Квантовият бит (q-бит) "от а до я"

1. Наблюдаеми - общ вид

Наблюдаема на q-бит - това е $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$ за

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$ (при наложените връзки от $A = A^*$)

Налагаме $A = A^*$: това е $\Longleftrightarrow$ $a_{11} = \overline{a_{11}}$, $a_{22} = \overline{a_{22}}$ - две реални числа

$a_{21} = \overline{a_{12}}$ - едно комплексно

Така, общият вид на наблюдаема на q-бит е $A = \begin{pmatrix} a & x-iy \\ x+iy & b \end{pmatrix}$, определен от четири произволни реални числа: a, b, x, y

Еквивалентно: $\left| \begin{array}{l} a := r+z \\ b := r-z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} r := \frac{1}{2}(a+b) \\ z := \frac{1}{2}(a-b) \end{array} \right\}$, където r и z са отново реални и произволни.

Така: $A = \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$ за $(x, y, z, r) \in \mathbb{R}^4$

Оказва се удобно да предефинираме $x \mapsto \frac{x}{2}$, $y \mapsto \frac{y}{2}$, $z \mapsto \frac{z}{2}$, $r \mapsto \frac{r}{2}$

$\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$ е общия вид на наблюдаема на q-бит, определен от четири произволни реални числа $(x, y, z, r) \in \mathbb{R}^4$

Тогава $\operatorname{tr} A = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(r+z+r-z) = r$

$$\det A = \frac{1}{4}\left((r+z)(r-z) - (x+iy)(x-iy)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right)$$

2. Спектър

$$\det\left(A-\lambda\hat{1}\right)=0 \iff \cancel{\tfrac{1}{4}}\det\begin{pmatrix} r+z-2\lambda & x-iy \\ x+iy & r-z-2\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$\iff (r-2\lambda)^2-(x^2+y^2+z^2)=0$$

$$\iff \lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(r\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

3. Събитие: $Q^*=Q=Q^2$ - общ вид?

според точка 1 $\rightarrow$ $\Updownarrow$

$$Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z\end{pmatrix}$$ остава да се наложи

Има два пътя

а) Директно налагаме $\cancel{\tfrac{1}{2}}^{\,2}\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z\end{pmatrix}=\cancel{\tfrac{1}{4}}\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z\end{pmatrix}^2$

$$\Updownarrow$$

$2(r+z)=(r+z)^2+(x+iy)(x-iy)$, $2(x-iy)=(r+z)(x-iy)+(x-iy)(r-z)$,
$2(x+iy)=(x+iy)(r+z)+(r-z)(x+iy)$, $2(r-z)=(x-iy)(x+iy)+(r-z)^2$

$$\Updownarrow$$

$2r+2z-r^2-2rz=x^2+y^2+z^2$, $(x-iy)(r-1)=0$
$(x+iy)(r-1)=0$ $\pm$, $2r-2z-r^2+2rz=x^2+y^2+z^2$

$$\Updownarrow$$

$(x+iy)(r-1)=0$, $x^2+y^2+z^2=r(2-r)$
$(x-iy)(r-1)=0$, $z(r-1)=0$

случай 1: $(x,y,z)\neq(0,0,0)$: $r-1=0$
случай 2: $(x,y,z)=(0,0,0)$: $r(2-r)=0$

Окончателно

случай 1: $r = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = r(2-r) = 1$: $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$

случай 2:
- $r = 0 = x = y = z$: $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $r = 2,\ x = y = z = 0$: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Тези случаи могат да се презапишат и така:

$(\hat{1})$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}$ – единичното събитие

(e) $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$ за произволни $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, за които $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

това са елементарните събития

$(\hat{0})$ $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$ – нулевото събитие

<u>Забележете</u>: понеже системата е от ниво 2 („бит"), то $\hat{1}$ е от ниво 2, $\hat{0}$ е от ниво 0 и всички останали събития Q са от ниво 1 – т.е., те са елементарни събития.

б) Друг начин за определяне на общия вид на събитие на q-бит, който води по-бързо до горния резултат, е през спектралната теорема, според която самоспрегнатата матрица $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix}$ $(= Q^*)$ ще бъде събитие

$\Longleftrightarrow$ собствените стойности $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ на Q са 0 или 1.

определени в точка 1

Имаме следните случаи:

$(\hat{1})$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогава $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}$

$(\hat{0})$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогава $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$

(e) $0 = \lambda_1 < \lambda_2 = 1$. Тогава

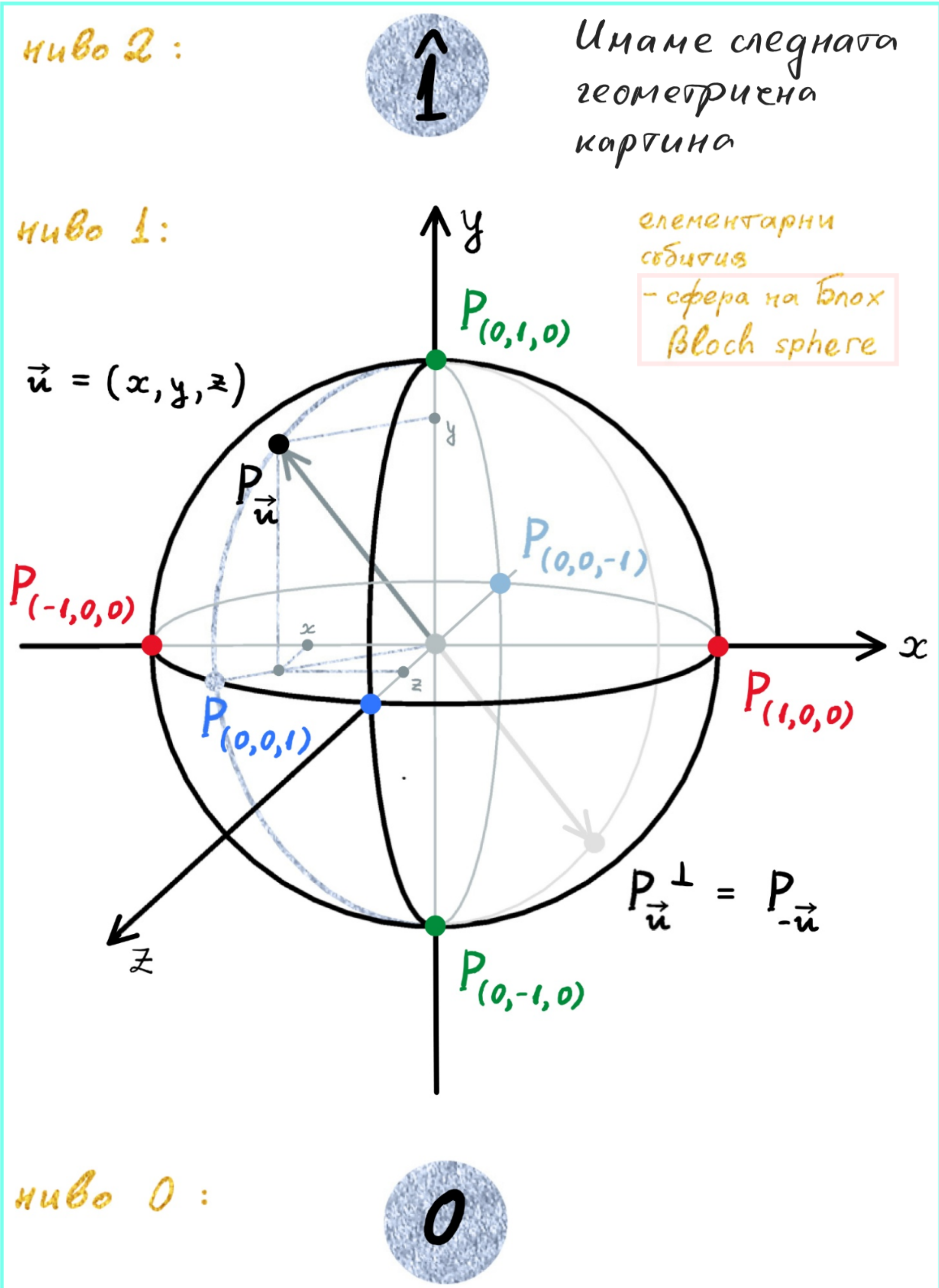
$$r - \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$$
$$r + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$$

т.е., $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$ за $x^2+y^2+z^2=1$

да го означим

$P_{\vec{u}} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$

за $\vec{u} = (x,y,z)$ - вектор върху единичната сфера S^2 в $\mathbb{R}^3$



Забележете: отрицанието на $P_{\vec{u}}$ е $P_{\vec{u}}^{\perp} = \hat{1} - P_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-z & x+iy \\ x-iy & 1+z \end{pmatrix}$$

Тоест: $P_{\vec{u}}^{\perp} = P_{-\vec{u}}$ – събитието, съответстващо на диаметрално противоположната точка от сферата на Блох

Така, всяка двойка диаметрално противоположни точки от сферата на Блох отговарят на един максимален експеримент за q-бит. Всички те са несъвместими два по два. На максималните експерименти отговарят ортонормирани базиси в $\mathbb{C}^2$, някои от които ще построим по-долу.

4. Съответствие между самоспрегнати матрици от ранг 1 и вектори в $\mathbb{C}^N$.

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ е $N \times N$ комплексна матрица. От линейната алгебра е известно, че A има ранг 1 $\Longleftrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} (\phi_1, \dots, \phi_N) = \begin{pmatrix} \psi_1\phi_1 & \cdots & \psi_1\phi_N \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_N\phi_1 & \cdots & \psi_N\phi_N \end{pmatrix}$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ и $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$ от $\mathbb{C}^N$.

<u>Теорема 1</u> Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} = A^*$ е самоспрегната. Тогава

A има ранг 1 $\Longleftrightarrow$ $A = \pm \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_N}) = \pm \Psi \Psi^* \; \left(= \pm |\Psi\rangle\langle\Psi| \text{ – в бра-кет означения} \right)$

за $\Psi \in \mathbb{C}^N$

<u>Доказателство</u> Изхождаме от началното наблюдение

$$A \text{ има ранг } 1 \Longleftrightarrow A = \Psi \Phi^* \text{ – за } \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^N$$

Освен това: $(\Psi\Phi^*)^* = \Phi\Psi^*$

Тогава $\Leftarrow$) Ако $A = \Psi\Psi^*$, то $A = A^*$ и A има ранг 1.

$\Rightarrow$) Нека $A = A^*$ и A има ранг 1 ($\Rightarrow A = \Psi_1\Phi_1^*$, за $\Psi_1, \Phi_1 \in \mathbb{C}^N$).

Тогава $\Psi_1\Phi_1^* = \Phi_1\Psi_1^* \;\big|\cdot\Psi_1$. $\Rightarrow \Psi_1 \underbrace{(\Phi_1^*\Psi_1)}_{\langle\Phi_1|\Psi_1\rangle} = \Phi_1 \underbrace{(\Psi_1^*\Psi_1)}_{\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = \|\Psi_1\|^2 \neq 0}$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \underbrace{\frac{\langle\Phi_1|\Psi_1\rangle}{\|\Psi_1\|^2}}_{:=\,\bar{z}} \Psi_1 = \bar{z}\,\Psi_1 \text{ за } z \in \mathbb{C}.$$

Заместване: $A = \Psi_1\Phi_1^* = z\Psi_1\Psi_1^*$.

Налагане пак $A = A^*$, т.е. $z\Psi_1\Psi_1^* = \bar{z}\Psi_1\Psi_1^*$ $\Rightarrow$ $z = \bar{z}$, т.е., $z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z = \pm\lambda^2$ за $\lambda \in \mathbb{R}$ и полагайки $\Psi = \lambda\Psi_1$ получаваме:

$$A = \pm\Psi\Psi^*. \qquad \square$$

<u>Следствие 2.</u> Ака A е самоспрегнатата матрица от ранг 1, то се случва точно една от следните три алтернативи

(+) $A = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за ненулев $\Psi \in \mathbb{C}^N$;
в този случай A е ненулева и положително-дефинитна.

(0) $A = \hat{0}$.

(−) $A = -|\Psi\rangle\langle\Psi|$ за ненулев $\Psi \in \mathbb{C}^N$;
в този случай A е ненулева и отрицателно-дефинитна.

5. Вектори на елементарните събития за q-бит

От миналите лекции знаем, че

Q е елементарно събитие $\Longleftrightarrow$ $Q = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^N$

определен с точност до $\Psi \mapsto e^{i\varphi}\Psi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$.

В случая на q-бит $(N=2)$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \text{ за } x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ и } \det Q = 1, \ \operatorname{tr} Q = 1,$$

което означава, че Q има ранг 1 и по Следствие 2 за Q се реализира алтернативата $(+)$.

Така: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = |\Psi_{(x,y,z)}\rangle\langle\Psi_{(x,y,z)}|$ за единичен вектор

$$\Psi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y,z) \\ \psi_2(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \text{ параметризиран с } \vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{S}^2$$

и определен с точност до колинеарност.

<u>Примери</u> за $Q \left(= P_{(x,y,z)}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = |\Psi_{(x,y,z)}\rangle\langle\Psi_{(x,y,z)}|$

(z) $(x,y,z) = (0,0,\pm 1)$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,0)$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{(0,0,-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,1)$$

$P_{(0,0,1)} + P_{(0,0,-1)} = \hat{1}$ е разбиване на единицата, на което отговаря стандартния ортонормиран базис $e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ на $\mathbb{C}^2$

ВАЖНО: Стандартните базиси вече ще се номерират от 0 и ще означаваме $|e_0\rangle =: |0\rangle$ и $|e_1\rangle =: |1\rangle$

вътре стои информация за базисен вектор

Това са нови, различни бра-кет означения, които ще наричаме "бра-кет означения от втори вид"

Така, при бра-кет означенията от втория вид "$|0\rangle$" и "$|1\rangle$" са цялостни символи, които не се разбиват на части и които винаги се отнасят до ортонормиран базис.

След малко ще въведем такива означения и за други ортонормирани базиси:

$$|\rightarrow\rangle \quad \text{и} \quad |\leftarrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle \quad \text{и} \quad |\downarrow\rangle$$

Продължаваме с примерите:

(x) $(x,y,z) = (\pm 1, 0, 0)$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(-1,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$P_{(1,0,0)} + P_{(-1,0,0)} = \hat{1}$ е разбиване на единицата, на което отговаря друг ортонормиран базис на $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =: |f_0\rangle =: |\rightarrow\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =: |f_0\rangle =: |\leftarrow\rangle$$

последните са в бра-кет означения от втория вид

(y) $(x,y,z) = (0, \pm 1, 0)$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{(0,-1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

$P_{(0,1,0)} + P_{(0,-1,0)} = \hat{1}$ е разбиване на единицата, на което отговаря друг ортонормиран базис на $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =: |g_0\rangle =: |\uparrow\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =: |g_1\rangle =: |\downarrow\rangle$$

последните са в бра-кет означения от втория вид

Интересна забележка (извън курса)

Построените в горните примери три ортонормирани базиса на $\mathbb{C}^2$ се наричат "взаимно безпристрастни" / "mutually unbiased"

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Mutually_unbiased_bases

Те имат свойството, че всяко елементарно събитие, което идва от единия базис е равно вероятно спрямо другия базис.

Математически това означава, че всяка ос на единия базис сключва равни ъгли с осите на другия базис.

6. Състояния на q-бит

Според аксиомите: състояние – това е линеен функционал

$$\rho(A) = \rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(= \rho(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \text{ – линейна функция на 4 комплексни аргумента}\right)$$

такъв, че $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A$ ("положителност")

$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ ("нормираност")

Проблем: да се опише множеството на всички състояния като изпъкнало множество и да се опишат чистите състояния, които са екстремалните точки на това изпъкнало множество.

а) Най-напред: да опишем линейните функционали

$$\rho(A) = \rho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =: \rho_{11}a_{11} + \rho_{21}a_{12} + \rho_{12}a_{21} + \rho_{22}a_{22}$$

– определя се от 4 комплексни коефициента, които организираме като матрица

$$\hat{\rho} := \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$ – нарича се "матрица на плътността на състоянието"

Тогава: $\rho(A) = \rho_{11}a_{11} + \rho_{21}a_{12} + \rho_{12}a_{21} + \rho_{22}a_{22} = \underbrace{tr}_{\text{следа}}(\hat{\rho}A)$

Наистина:

$$tr\left(\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}\rho_{11}a_{11}+\rho_{12}a_{21} & \rho_{11}a_{12}+\rho_{12}a_{22}\\ \rho_{21}a_{11}+\rho_{22}a_{21} & \rho_{21}a_{12}+\rho_{22}a_{22}\end{pmatrix}$$

$$= \rho_{11}a_{11}+\rho_{12}a_{21}+\rho_{21}a_{12}+\rho_{22}a_{22}$$

б) И така, състоянията се характеризират еднозначно от матрици. За q-бит, това са отново 2×2 комплексни матрици.

За да определим обаче, кои матрици задават състояния и как се изразява операцията на смесване на състояния, чрез съответните им матрици ще приложим следните теореми.

Те са валидни не само за q-бит, но и за общи системи.

Теорема 3. Една квадратна матрица A е матрица на плътността $\hat{\rho} = A$ на състояние ρ $\Leftrightarrow$ A е положително дефинитна матрица такава, че $\operatorname{tr} A = 1$.

Напомняне от линейната алгебра, че

A е положително дефинитна матрица

$\Leftrightarrow$ A е самоспрегната матрица, която има неотрицателни собствени стойности

Теорема 4 Нека ρ, ρ_1, ρ_2 - състояния, а $\hat{\rho}, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ са съответстващите им матрици на плътността. Тогава

$\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ е смес $\Leftrightarrow$ $\hat{\rho} = q_1\hat{\rho}_1 + q_2\hat{\rho}_2$ - равенство на матрици

(Напомняне: $q_1, q_2 \in [0,1]$, $q_1 + q_2 = 1$ са теглата на сместа.)

Доказателствата ще дадем в точка 7.

Започваме с прилагането на Теорема 3 за $\hat{\rho} = \begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix}$ - матрица на плътността на състояние на q-бит

$\hat{\rho}$ е самоспрегната. Според точка 1:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r+z & x-iy \\ x+iy & r-z \end{pmatrix},$$ където $x, y, z, r \in \mathbb{R}$ и собствените ѝ стойности

са $0 \leqslant \frac{1}{2}\left(r - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

заради положителната дефинитност на $\hat{\rho}$

а следата е $1 = tr\,\hat{\rho} = r$

Извод: матриците на плътността на състоянията на q-бит са от вида:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$ за $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ така, че

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1.$$

в) Описание на операцията смесване.

До тук: съпоставихме на състоянията на q-бит в 1-1 съответствие, точките на затвореното единично кълбо в $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$$

Нека $\hat{\rho}_{(x,y,z)} = q_1 \hat{\rho}_{(x_1,y_1,z_1)} + q_2 \hat{\rho}_{(x_2,y_2,z_2)}$ – смес. Тогава:

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = q_1 \cancel{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} + q_2 \cancel{\tfrac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

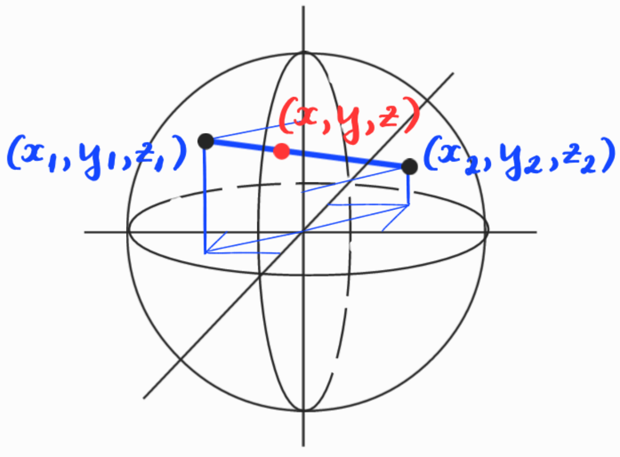
$$\boxed{q_1 + q_2 = 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1+q_2 + q_1 z_1 + q_2 z_2 & q_1 x_1 + q_2 x_2 + i(q_1 y_1 + q_2 y_2) \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 + i(q_1 y_1 + q_2 y_2) & q_1+q_2 - q_1 z_1 - q_2 z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x,y,z) = q_1 (x_1,y_1,z_1) + q_2 (x_2,y_2,z_2)$$



Извод: (1) Затвореното единично кълбо в $\mathbb{R}^3$ моделерира множеството на всички състояния на q-бит като изпъкнало множество.

(2) Чистите състояния, които са точно екстремалните точки на това изпъкнало множество съставляват границата – това е единичната сфера S^2.

(3) Така, чистите състояния и елементарните събития на q-бит имат еднозначно описание – те се определят от едни и същи матрици, които съответстват на точки от S^2.

елементарно събитие $Q = P_{(x,y,z)} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}}_{|\Psi\rangle\langle\Psi|} = \hat{\rho}_{(x,y,z)}$ – чисто състояние (матрица на плътността)

$|\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \right)$

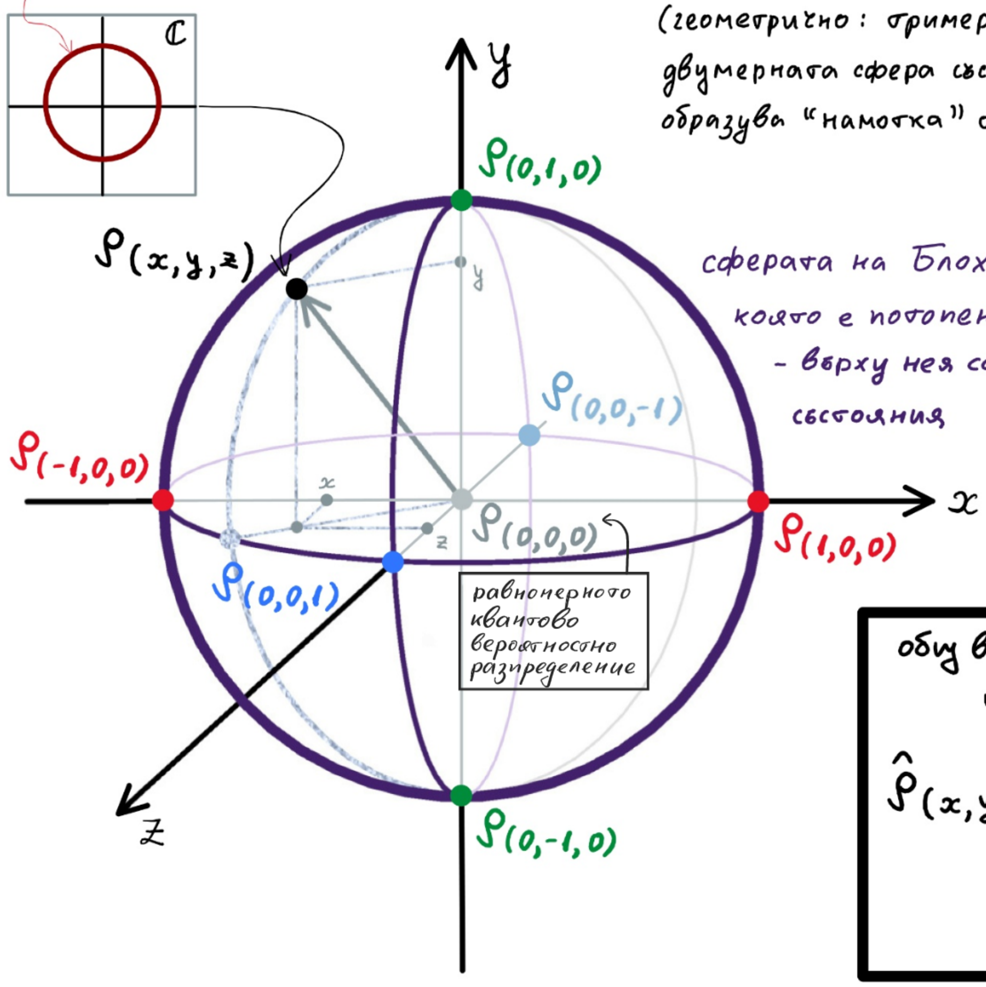
вектор на събитието

вектор на състоянието

Ето сумарната картина на състояния на q-бит:

Над всяка точка на сферата на Блох "напречно" в $\mathbb{R}^4$ се разполага единична окръжност $S^1 = \{e^{i\varphi}\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$ – така се намотава S^3 върху S^2 – нарича се разслоение на Хопф

(геометрично: тримерната сфера се разслоява над двумерната сфера със слоеве – окръжности, като образува "намотка" около двумерната сфера)



сферата на Блох, която е потопена в $\mathbb{R}^3$ – върху нея са чистите състояния

общ вид на матрицата на плътността на състояние

$$\hat{\rho}_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

за $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

чисто състояние $\Leftrightarrow$ =

7. Някои пропуснати доказателства (извън курса)

Теорема 5 (Циклично свойство на следата)

Ако $A = (a_{jk})_{N\times M}$ и $B = (b_{k\ell})_{M\times N}$, то

$$\mathrm{tr}\, AB \; (= \mathrm{tr}_N\, AB) = \mathrm{tr}\, BA \; (= \mathrm{tr}_M\, BA)$$

Доказателство. Нека $X = (x_{jk})_{N\times N} := AB$, $x_{jk} = \sum_{\ell=1}^{M} a_{j\ell} b_{\ell k}$

$Y = (y_{jk})_{M\times M} := BA$, $y_{jk} = \sum_{\ell=1}^{N} b_{j\ell} a_{\ell k}$

Тогава

$$\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, X = \sum_{j=1}^{N} x_{jj} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} a_{jk} b_{kj}$$

$$\mathrm{tr}\, BA = \mathrm{tr}\, Y = \sum_{k=1}^{M} y_{kk} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} b_{kj} a_{jk}$$

$\square$

Следствие 6 $\mathrm{tr}(AB\ldots C) = \mathrm{tr}(B\ldots CA)$.

Лема 7 Нека A е $N\times N$ комплексна матрица, а $\Psi \in \mathbb{C}^N$.

Тогава $\mathrm{tr}\big(A|\Psi\rangle\langle\Psi|\big) = \mathrm{tr}\big(|\Psi\rangle\langle\Psi|A\big) = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$

Експлицитно: ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ и $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$, то

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_N)\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_N)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_N)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

Доказателство. Това е пряко приложение на цикличното свойство на следата. $\square$

Доказателство на Теорема 3

$$\rho(\hat{1}) = 1 \iff tr(\hat{\rho}\,\hat{1}) = 1, \text{ т.е., } tr\,\hat{\rho} = 1.$$

Остава:

$$\left.\begin{array}{l}A \text{ е положително} \\ \text{дефинитна}\end{array}\right\} \overset{?}{\iff} \left\{ tr(AB^*B) \geq 0 \text{ за всяка } B \in Mat_N(\mathbb{C}) \right.$$

$\Rightarrow$) Ако A е самоспрегната и с неотрицателни собствени стойности, то

$$A = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, |f_j\rangle\langle f_j| \text{ - спектрално разлагане}, \ \lambda_j \geq 0.$$

Тогава $tr(AB^*B) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, tr(|f_j\rangle\langle f_j|\, B^*B) \overset{\text{Лема 7}}{=}$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle f_j | B^*B | f_j \rangle = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \| B f_j \|^2 \geq 0$$

$\Leftarrow$) Нека $tr(AB^*B) \geq 0$ за всяка $B \in Mat_N(\mathbb{C})$

Нека $B := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за $\Psi \in \mathbb{C}^N$, $\Psi \neq 0$.

Тогава $B^*B = \|\Psi\|^2\, |\Psi\rangle\langle\Psi|$

и $tr(AB^*B) = \|\Psi\|^2 \underbrace{\langle \Psi | A \Psi \rangle \geq 0}$ за $\forall\, \Psi \in \mathbb{C}^N$.

$\Rightarrow$ A е положително дефинитна $\square$

Лема 8. Ако X е $N \times M$ комплексна матрица и $tr(X^*X) = 0$, то $X = \hat{0}$.

Доказателство. Ако $X = (x_{jk})$, то $tr(X^*X) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \overline{x_{jk}}\, x_{jk}$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |x_{jk}|^2 \qquad \square$$

Доказателство на Теорема 4

$\Leftarrow$) Ако $\hat{\rho} = q_1 \hat{\rho}_1 + q_2 \hat{\rho}_2$ и $A \in Mat_N(\mathbb{C})$, то

$$\rho(A) = tr\left(\hat{\rho} A\right) = tr\left(\left(q_1 \hat{\rho}_1 A + q_2 \hat{\rho}_2 A\right)\right)$$
$$= q_1 tr\left(\hat{\rho}_1 A\right) + q_2 tr\left(\hat{\rho}_2 A\right) = q_1 \rho_1(A) + q_2 \rho_2(A).$$

$\Rightarrow$) Имаме $tr\left(\hat{\rho} A\right) = q_1 tr\left(\hat{\rho}_1 A\right) + q_2 tr\left(\hat{\rho}_2 A\right)$ за $\forall A \in Mat_N(\mathbb{C})$.

Тогава: $tr\left(\left(\hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2\right) A\right) = 0$ за $\forall A \in Mat_N(\mathbb{C})$.

Да положим $A = \hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2$. От Лема 8 следва, че $\hat{\rho} - q_1 \hat{\rho}_1 - q_2 \hat{\rho}_2 = 0$.

$\square$