\wedge P,\ P\vee Q=Q\vee P,\\ P\vee(P\wedge Q)=P,\ P\wedge(P\vee Q)=P,\\ P\wedge P=P,\ P\vee P=P, \end{array}\right\}\ \text{аксиоми на решетка}$$

$$\left.P\wedge\hat{0}=\hat{0},\ P\vee\hat{0}=P,\ P\wedge\hat{1}=P,\ P\vee\hat{1}=\hat{1},\right\}\ \text{единица } \hat{1} \text{ и нула } \hat{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} (P^\perp)^\perp=P,\\ P\vee P^\perp=\hat{1},\ P\wedge P^\perp=\hat{0},\\ (P\wedge Q)^\perp=P^\perp\vee Q^\perp,\ (P\vee Q)^\perp=P^\perp\wedge Q^\perp \end{array}\right\}\ \text{аксиоми на отрицанието } \perp$$

е ортодешетка

Втората група са законите на за нулата и единицата, които превръщат решетките в *решетки с нула и единица* или още, *ограничени решетки*.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Третата група закони са законите за отрицанието.

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или" и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$\left.\begin{array}{l} P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R, \\ P\wedge Q=Q\wedge P,\ P\vee Q=Q\vee P, \\ P\vee(P\wedge Q)=P,\ P\wedge(P\vee Q)=P, \\ P\wedge P=P,\ P\vee P=P, \end{array}\right\}\text{ аксиоми на решетка}$$

$$\left.P\wedge\hat{0}=\hat{0},\ P\vee\hat{0}=P,\ P\wedge\hat{1}=P,\ P\vee\hat{1}=\hat{1},\right\}\text{ единица } \hat{1} \text{ и нула } \hat{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} (P^\perp)^\perp=P, \\ P\vee P^\perp=\hat{1},\ P\wedge P^\perp=\hat{0}, \\ (P\wedge Q)^\perp=P^\perp\vee Q^\perp,\ (P\vee Q)^\perp=P^\perp\wedge Q^\perp \end{array}\right\}\text{ аксиоми на отрицанието } \perp$$

е орторешетка

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Така, събрани в едно, всички тези закони аксиоматизират математическите структури, наречени *орторешетки*.

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R,\\
P\wedge Q=Q\wedge P,\ P\vee Q=Q\vee P,\\
P\vee(P\wedge Q)=P,\ P\wedge(P\vee Q)=P,\\
P\wedge P=P,\ P\vee P=P,
\end{array}\right\}\text{аксиоми на решетка}\\
\left.P\wedge\hat{0}=\hat{0},\ P\vee\hat{0}=P,\ P\wedge\hat{1}=P,\ P\vee\hat{1}=\hat{1},\right\}\text{единица }\hat{1}\text{ и нула }\hat{0}\\
\left.\begin{array}{l}
(P^\perp)^\perp=P,\\
P\vee P^\perp=\hat{1},\ P\wedge P^\perp=\hat{0},\\
(P\wedge Q)^\perp=P^\perp\vee Q^\perp,\ (P\vee Q)^\perp=P^\perp\wedge Q^\perp
\end{array}\right\}\text{аксиоми на отрицанието }\perp
\end{array}\right\}\text{орторешетка}$$

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Така, аксиомите до тук гласят просто, че $\mathscr{Events}$ е *орторешетка*.

I.1. Закони на квантовата логика $\xrightarrow{\text{сумарно}}$ Events е орторешетка

В Events имаме бинарни операции "∧" = "и", "∨" = "или"
и унарна операция "⊥" = "не", такива че

$$\left.\begin{array}{l} P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R, \\ P\wedge Q = Q\wedge P,\ P\vee Q = Q\vee P, \\ P\vee(P\wedge Q) = P,\ P\wedge(P\vee Q) = P, \\ P\wedge P = P,\ P\vee P = P, \end{array}\right\}\ \text{аксиоми на решетка}$$

$$\left.P\wedge\hat{0} = \hat{0},\ P\vee\hat{0} = P,\ P\wedge\hat{1} = P,\ P\vee\hat{1} = \hat{1},\right\}\ \text{единица } \hat{1} \text{ и нула } \hat{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} (P^{\perp})^{\perp} = P, \\ P\vee P^{\perp} = \hat{1},\ P\wedge P^{\perp} = \hat{0}, \\ (P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\ (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp} \end{array}\right\}\ \text{аксиоми на отрицанието } \perp$$

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или" и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R$, $P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$,
$P\wedge Q = Q\wedge P$, $P\vee Q = Q\vee P$,
$P\vee(P\wedge Q) = P$, $P\wedge(P\vee Q) = P$,
$P\wedge P = P$, $P\vee P = P$,

аксиоми на решетка

$P\wedge\hat{0} = \hat{0}$, $P\vee\hat{0} = P$, $P\wedge\hat{1} = P$, $P\vee\hat{1} = \hat{1}$

единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

$(P^\perp)^\perp = P$,
$P\wedge P^\perp = \hat{0}$, $P\vee P^\perp = \hat{1}$,
$(P\wedge Q)^\perp = P^\perp\vee Q^\perp$, $(P\vee Q)^\perp = P^\perp\wedge Q^\perp$

аксиоми на отрицанието $\perp$

е ортрешетка

НАКРАТКО:

Законите на квантовата логика включват тези на класическата логика, с изключение на законите на дистрибутивност

Казано, накратко и неформално: до тук ние сме положили всички закони на класическата логика, без дистрибутивните закони.

Ето ги изпуснатите закони за дистрибутивност.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "∧" = "и", "∨" = "или"
и унарна операция "⊥" = "не", такива че

$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$, $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$,
$P \wedge Q = Q \wedge P$, $P \vee Q = Q \vee P$,
$P \vee (P \wedge Q) = P$, $P \wedge (P \vee Q) = P$,
$P \wedge P = P$, $P \vee P = P$, } аксиоми на решетка
$P \wedge \hat{0} = \hat{0}$, $P \vee \hat{0} = P$, $P \wedge \hat{1} = P$, $P \vee \hat{1} = \hat{1}$ } единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$
$(P^\perp)^\perp = P$,
$P \wedge P^\perp = \hat{0}$, $P \vee P^\perp = \hat{1}$,
$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp$, $(P \vee Q)^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp$, } аксиоми на отрицанието ⊥

е ортоРешетка

НАКРАТКО:

Законите на квантовата логика включват тези на класическата логика, с изключение на законите на дистрибутивност

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ } дистрибутивност

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R$, $P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R$,

$P\wedge Q = Q\wedge P$, $P\vee Q = Q\vee P$,

$P\vee(P\wedge Q) = P$, $P\wedge(P\vee Q) = P$,

$P\wedge P = P$, $P\vee P = P$,

аксиоми на решетка

$P\wedge\hat{0} = \hat{0}$, $P\vee\hat{0} = P$, $P\wedge\hat{1} = P$, $P\vee\hat{1} = \hat{1}$ } единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

$(P^\perp)^\perp = P$,

$P\wedge P^\perp = \hat{0}$, $P\vee P^\perp = \hat{1}$,

$(P\wedge Q)^\perp = P^\perp\vee Q^\perp$, $(P\vee Q)^\perp = P^\perp\wedge Q^\perp$,

аксиоми на отрицанието $\perp$

е орторешетка

~~$P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$, $P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$~~ } дистрибутивност

НАКРАТКО:

Законите на квантовата логика включват тези на класическата логика, с изключение на законите на дистрибутивност

За обща орторешетка на квантови събития този закон обаче се нарушава. Но все пак, дори и тогава той ще продължи да играе съществена роля, както ще видим по-долу.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

И така, като начало на аксиоматиката, $\mathscr{Events}$ е орторешетка.

I.1. Закони на квантовата логика $\xrightarrow{\text{сумарно}}$ Events е орторешетка

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$\left.\begin{aligned}
&P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R,\\
&P\wedge Q=Q\wedge P,\ P\vee Q=Q\vee P,\\
&P\vee(P\wedge Q)=P,\ P\wedge(P\vee Q)=P,\\
&P\wedge P=P,\ P\vee P=P,
\end{aligned}\right\}\ \text{аксиоми на решетка}$$

$$P\wedge\hat{0}=\hat{0},\ P\vee\hat{0}=P,\ P\wedge\hat{1}=P,\ P\vee\hat{1}=\hat{1},\ \Big\}\ \text{единица } \hat{1} \text{ и нула } \hat{0}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(P^{\perp})^{\perp}=P,\\
&P\vee P^{\perp}=\hat{1},\ P\wedge P^{\perp}=\hat{0},\\
&(P\wedge Q)^{\perp}=P^{\perp}\vee Q^{\perp},\ (P\vee Q)^{\perp}=P^{\perp}\wedge Q^{\perp},
\end{aligned}\right\}\ \text{аксиоми на отрицанието } \perp$$

$$\cancel{P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R),\ P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)}\ \Big\}\ \text{дистрибутивност}$$

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R,$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P,$$

аксиоми на решетка

$$P\wedge\hat{0} = \hat{0},\quad P\vee\hat{0} = P,\quad P\wedge\hat{1} = P,\quad P\vee\hat{1} = \hat{1},$$

единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\vee P^{\perp} = \hat{1},\quad P\wedge P^{\perp} = \hat{0},$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

аксиоми на отрицанието $\perp$

ортодрешетка

$$P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R),\quad P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

дистрибутивност

БУЛЕВА АЛГЕБРА

Да отбележим, че макар и за обща квантова система дистрибутивните закони да не се изпълняват, но ние не ги забраняваме изобщо. В случая, когато те се изпълняват, $\mathcal{E}vents$ по определение става *булева алгебра*.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\quad P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R,$$

$$P\wedge Q = Q\wedge P,\quad P\vee Q = Q\vee P,$$

$$P\vee(P\wedge Q) = P,\quad P\wedge(P\vee Q) = P,$$

$$P\wedge P = P,\quad P\vee P = P,$$

аксиоми на решетка

$$P\wedge\hat{0} = \hat{0},\quad P\vee\hat{0} = P,\quad P\wedge\hat{1} = P,\quad P\vee\hat{1} = \hat{1},$$

единица $\hat{1}$ и нула $\hat{0}$

$$(P^{\perp})^{\perp} = P,$$

$$P\vee P^{\perp} = \hat{1},\quad P\wedge P^{\perp} = \hat{0},$$

$$(P\wedge Q)^{\perp} = P^{\perp}\vee Q^{\perp},\quad (P\vee Q)^{\perp} = P^{\perp}\wedge Q^{\perp},$$

аксиоми на отрицанието $\perp$

орторешетка

$$P\wedge(Q\vee R) = (P\wedge Q)\vee(P\wedge R),\quad P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

дистрибутивност

БУЛЕВА АЛГЕБРА

$\boxed{\text{КЛАСИЧЕСКА СИСТЕМА}}$

Такива статистически системи, в които *Events* е булева алгебра се наричат "класически (статистически) системи".

Ще отбележим в допълнение към аксиомите за решетка, че алтернативна базисна структура на логическите операции $\wedge$ и $\vee$ може да бъде частичната наредба, която те пораждат в множеството на събитията $\mathcal{E}vents$. Така, $\mathcal{E}vents$ е и частично наредено множество, в което всеки два елемента имат точна долна и точна горна граници.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$\left.\begin{aligned}
&P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R,\\
&P\wedge Q = Q\wedge P,\ P\vee Q = Q\vee P,\\
&P\vee(P\wedge Q) = P,\ P\wedge(P\vee Q) = P,\\
&P\wedge P = P,\ P\vee P = P,
\end{aligned}\right\}\text{ аксиоми на решетка}$$

алтернативно

Events е частично наредено множество спрямо $\preccurlyeq$, в което всеки два елемента P и Q имат точна долна граница $=: P\wedge Q$ и точна горна граница $=: P\vee Q$

$$\boxed{\left.\begin{aligned}
&P\wedge Q = P \Leftrightarrow P\preccurlyeq Q,\\
&P\vee Q = Q \Leftrightarrow P\preccurlyeq Q,
\end{aligned}\right\}\begin{gathered}\text{задават връзките}\\ \wedge \leftrightarrow \preccurlyeq \leftrightarrow \vee\end{gathered}}$$

(http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi23_yJ4Gmi891z/Gratzer.pdf
Sect. 1.10, Theorem 3, page 12)

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Това обаче са само част от аксиомите на квантовата логика.

I.1. Закони на квантовата логика $\xrightarrow{\text{сумарно}}$ Events е ортоорешетка

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

$$\left.\begin{array}{l} P\wedge(Q\wedge R) = (P\wedge Q)\wedge R,\ P\vee(Q\vee R) = (P\vee Q)\vee R, \\ P\wedge Q = Q\wedge P,\ P\vee Q = Q\vee P, \\ P\vee(P\wedge Q) = P,\ P\wedge(P\vee Q) = P, \\ P\wedge P = P,\ P\vee P = P, \end{array}\right\}\ \text{аксиоми на решетка}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\wedge\hat{0} = \hat{0},\ P\vee\hat{0} = P,\ P\wedge\hat{1} = P,\ P\vee\hat{1} = \hat{1}, \end{array}\right\}\ \text{единица } \hat{1} \text{ и нула } \hat{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} (P^\perp)^\perp = P, \\ P\vee P^\perp = \hat{1},\ P\wedge P^\perp = \hat{0}, \\ (P\wedge Q)^\perp = P^\perp\vee Q^\perp,\ (P\vee Q)^\perp = P^\perp\wedge Q^\perp, \end{array}\right\}\ \text{аксиоми на отрицанието } \perp$$

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

Events е орторешетка (ortholattice)

Накратко, както казахме, до тук имаме първо общо аксиоматично изискване, че $\mathscr{Events}$ е орторешетка.

Добавя се нов закон: за *ортомодуларност*

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или" и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че Events е ортоо решетка (ortholattice),

в която още се изпълнява т.нар. закон за ортомодуларност:

(OL) за всеки $P, Q \in$ Events, за които $P \preccurlyeq Q$ имаме

$$P \vee (Q \setminus P) = Q \;, \text{ където } Q \setminus P := Q \wedge P^{\perp}$$

(orthomodularity).

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"
и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че
Events е ортрешетка (ortholattice),

orthomodularity

в която още се изпълнява т.нар. закон за ортомодуларност:

(OL) за всеки $P, Q \in$ Events, за които $P \preccurlyeq Q$ имаме

$$P \vee (Q \setminus P) = Q \quad , \text{ където } \quad Q \setminus P := Q \wedge P^{\perp}$$

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или" и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че Events е орторешетка (ortholattice),

orthomodularity

в която още се изпълнява т.нар. закон за ортомодулярност:

(OL) за всеки $P, Q \in$ Events, за които $P \preccurlyeq Q$ имаме

$$P \vee (Q \setminus P) = Q, \quad \text{където} \quad Q \setminus P := Q \wedge P^{\perp}$$

(Забележка: такива орторешетки се наричат ортомодуларни решетки.)

Орторешетки, в които се изпълнява ортомодуларния закон се наричат "*ортомодуларни*."

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

В Events имаме бинарни операции "$\wedge$" = "и", "$\vee$" = "или"

и унарна операция "$\perp$" = "не", такива че

Events е ортомодуларна решетка

И така, разширена началната аксиома става: $\mathscr{Events}$ е ортомодуларна решетка.

Ето и заключителните три аксиоми на квантовата логика, които ние ще следваме основно в квантовата информатика.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

Аксиома за структурата на множеството на квантовите събития Events

Events е ортомодуларна решетка, в която се изпълняват още:

- закон за атомарност
- закон за покриването
- закон за крайност

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

Аксиома за структурата на множеството на квантовите събития Events

Events е ортомодуларна решетка, в която се изпълняват още:

- закон за атоматрност: за всяко $P \in$ Events, съществува $Q \in$ Events т.че: $\hat{0} \prec\!\!\cdot\, Q \prec\!\!\cdot\, P$ (Q се нарича елементарно съб.)
- закон за покриването
- закон за крайност

където $P \prec\!\!\cdot\, Q \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$.

Първият от тези закони, се базира на понятието за *покриване* (както са разписани).

Вторият заключителен закон е "*закона за покриването*".

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

Аксиома за структурата на множеството на квантовите събития Events

Events е ортомодуларна решетка, в която се изпълняват още:

- **закон за атоматрност:** за всяко $P \in Events$, съществува $Q \in Events$ т.че: $\hat{0} \lessdot Q \lessdot P$ (Q се нарича елементарно събд.)
- **закон за покриването:** ако $\hat{0} \lessdot Q$ и $P \wedge Q = 0$ тогава $P \lessdot P \vee Q$
- **закон за крайност**

където $P \lessdot Q \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} P \underset{\neq}{\preccurlyeq} Q$ и от $P \preccurlyeq R \preccurlyeq Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$.

И последният закон на квантова логика е закона за крайност. Чрез него се въвежда и понятието за *ниво на системата* N, като в последствие се доказва, че от досегашните аксиоми следва, че N е еднозначно определено число.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.1. Закони на квантовата логика

Аксиома за структурата на множеството на квантовите събития Events

Events е ортомодуларна решетка, в която се изпълняват още:

- **закон за атомарност:** за всяко $P \in \text{Events}$, съществува $Q \in \text{Events}$ т.че: $\hat{0} \lessdot Q \lessdot P$ (Q се нарича елементарно събитие)
- **закон за покриването:** ако $\hat{0} \lessdot Q$ и $P \wedge Q = 0$ тогава $P \lessdot P \vee Q$
- **закон за крайност:** $\hat{0} \lessdot P_1 \lessdot P_2 \lessdot \cdots \lessdot P_{N-1} \lessdot \hat{1}$, за някое N (ниво на системата)

където $P \lessdot Q \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} P \precneq Q$ и от $P \precneq R \precneq Q$ следва, че $P = R$ или $R = Q$.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.2. Квантова вероятност и състояния

До тук материалът беше преговорен и съдържаше законите на квантовата логика. Това е само част от първият аксиоматичен раздел обаче.

Продължаваме с нов материал, който ще завърши напълно този първи аксиоматичен раздел: това са законите за квантовата вероятност и базираното на това понятие за "*състояние*".

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

Всъщност, оставащата аксиома е само една и тя е, както е изписана. Но за нея е необходимо едно определение, а също и известно мотивационно обяснение.

Последната аксиома на квантовата статистика постулира, че в нашите статистически системи, които описваме, освен множество на събитията $\mathscr{Events}$ има и множество на **състоянията** $\mathscr{States}$.

I.2. Квантова вероятност и състояния

Аксиома за структурата на множеството на квантовите състояния States

$$\mathit{States} := \{\rho : \mathit{Events} \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } \mathit{Events}\}$$

В случая, състоянията, елементите на $\mathscr{States}$, могат да се третират като първично понятие за квантовата теория и с тази аксиома ние ги отъждествяваме с определени функции на събитията, наречени **вероятностни разпределения** или просто **вероятности** върху орторешетка.

На свой ред, понятието вероятност върху орторешетка се определя, както е изписано. Това е пряко обобщение на определението за вероятност от класическата теория.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.2. Квантова вероятност и състояния

Аксиома за структурата на множеството на квантовите състояния States

$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е } \underline{\text{вероятностно разпределение върху } Events}\}$$

където по определение

това е такава функция $\rho : Events \to [0,1]$, която изпълнява условията:

- **адитивност:** ако $P, Q \in Events$ и $P \preccurlyeq Q$, то $\rho(P) + \rho(Q \setminus P) = \rho(Q)$

  (където $Q \setminus P := Q \wedge P^{\perp}$)

- **нормираност:** $\rho(\hat{1}) = 1$

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.2. Квантова вероятност и състояния

Аксиома за структурата на множеството на квантовите състояния States

$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events\}$$

С това завършва първата част на аксиоматиката на квантовата теория. Тази част нарекохме "квантова статистика" и тя въвежда понятието "статистическа система".

Така, понятието "статистическа система" се базира на две множества:

- $\mathscr{Events}$ – на събитията,
- $\mathscr{Events}$ – на състоянията

и на определена "сдвояваща" ги функция – вероятност за настъпване на събитие в състояние.

Следва да се подчертае, че от структурна гледна точка, множеството на събитията $\mathscr{Events}$ е определящо. От него се конструира множеството на състоянията $\mathscr{States}$, съгласно последната аксиома.

Аксиоми на квантовата теория: I. Квантова статистика

I.2. Квантова вероятност и състояния

Аксиома за структурата на множеството на квантовите състояния States

$$States := \{ \rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events \}$$

Означаваме: $Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$

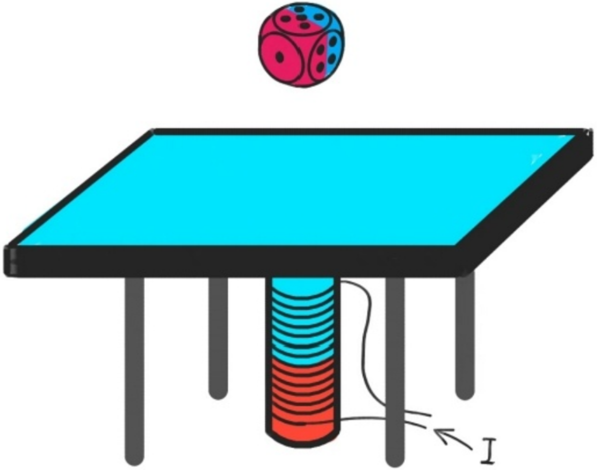
- вероятност за настъпване / установяване на събитие P в състояние ρ

Квантова статистика - основни следствия

Преди да преминем, към основните следствия на теорията на квантовата статистика, ще дадем една илюстрация, мотивираща понятието ни за състояние.

Ние си мислим за "статистическите системи" като за вероятностни пространства с променливи вероятности. Точно такива ще въведат и класическите статистически системи.

Илюстрираме това с примера на фигурата на "манипулируемо зарче". Зарчето е магнит (тайно) и се хвърля върху маса която се намагнетизира (също тайно) с помощта на електромагнит.



Магнитно зарче, чието вероятностно разпределение на паданията може да се манипулира от тока I намагнетизиращ масата

Квантова статистика - основни следствия

В резултат на намагнетизирането, според силата на тока през (тайния) електромагнит се променят вероятностите за отделните изходи от хвърлянето на зарчето. Именно тези вероятности са и нашето понятие за "състояние" в описваната статистическа система.

състояние ↓	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
вероятност $p_{(I=+3)}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{6}$
вероятност $p_{(I=+1)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
вероятност $p_{(I=0)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
вероятност $p_{(I=-1)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
вероятност $p_{(I=-3)}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{54}$

Примерни вероятностни разпределения за зарчето от предната фигура, в зависимост от силата на тока I

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$$\mathrm{States} := \{\rho : \mathrm{Events} \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } \mathrm{Events}\}$$

$\mathrm{Prob}(P \mid \rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

нека сега преминем към основните следствия на квантовата статистика, които произтичат от аксиомите.

Едно от главните следствия са понятията за смесване и чистота на сътояния.

Преди всичко, по конструкция, състоянията са определени функции върху $\mathscr{Events}$ и като такива, те са елементи на линейното пространство на всички функции $\mathscr{Events} \to \mathbb{R}$ (което се означава с $\mathbb{R}^{\mathscr{Events}}$ и е изобщо казано, безкрайно мерно, даже и за нашите крайни системи).

Първото главно твърдение е, че $\mathscr{States}$ е *изпъкнало множество* на реалното линейно пространство $\mathbb{R}^{\mathscr{Events}}$.

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$$\mathit{States} := \{\rho : \mathit{Events} \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } \mathit{Events}\}$$

$$\mathrm{Prob}(P|\rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$$ - вероятност за настъпване на P в ρ

Твърдение: States е изпъкнало подмножество на линейното пространство

$$\mathbb{R}^{\mathit{States}} := \{\lambda \mid \lambda : \mathit{Events} \to \mathbb{R}\}$$

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$\text{States} := \{\rho : \text{Events} \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху Events$\}$

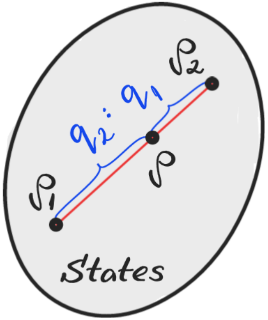
$\text{Prob}(P|\rho) := \text{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

Твърдение States е изпъкнало подмножество на линейното пространство

$$\mathbb{R}^{\text{States}} := \{\lambda \mid \lambda : \text{Events} \to \mathbb{R}\}$$

т.е., за всеки $\rho_1, \rho_2 \in \text{States}$ и $q_1, q_2 \in [0,1]$,

т.че $q_1 + q_2 = 1$ имаме $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \in \text{States}$



Припомняме понятието за изпъкнало множество в реално линейно пространство: това е такова множество, което заедно с всеки две свои точки ρ_1, ρ_2 съдържа и отсечката която ги свързва.

На свой ред, точките ρ от свързващата отсечка са тези, които се представят чрез т.нар. *изпъкнали комбинации* $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$, както е показано. В частност, изпъкналите комбинации са специални линейни комбинации. В случая, линейните комбинации на функции, по определение, това са линейните комбинации от стойностите им $\rho(P) = q_1\rho_1(P) + q_2\rho_2(P)$ при всевъзможните аргументи $P \in \mathscr{Events}$.

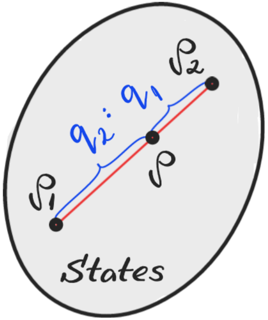
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$\mathit{States} := \{\rho : \mathit{Events} \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $\mathit{Events}\}$

$\mathrm{Prob}(P|\rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

Твърдение States е изпъкнало подмножество на линейното пространство



$\mathbb{R}^{\mathit{States}} := \{\lambda \mid \lambda : \mathit{Events} \to \mathbb{R}\}$

т.е., за всеки $\rho_1, \rho_2 \in \mathit{States}$ и $q_1, q_2 \in [0,1]$,

т.че $q_1 + q_2 = 1$ имаме $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \in \mathit{States}$

$\rho(P) = q_1\rho_1(P) + q_2\rho_2(P)$ изпъкнала комбинация

Връщайки се към вероятностната интерпретация на състоянията, последната формула придобива вид на едно от главните понятия от теория на вероятностите: **вероятностна смес**.

И така, геометричното понятие за "изпъкнала комбинация" се превежда на вероятностен език като "вероятностна смес".

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$$\mathit{States} := \{\rho : \mathit{Events} \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } \mathit{Events}\}$$

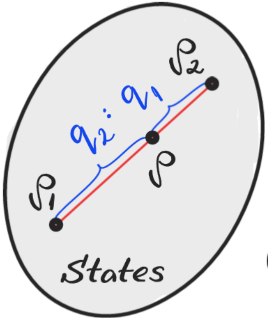
$$\mathrm{Prob}(P \mid \rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P) \text{ - вероятност за настъпване на } P \text{ в } \rho$$

Твърдение States е изпъкнало подмножество на линейното пространство

$$\mathbb{R}^{\mathit{States}} := \{\lambda \mid \lambda : \mathit{Events} \to \mathbb{R}\}$$

т.е., за всеки $\rho_1, \rho_2 \in \mathit{States}$ и $q_1, q_2 \in [0,1]$,

т.че $q_1 + q_2 = 1$ имаме $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \in \mathit{States}$



$$\mathrm{Prob}_\rho(P) = q_1 \mathrm{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2 \mathrm{Prob}_{\rho_2}(P)$$

вероятн. смес

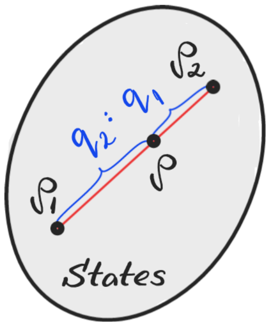
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$\mathcal{S}tates := \{ \rho : \mathcal{E}vents \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $\mathcal{E}vents \}$

$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес



С това установихме важно структурно понятие в множеството на състоянията $\mathcal{S}tates$: смесването на състояния. Състоянията, които получаваме при **нетривиално смесване**, т.е., такова че $q_1, q_2 \neq 0, 1$, се наричат **смесени**.

Операцията смесване изразява нашата несигурност, неувереност и неточност, както в приготвянето на системата, така и в измерването. Това е източник на вероятност и при описанието на класическите статистически системи, които имаме във физиката.

За вероятностното смесване може да си мислим така: в две лаборатории се провежда един и същи експеримент (измерват се вероятностите на $\text{Prob}_{\rho_1}(P)$ и $\text{Prob}_{\rho_2}(P)$ на еднакви събития за еднакви системи, но в различни състояния). Ние обаче преди всяко провеждане на опита хвърляме жребий с вероятности q_1 и q_2, коя лаборатория да ползваме съответно. Предполагаме, както се изисква в статистическите изследвания, че всяко поредно повтаряне на опита, заедно с хвърлянето на жребия са независимо. Тогава, крайната вероятност за установяване на събитието P ще бъде именно $\text{Prob}_\rho(P) = q_1\text{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2\text{Prob}_{\rho_2}(P)$. Тоест, тази процедура ще определи смесеното състояние $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$.

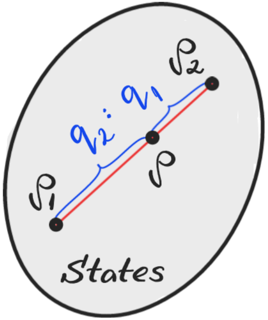
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $Events\}$

$\text{Prob}(P|\rho) := \text{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$\text{Prob}_\rho(P) = q_1\text{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2\text{Prob}_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес



И така, вероятностното смесване е основния източник на вероятности в класическата статистика. А дали е така в квантовата? За да изясним това въвеждаме обратния процес – на "изчистване" – и неговия предел: **чисти състояния**.

По определение, чистите състояния са такива, които не могат да се получат като резултат от нетривиална смес.

Геометричното понятие, което съответства на чисто състояние е понятието **екстремална точка в изпъкнало множество**. Това е точка, която не може да е вътрешна точка за нетривиална отсечка от това множество.

На началната елипсовидна илюстрация на изпъкнало множество, екстремалните точки съставят цялата му граница (ако е затворено).

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

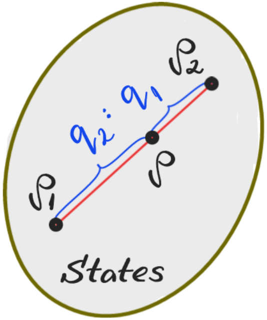
$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events\}$$

$$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P) \text{ - вероятност за настъпване на } P \text{ в } \rho$$

$$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P) \text{ - вероятностна смес}$$

$$PureStates := \{\rho \in States \mid \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \text{ - смес}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 0 \ (q_2 = 1, \rho = \rho_2) \text{ или} \\ q_1 = 1 \ (q_2 = 0, \rho = \rho_1) \end{cases} \}$$



Но дали при всяко затворено изпъкнало множество всички точки от границата му са екстремални? Например, да разгледаме триъгълника в равнината?

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

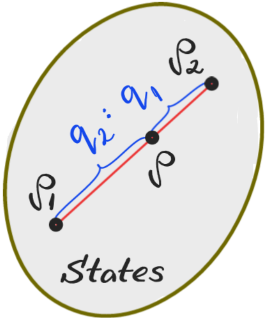
$\mathcal{S}tates := \{ \rho : \mathcal{E}vents \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $\mathcal{E}vents \}$

$\mathrm{Prob}(P|\rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$\mathrm{Prob}_\rho(P) = q_1 \mathrm{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2 \mathrm{Prob}_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес

$\mathrm{Pure}\mathcal{S}tates := \{ \rho \in \mathcal{S}tates \mid \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - смес

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 0 \ (q_2 = 1, \rho = \rho_2) \text{ или} \\ q_1 = 1 \ (q_2 = 0, \rho = \rho_1) \end{cases} \}$$



Отговорът е *не*! Екстремалните точки на триъгълника са само върховете му.

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

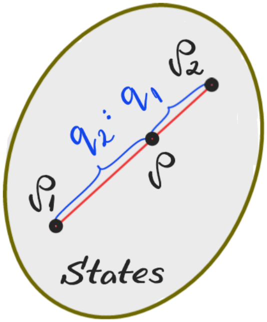
$\mathit{States} := \{\rho : \mathit{Events} \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $\mathit{Events}\}$

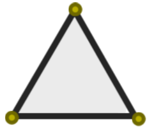
$\mathrm{Prob}(P \mid \rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$\mathrm{Prob}_\rho(P) = q_1 \mathrm{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2 \mathrm{Prob}_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес

$\mathit{PureStates} := \{\rho \in \mathit{States} \mid \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - смес

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 0 \ (q_2 = 1, \rho = \rho_2) \text{ или} \\ q_1 = 1 \ (q_2 = 0, \rho = \rho_1) \end{cases} \}$$





Квантова статистика - основни следствия

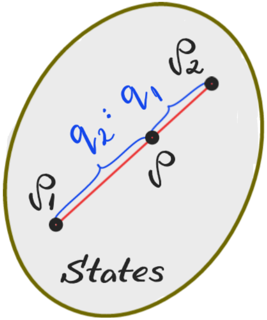
Смесване и чистота на състояния

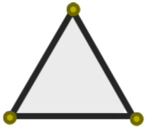
$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events\}$$

$$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P) \text{ - вероятност за настъпване на } P \text{ в } \rho$$

$$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P) \text{ - вероятностна смес}$$

$$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \text{ - нетривиална смес}\}$$





Понятието за чисто състояние е фундаментално за теорията на състоянията, понеже се оказва, че всяко състояние може да се сведе до смес от чисти!

Това е съдържанието на известната теорема на Крейн–Милман, чието прилагане тук не е тривиално, тъй като, както споменахме, даже и за крайни статистически системи, каквито разглеждаме в квантовата информатика, $\mathscr{States}$ е изпъкнало множество в безкрайно мерно линейно пространство, в общия случай.

Квантова статистика - основни следствия

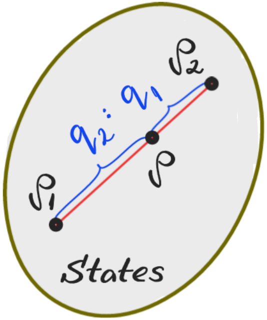
Смесване и чистота на състояния

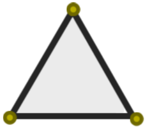
$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events\}$$

$$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P)$$ - вероятностна смес

$$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \text{ - нетривиална смес}\}$$





Теорема (Крейн-Милман)

States е изпъкналата обвивка (convex hull) на PureStates

И така, всяко състояние е смес от чисти.

Квантова статистика - основни следствия

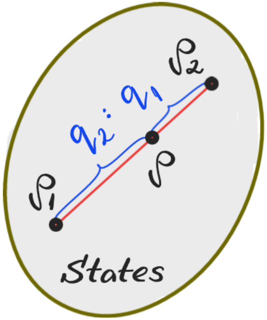
Смесване и чистота на състояния

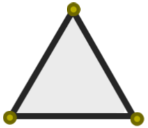
$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events\}$$

$$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P) \text{ - вероятност за настъпване на } P \text{ в } \rho$$

$$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P) \text{ - вероятностна смес}$$

$$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \text{ - нетривиална смес}\}$$





Теорема (Крейн-Милман)

Всяко състояние е смес от чисти състояния

Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$States := \{\rho : Events \longrightarrow [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $Events\}$

$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес

$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - нетривиална смес $\}$

Класическа система - пример: $Events = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

Да видим как изглежда тази картина в класическите системи. Припомняме, че за тях $\mathscr{Events}$ е булева алгебра и тя винаги може да се представи във вида на степенно множество.

Например, да вземем $\mathscr{Events} := \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

В този случай, вероятностно разпределение върху $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ (в смисъл на орторешетки) е еквивалентно на вероятностно разпределение върху множеството $\{1,2,3\}$, така както го имаме в обичайната теория на вероятностите.

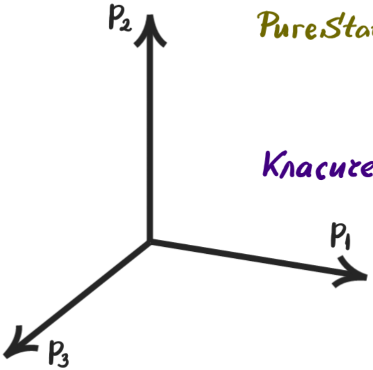
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$States := \{\rho : Events \longrightarrow [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $Events\}$

$Prob(P \mid \rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес



$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - нетривиална смес $\}$

Класическа система - пример: $Events = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

$States \ni \rho \quad \downarrow \downarrow \downarrow$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

Така, състояние над тази класическа система се определя от вектор (p_1, p_2, p_3) от $\mathbb{R}^3$, който лежи върху така наречения *симплекс*, който в случая е триъгълник.

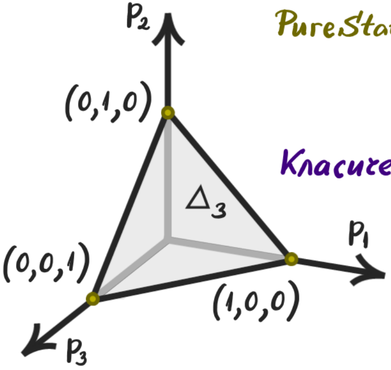
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$\mathrm{States} := \{\rho : \mathrm{Events} \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $\mathrm{Events}\}$

$\mathrm{Prob}(P|\rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$\mathrm{Prob}_\rho(P) = q_1 \mathrm{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2 \mathrm{Prob}_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес



$\mathrm{PureStates} := \{\rho \in \mathrm{States} \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - нетривиална смес$\}$

Класическа система - пример: $\mathrm{Events} = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

симплекс $\Delta_3 \Longleftarrow \mathrm{States} \ni \rho \quad \downarrow \downarrow \downarrow$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Чистите състояния са три – върховете на този триъгълник: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Правим важно наблюдение: при класическите системи чистите състояния са и **детерминистични**, т.е., всички вероятности са 0 или 1. Освен това, в този случай чистите състояния са в 1–1 съответствие с елементарните събития на системата: синглетоните $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Последното ще видим, че ще се запази и за квантовите системи (1–1 съответствието с елементарните събития). Първото обаче, детерминираността на чистите състояния си остава характеристична черта за класическите системи.

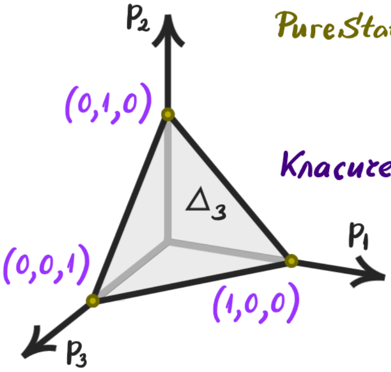
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$\mathcal{S}tates := \{\rho : \mathcal{E}vents \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $\mathcal{E}vents\}$

$\mathrm{Prob}(P|\rho) := \mathrm{Prob}_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$\mathrm{Prob}_\rho(P) = q_1 \mathrm{Prob}_{\rho_1}(P) + q_2 \mathrm{Prob}_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес



$\mathcal{P}ure\mathcal{S}tates := \{\rho \in \mathcal{S}tates \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - нетривиална смес $\}$

Класическа система - пример: $\mathcal{E}vents = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

симплекс $\Delta_3 \Longleftarrow \mathcal{S}tates \ni \rho \quad \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$P_1 + P_2 + P_3 = 1$

$\mathcal{P}ure\mathcal{S}tates = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ - върховете

Квантова статистика – основни следствия

Така, вероятностния характер на квантовите системи се явява математическо следствие от нашите аксиоми и е пряко причинено от недистрибутивността на орторешетката на събитията $\mathscr{Events}$.

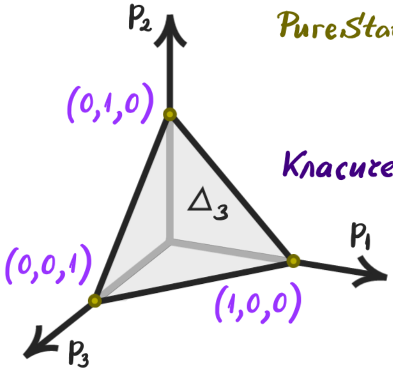
Смесване и чистота на състояния

$$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho \text{ е вероятностно разпределение върху } Events\}$$

$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$ – вероятност за настъпване на P в ρ

$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P)$ – вероятностна смес

$$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2 \text{ – нетривиална смес}\}$$



Класическа система – пример: $Events = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

симплекс $\Delta_3 \Leftarrow States \ni \rho \ \downarrow\downarrow\downarrow \ p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$PureStates = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ – върховете

Още по-прост е случая на класическата система "бит": $\mathscr{E}vents = \mathcal{P}(\{1,2\})$ имаща две елементарни събития $\{1\}$ и $\{2\}$. Тук $\mathscr{S}tates$ е просто отсечка, а двата й края са чистите състояния (детерминистични и съответстващи на елементарните събития $\{1\}$ и $\{2\}$).

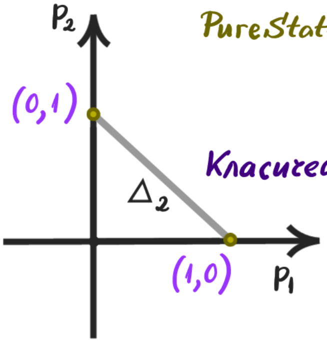
Квантова статистика - основни следствия

Смесване и чистота на състояния

$States := \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho$ е вероятностно разпределение върху $Events\}$

$Prob(P|\rho) := Prob_\rho(P) := \rho(P)$ - вероятност за настъпване на P в ρ

$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P)$ - вероятностна смес



$PureStates := \{\rho \in States \mid \nexists\ \rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ - нетривиална смес$\}$

Класическа система - пример: $Events = \mathcal{P}(\{1,2\})$

симплекс $\Delta_2 \Leftarrow States \ni \rho \quad \downarrow \downarrow$

$p_1 + p_2 = 1$

$PureStates = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ - върховете