В класич. сист. Events $= P(\Omega)$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

$A : \Omega \to \mathbb{R}$

Събитие $\quad \chi^* = \chi = \chi^2$

$\iff \chi \in \{0, 1\}$

$$A = \alpha_1 \chi_1 + \dots + \alpha_n \chi_n \big\lfloor (\omega)$$

$S_1, S_2 \subseteq \Omega$

$$\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1 \cap S_2}$$

$$\chi_{S_1} \chi_{S_2}$$

В общ. квант. логика

ако $P \mathrel{C} Q$

$$P \wedge Q = PQ = QP$$

$$P \vee Q = P + Q - PQ$$

В частн. P, Q – дизюнкт.

$$\underset{\underline{\text{Thm}}}{\iff} \quad PQ = QP = 0$$

$$PQ = 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} \underbrace{Q^* P^*}_{= QP} = 0^*$$

Друго НДУ за дизюнкт.

$$\boxed{Q_1 + \dots + Q_n \text{ е проектор}}$$

$$A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n$$

$$A^2 = \alpha_1^2 Q_1 + \alpha_2^2 Q_2 + \dots + \alpha_n^2 Q_n$$

Средни стойности на наблюдения

$$\mathrm{Prob}_\rho(Q) = \rho(Q)$$

$$= \langle Q \rangle_\rho$$

– средна стойност

$$\frac{\overset{\#}{1+1+0+1+1+1+0+0+0}}{9} \xrightarrow[\# \to \infty]{} \text{вероятност}$$

A – наблюдение $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – спектър

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \cdots a_k \cdots$$

$$a_1, \ \frac{a_1+a_2}{2}, \ \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \ \dots,$$

$$\frac{a_1+\dots+a_k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle A \rangle$$

"центр. гр. теорема"

$$\langle A \rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_k}{k} =$$

$$= \alpha_1 \lim_{k\to\infty} \frac{\dots+1+\dots+0+\dots}{k}$$

$+\alpha_2 \lim_{k\to\infty}$ аналогично

$+ \dots + \alpha_n \lim_{k\to\infty}$ аналогично

$= \alpha_1 \mathrm{Prob}(A=\alpha_1)$ спектр. събития

$$+\alpha_2 \mathrm{Prob}(A=\alpha_2) + \dots +$$

$$+\alpha_n \mathrm{Prob}(A=\alpha_n)$$

$$\langle A \rangle_\rho = \alpha_1 \mathrm{Prob}_\rho(Q_1) + \dots +$$

$$+\alpha_n \mathrm{Prob}_\rho(Q_n)$$

"обобщение"

$$\mathrm{Prob}_\rho(Q) = \mathrm{Tr}(\hat\rho\, Q)$$

(линейност

$$\Rightarrow \langle A \rangle_\rho = \mathrm{Tr}(\alpha_1 \hat\rho\, Q_1)$$

$$+ \dots + \mathrm{Tr}(\alpha_n \hat\rho\, Q_n) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\hat\rho\,(\alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n)\right)$$

$$\boxed{\langle A\rangle_\rho = \mathrm{Tr}(\hat\rho A)}$$

— лин. функционал върху матрици

1930 | 1932 | 1936

Матрицата на плътността като наблюдение

Състояние ρ: Events $\to [0,1]$ $\Longleftrightarrow$ Матр. $\hat\rho$

„вероятност"

св-ва $\to$

$\to$ св-ва:

1) $\hat\rho = \hat\rho^*$ т.е. „набл."
2) $\hat\rho$ е полож. деф. (неотриц. деф.)
3) $\mathrm{Tr}\,\hat\rho = 1$

1) $\Longleftrightarrow$ спектр. теорема

$$\hat\rho = p_1 S_1 + p_2 S_2 + \dots + p_m S_m$$

2) $\underset{\text{лин. алг.}}{\Longleftrightarrow}$ $p_1, p_2, \dots, p_m \ge 0$

3) $1 = \mathrm{Tr}\,\hat\rho = p_1 + \dots + p_m$

в частност $p_j \in [0,1]$

Класически (комутат.)

$$\langle A\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\big((p_1S_1+\dots+p_mS_m)\cdot(\alpha_1Q_1+\dots+\alpha_nQ_n)\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_j p_k\, \mathrm{Tr}(\underbrace{\underbrace{S_kQ_j}_{Q_jS_k}}_{Q_j\wedge S_k})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_j p_k\, \underbrace{\mathrm{Tr}(Q_j\wedge S_k)}_{\text{„кардиналност"}}$$

Коментар за следата:

$$\mathrm{Tr}\,A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

ако $A = A^*$, то се диагонализира в о.н.б.

$$A \mapsto UAU^{-1} = \text{diagonal}$$

$$\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,UAU^{-1} = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N\end{pmatrix}$$

= сума от собств. ст-ст. (с кратности)