ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА НА КАДРИ
ПО ФИЗИКА И ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИ ПРОБЛЕМИ ПРИ БАН

ИНСТИТУТ ЗА ЯДРЕНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ
И ЯДРЕНА ЕНЕРГЕТИКА

Сектор по теория на ядрото и на елементарните
частици

ЧАВДАР ДИМИТРОВ ПАЛЕВ

ЛИ-АЛГЕБРИЧНИ АСПЕКТИ НА КВАНТОВАТА СТАТИСТИКА

ДИСЕРТАЦИЯ

ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН

"Доктор на физическите науки"

София, декември, 1976 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

У В О Д

Многогранните връзки на физиката с математиката винаги са извор на нови научни идеи, основа за много от постиженията на човешкия гений. Разбира се, взаимоотношенията между двете науки не са неизменни, те също се усъвършенствуват и развиват. Ако до преди десетилетия от математиката се заимствуваха преди всичко методите, тя беше апарат, инструмент за изследване и решаване на поставените проблеми, сега наред с тези и функции на много от абстрактните математически структури все по-често се придава конкретен физичен смисъл, въз основа на което се предсказват и откриват нови свойства и явления. Например в квантовата механика състоянията са вектори в хилбертово пространство, алгебрите на наблюдаемите са пряко свързани с конкретизации на линейни топологични пространства и т.н. Все пак ако трябва да се посочи една единствена математична структура, играла и играеща основна роля в теоретичната физика, довела до ред значителни предсказания във физиката на микросвета, на първо място би трябвало навярно да се поставят групите и алгебрите на Ли.

Въведена в съвременната физика преди около четири десетилетия [1], изиграла основна роля при формирането и построяването на квантовата теория на полето, теорията на групите достигна апогея си с откриването на $SU(3)$-симетрията [2,3] и предсказването на Ω^--хиперона. По такъв начин се оказа, че най-малките, градивните елементи на микросвета се подчиняват на Ли-алгебрични закони, имат Ли-алгебрична структура. Елементарните частици се класифицират не по представяния на примерно асоциативна алгебра или друга структура, а са вектори от пространствата на представянията на алгебра на Ли. Биха могли да се приведат още много примери от различни области на теоретичната физика. Изложението, което следва, е също пример в това отношение.

Главен обект на изследване в представената дисертация е квантовата статистика и по-точно - процедурата на вторично квантуване в теорията на полето и в теоретичната физика въобще преди всичко от гледна точка на възможни обобщения. За целта е използуван предимно апаратът на алгебрите на Ли и техните представяния.

На пръв поглед може да изглежда, че няма връзка между предмета на изследването и посочените математични методи. Наистина алгебрите на Ли - този основен инструмент в теоретичната физика ,до сега почти не е използуван по въпроси, свързани с квантовата статистика. В дисертацията е направен опит да се покаже, че и в тази област на теоретичната физика групово-алгебричният апарат може да бъде удобен инструмент за изследване.

Известно е [4], че ортодоксалната квантова статистика на бозе- и ферми-полетата значително се обобщава, ако не се налага изискването комутаторът или антикомутаторът между полетата да е с-число. В такъв случай общоприетите комутационни /респ.антикомутационни/ съотношения между бозе- /респ. ферми-/операторите се заменят с по-общи, трилинейни структурни съотношения, които за спинорни полета се записват във вида

$$[[a_i^{\xi}, a_j^{\eta}], a_k^{\varepsilon}] = \frac{1}{2}(\eta-\varepsilon)^2 \delta_{jk} a_i^{\xi} - \frac{1}{2}(\xi-\varepsilon)^2 \delta_{ik} a_j^{\eta} \quad ; \varepsilon, \xi, \eta = \pm \qquad /1/$$

Операторите на раждане a_i^+ и унищожение a_i^-, удовлетворяващи това съотношение, се наричат параферми-оператори. Структурните съотношения между обобщените оператори на тензорни полета - парабозе-операторите удовлетворяват аналогични равенства. Най-характерната особеност е, че в парабозе случая вътрешният комутатор се заменя с антикомутатор:

$$[\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\}, a_k^{\delta}] = (\delta-\xi)\delta_{ik} a_j^{\eta} + (\delta-\eta)\delta_{kj} a_i^{\xi} \qquad /2/$$

На пръв поглед несъществената разлика между трилинейните съотношения /1/ и /2/ води до съществено различни алгебрични свойства.

Както веднага можем да се убедим от /1/ , всеки многократен комутатор на параферми-операторите се изразява като линейна комбинация от величините

$$a_i^{\xi}, [a_j^{\eta}, a_k^{\delta}] \quad ; \quad \xi, \eta, \delta = \pm \qquad /3/$$

Следователно линейната обвивка на образуващите /3/ е алгебра на Ли, която в случай на краен брой оператори $a_1^{\pm}, \dots, a_n^{\pm}$ ще означаваме с B_n . Това е възлов момент, на който обръщаме внимание. Тук за първи път се появява посочената връзка между статистиката на полето и алгебрите на Ли. Аналогично заключение не може да се направи за парабозе-операторите. Наистина не е трудно да се провери, че векторното пространство с образуващи $\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\}$ е затворено спрямо многократни комутации и следователно линейната обвивка на антикомутаторите е алгебра на Ли, която се оказва изоморфна на алгебрата на симплектичната група [8,9]. В първия случай обаче се получава нещо повече: алгебрата B_n се поражда с комутатори от параферми-оператори и затова те могат да се разглеждат като елементи от алгебрата. Това свойство не е в сила за парабозе-операторите и в този смисъл статистиката на тензорни полета или по-точно свойствата на парабозе-операторите не могат да се изучават с методи от теорията на алгебрите на Ли. Именно поради тази причина на парабозе-статистиката ще бъде отделено значително по-малко внимание в дисертацията. В същото време, като се използват Ли-алгебричните свойства на параферми-операторите, ще бъдат намерени и класифицирани всевъзможните им представяния [10], [11]. Ще видим, че алгебрата B_n е алгебрата на Ли на ортогоналната група от нечетна размерност $SO(2n+1, \mathbb{C})$ [12] и че има взаимно-еднозначно съответствие между представянията на параферми-операторите и алгебрата B_n [13]. В този смисъл, заимствувайки Ли-алгебрична терминология, параферми-квантуването може да се нарече ортогонално квантуване или по-точно-нечетно-ортогонална, тъй като има и ортогонална алгебра от четна размерност.

В изложението,посветено на парастатистиката / § 4,10 и 14-16/, ще бъдат засегнати преди всичко въпроси на представянията на пара-ферми-операторите [15,16], в това число и на многовакуумните [10,11], [16-20]. Няма да се разглеждат въпроси на параквантуването на основата на швингеровския динамичен принцип[21-23],аксиоматическата формулировка[24], а също връзката на парастатистиката с модела на кварките [25] и въобще въпроси на интерпретацията[26-32]. Няма да се спираме и на реализации на алгебри на Ли с пара-оператори на раждане и унищожение[33].

Алгебрата B_n е една от четирите серии класически прости алгебли на Ли; в означенията на Картан, към които се придържаме, те се бележат с A_n, B_n , C_n и D_n за алгебри от ранг n . Това са съответно алгебрите на групите $SL(n,\mathbb{C})$, $SO(2n+1,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{C})$ и $SO(2n,\mathbb{C})$, които са добре известни и затова тук няма да бъдат дефинирани

След като веднъж е установена Ли-алгебричната структура на параферми-статистиката, някак си естествено възниква въпросът, защо алгебрата B_n играе тази в известен смисъл привилегирована роля в квантовата теория на спинорните полета и не е ли възможно квантуване с генератори на останалите прости алгебри на Ли. За да отговорим на този въпрос, в § 1 ние анализираме изходните постулати за квантуване на полетата главно в алгебричен аспект.

Комутационните съотношения между операторите на раждане и унищожение в квантовата теория на свободните полета се извеждат въз основа на трансформационните свойства и по-специално от инфинитезималната форма на трансформационния закон при транслации,

$$[P^m, a_i^{\pm}(\underline{p})] = \pm p^m a_i^{\pm}(\underline{p}) \ , \qquad /4/$$

където P^m е операторът на 4-импулса.

Ще видим, че от операторното равенство /4/ не произтичат с необходимост нито ферми- и бозе-/анти/комутационните съотношения, нито по-слабите трилинейни съотношения /1/ и /2/. Това обстоятелство ще бъде използувано, за да се изведат още по-слаби и следователно по-общи структурни съотношения между операторите на раждане и унищожение, удовлетворяващи уравнението /4/ /което наричаме изходно уравнение за квантуване/. В същност едно от тези решения е известно. Пара-ферми структурните равенства /1/ се постулират от Грин [4] въз основа на следното решение на изходното уравнение /4/:

$$[[a_i^+, a_i^-], a_j^\pm] = \pm 2\delta_{ij} a_j^\pm \qquad /5/$$

Затова най-напред тук възниква въпросът, дали това по-слабо комутационно съотношение не може да се удовлетвори с генератори, пораждащи други прости алгебри на Ли. Оказва се, че това наистина не е възможно. В § 3 ще видим, че при известни условия /които, почти сме сигурни, не са необходими/ алгебрата B_n е единствената проста алгебра на Ли, породена с генератори, удовлетворяващи уравнението /5/. Това обаче не е единственото решение на изходното уравнение за квантуване. В § 1 ще бъде намерено още едно решение - т.нар. изродено съотношение за квантуване, което впоследствие ще бъде основа за квантуване с оператори на раждане и унищожение, пораждащи алгебрите на четно-ортогоналната и симплектичната група.

Преди това / § 5/ ще се възползуваме от обстоятелствата, че редът на операторите на раждане и унищожение в низшето ферми-представяне не е задължен /а що се касае до параферми-статистиката - и не може/ да се записва във вид на нормално произведение. Това ще ни позволи да покажем, че е възможно квантуване и с оператори, пораждащи алгебрата на унимодуларната група.

Последният параграф на първа глава е посветен на някои решения на основното съотношение за квантуване /5/ с генератори на полупрости непрости алгебри. Показано е, че то допуска решения с оператори, чиито комутационни съотношения наподобяват едновременните комутатори между нулевите компоненти на токовете в алгебрата на токовете. По-точно това са оператори, пораждащи безкрайна /и даже континуална/ пряка сума от алгебри $A_1 \approx sl(2)$ /пример 1, § 8/ . Приведено е и едно не Ли-алгебрично обобщение на статистиката на Ферми-Дирак /пример 2/.

Във втора глава най-напред се въвежда понятие за пространство на Фок на вече дефинираните оператори на раждане и унищожение,които в зависимост от това, на каква алгебра отговарят, се наричат a-, b-, c- или d-оператори. Класифицирани са пространствата на представянията на тези оператори, съдържащи единствен /с точност до константа/ вектор, анулиращ се от операторите на унищожение, т.с. пространствата на Фок.

За А-статистиката /§ 11/ са пресметнати матричните елементи на операторите на раждане и унищожение. Представянията в пространствата на Фок се номерират с едно цяло положително число p - порядъкът на статистиката. Особено е интересно, че когато порядъкът на статистиката неограничено расте, a-операторите се трансформират в бозе-оператори. Това свойство има и Ли-алгебрични следствия, тъй като показва, че представянето на една от най-простите разрешими алгебри на Ли - алгебрата на бозе-операторите или, както още се нарича, алгебрата на Хайзенберг, е граница на клас от представяния на простата алгебра A_n . При фиксиран порядък на статистиката p в едно и също състояние могат да се намират не повече от p частици. В определен смисъл А-статистиката е по-естествена от параферми-статистиката, тъй като поотделно положителночестотните и отрицателночестотните оператори комутират помежду си.

Пресмятането на матричните елементи на c- и d-операторите се оказва значително по-сложно. Намерени са формули за важен клас от представяния на d-операторите, които най-неочаквано позволяват да се реше една отдавна поставена в параферми-статистиката задача: да се намерят изрази за матричните елементи на параферми-операторите при произволен порядък на статистиката. Тази задача се решава в т. нар. несобствени пространства на Фок /определение 9.2/, най-характерното за които е, че вакуумът се анулира от част от операторите на раждане /и, разбира се, от всички оператори на унищожение/, т.с. $a_i^+ |0\rangle = 0$ и които по този ночин "не мога да съществуват в свободно състояние"

Третата глава, която е последна, е посветена на въпроси на алгебрата на токовете за параполета.

Бихме искали да отбележим още, че обобщенияна на статистиката, разгледани в дисертацията, се основават на изведеното в рамките на релативистката квантова теория на полето уравнение за квантуване /4/. То обаче може да се получи и при квантуване на примерно нерелативистко шрьодингеровско поле. В този смисъл получените резултати по принцип могат да се окажат интересни и даже по-интересни за други области на теоретичната физика, като например ядрената физика или теорията на твърдото тяло.

О З Н А Ч Е Н И Я   И   С Ъ К Р А Щ Е Н И Я

Използуваните в дисертацията символи са въобще дефинирани в текста. Тук за удобство ще приведем някои от най-често срещащите се и имащи навсякъде един и същ смисъл означения и съкращения.

$\mathbb{R}$ . . . . поле на реалните числа;

$\mathbb{C}$ . . . . поле на комплексните числа;

$\mathbb{N}$ . . . . множество от целите положителни числа;

$\mathbb{N}_0$ . . . . множество от целите неотрицателни числа;

$\mathcal{A}$ . . . . комплексна полупроста алгебра на Ли;

$\Sigma(\mathcal{A})$, $\Sigma_{\mathcal{A}}$ . . корнева система на алгебрата $\mathcal{A}$; когато алгебрата се подразбира, пишем също и само Σ ;

$\Sigma^{+}_{\mathcal{A}}$ $\Sigma^{-}_{\mathcal{A}}$ . . съвкупността от положителни /отрицателни/ корени на алгебрата $\mathcal{A}$.

$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{H}$ . . . . Картанова подалгебра на $\mathcal{A}$;

$\overset{*}{\mathcal{H}}_{\mathcal{A}}$, $\overset{*}{\mathcal{H}}$ . . . . дуалното /спрегнато/ пространство на Картановата подалгебра ;

Γ . . . . съвкупност от теглата в дадено неприводимо представяне /алгебрата се подразбира/ ;

λ, x_{λ} . . . . тегло и тегловен вектор с тегло λ ;

Λ, x_{Λ} . . . . старше тегло и старши вектор в дадено неприводимо представяне;

W_{Λ} . . . . неприводим модул със старше тегло Λ ;

A_n, B_n, C_n, D_n . . Картановите означения за класическите прости алгебри на Ли

$\xi, \eta, \delta, \varepsilon$ . . . . . навсякъде приемат значения $\pm$ или ± 1 ;

$[x,y]$ . . . . . $xy - yx$;

$\{x,y\}$ . . . . . $xy + yx$;

$[x,y]_\varepsilon$ . . . . . $xy + \varepsilon yx$;

e_{ij} . . . . квадратна матрица /чиято размерност се подразбира/ с (ij)-ти матричен елемент равен на 1 и всички останали равни на о ;

δ_{ij}, δ^i_j . . . . . символи на Кронекер ;

$\mathrm{Tr}\, M$ . . . . . следа на матрицата M ;

$\overset{T}{M}$ . . . . . транспонирана на матрицата M ;

M^* . . . . . ермитово спрегната на M матрица или оператор;

$M + N$ . . . . сума на подпространствата M и N ;

$M \oplus N$ . . . . пряка сума на /под/пространствата или /под/алгебрите M и N ;

$M \otimes N$ . . . . тензорно произведение на пространства или пряко произведение на групи ;

Употребява се също общоприета символика от теорията на съвкупностите:

$a \in M$ . . . . a се съдържа сред елементите на M ;

$M \cup N$ $(M \cap N)$ множеството от всички елементи, принадлежащи на M или/и/ N ;

$(x) \Longrightarrow (y)$ . . от (x) следва (y) ;

$(x) \Longleftrightarrow (y)$ . . твърденията (x) и (y) са равнозначни; (x) е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено (y) ;

$\forall$ . . . . за всеки ;

$\blacksquare$ . . . . край на доказателството ;

Съкращения:

ИУК . . . . изходно уравнение за квантуване ;

ОСК . . . . основно съотношение за квантуване ;

ИСК . . . . изродено съотношение за квантуване ;

КК-форма . . . . . форма на Картан-Килинг ;

ОРУ . . . . оператори на раждане и унищожение

Означенията от квантовата теория на полето /с изключение на отбелязаните под номер/1.21/ съвпадат с приетите в монографията на Боголюбов и Ширков [36]. Така метричният тензор в пространството на Минковски g_{ij} има сигнатура $+ - - -$, "скаларното произведение" на два 4-вектора x и y се бележи с xy,

$$xy = x^0 y^0 - \underline{x}\,\underline{y} = x^0 y^0 - x^\alpha y^\alpha ,$$

където $\underline{x}$ е тримерната част на $x = (x^0, \underline{x})$.

По повтарящи се индекси не винаги се подразбира сумиране, но това обикновено се разбира от контекста; в противен случай сумата се изписва винаги явно.

ПЪРВА ГЛАВА

ЛИ-АЛГЕБРИЧНО КВАНТУВАНЕ

1. Изходно съотношение за квантуване

В този параграф, като следваме предимно изложението на [36], ще изведем изходното съотношение за квантуване и ще приведем две негови конкретизации - основното и изроденото съотношение за квантуване. Впоследствие те ще бъдат основа за изучаване на някои обобщения на квантовата статистика. Тук не се поставя цел да се даде увод в теорията на вторичното квантуване. Изложението е схематично. Ще бъдат формулирани принципите за квантуване, за да се подчертае, че няма да се придържаме към някои от общоприетите постулати в квантовата теория на полето.

Формално преходът към вторичното квантуване е правило, съгласно с което на всяко класическо поле се съпоставя операторна полева функция по такъв начин, че да се запази рационалното в лагранжевия формализъм: както и в класическия случай, уравненията на полето да следват от вариационния принцип, а динамичните променливи да са инварианти спрямо определени трансформации на полевите функции и координатите.

Без да прецизираме засега математическия апарат /за него ще споменем в края на параграфа/ при извода на основните съотношения за квантуване ще изхождаме от три постулата.

1. Постулат за релативистична инвариантност. Това е изискването за инвариантност на квантовата теория спрямо 10-параметричната собствена ортохронна група на Поанкаре $\mathcal{P}$. Групата на Поанкаре се дефинира със съвкупността от всевъзможните нехомогенни трансформации на пространството на Минковски

$$x'^i = \Lambda^i{}_j x^j + a^i \quad , \qquad /1.1/$$

за които

$$\Lambda^{i}{}_{n}\Lambda_{i}{}^{m} = \delta_{n}{}^{m} \qquad /1.2/$$

Групата $\mathcal{P}$ е подгрупа на групата на Поанкаре, когато

$$\det \Lambda = 1 \quad , \quad \Lambda^{0}{}_{0} > 0$$

Всеки елемент $\ell \in \mathcal{P}$ се задава еднозначно с 4-вектора на пространствено-временни транслации a и матрицата на хомогенните, лоренцови трансформации Λ. Затова ℓ може да се отъждестви с двойката (Λ, a), $\ell \equiv (\Lambda, a)$.

Полевите оператори $u_i(x)$, които са оператори /с дефиниционна област/ в хилбертовото пространство на състоянията H, се трансформират по /безкрайномерно унитарно/ представяне на $\mathcal{P}$. Нека $\ell = (\Lambda, a) \in \mathcal{P}$. Тогава

$$u'(\Lambda x + a) = V(\Lambda) u(x) \quad . \qquad /1.3/$$

Тук $V(\Lambda)$ е /изобщо двузначно/ крайномерно представяне на групата на Лоренц /т.нар. спинова част на трансформацията/, чийто ранг е равен на броя на компонентите на полето. От условието за инвариантност на нормата в H спрямо трансформации от групата на Поанкаре /и от някои естествени изисквания за непрекъснатост/ следва, че амплитудата на състояние $\phi \in H$ се преобразува също с унитарен оператор [37]:

$$\phi \to \phi' = \mathcal{U}_{\ell}\,\phi \quad . \qquad /1.4/$$

Тъй като $\mathcal{U}_{\ell_1}\mathcal{U}_{\ell_2} = \mathcal{U}_{\ell_1 \ell_2}$, в H се реализира унитарно представяне

$$\theta : \ \ell \to \mathcal{U}_{\ell} \ , \ \ell \in \mathcal{P} \ , \qquad /1.5/$$

на групата на Поанкаре.

На всяка безкрайномалка трансформация $\ell \in \mathcal{P}$,

$$x^{k} \to x'^{k} = x^{k} + \delta x^{k} , \qquad /1.6/$$

характеризираща се с параметрите на транслациите δa^{n} и въртенията $\delta\omega^{mn}$, $m<n$, $m,n = 0,1,2,3$,

$$\delta x^k = (\delta^k_m x_n - \delta^k_n x_m)\delta\omega^{mn} + \delta^k_n . \delta a^n , \qquad /1.7/$$

съответствуват безкрайномалки трансформации на полевите оператори и векторите на състояние:

$$u'(\Lambda x + a) = (1 + \delta V_\ell) u(x), \qquad /1.8/$$

$$\phi' = (1 + \delta U_\ell)\phi , \qquad /1.9/$$

където

$$\delta V_\ell = \lambda_{mn} . \delta\omega^{mn} , \qquad /1.10/$$

$$\delta U_\ell = i M_{mn} \delta\omega^{mn} + i P_n . \delta a^n . \qquad /1.11/$$

Операторите λ_{mn} и M_{mn} задават съответно крайномерно и безкрайномерно представяне на генераторите на групата на Лоренц, а P_n са инфинитезималните оператори на транслациите в H . Трансформационните свойства на полевите оператори и векторите на състояние не са независими. Връзката между тях произтича от втория постулат.

2. _Основен постулат за квантуване_. Ермитовите генератори на 4-мерния импулс P_i и на момента на количеството на движение M_{mn} се изразяват чрез операторните полеви функции със същите съотношения, както в класическия случай /редът на изобщо некомутиращите помежду си множители трябва допълнително да се доуточни/.

Този постулат задава генераторите P_i и M_{mn} като оператори в пространството , в което ще бъдат дефинирани полевите оператори и което все още се търси. По такъв начин тук се налагат и първите ограничения върху операторните свойства на полето: полевите оператори трябва да са такива, че изразените чрез тях оператори на импулса и момента да удовлетворяват правилни комутационни съотношения. Тук се появява и първото сходство с теорията на представянията на алгебрите на Ли: търсят се пространства на представяне на полевите оператори, в които се запазват комутационни съотношения между определени "комбинации" / P_i и M_{mn} / от полетата. Разликата е преди всичко в това, че е зададена само част от всевъзможните комутатори - между споменатите "комбинации" от полето. Избързвайки напред, ще отбележим, че както при ферми- и параферми-статистиката, така и при бозе-статистиката операторните свойства се доопределят така, че в импулсно представяне полетата да генерират алгебра на Ли. Затова сходството с представянията на алгебрите на Ли в случай на краен брой оператори се превръща в строга Ли-алгебрична задача.

Връзката между трансформационните свойства на операторните вълнови функции и векторите на състоянията се намира от условието[+]

$$(\phi, u'(x)\phi) = (\phi', u(x)\phi'), \qquad /1.12/$$

където (ϕ_1, ϕ_2) е скаларното произведение на векторите $\phi_1, \phi_2 \in H$.

От /1.12/ следва, че

$$u'(x) = \mathcal{U}(\Lambda, a)^{-1} u(x)\, \mathcal{U}(\Lambda, a) , \qquad /1.13/$$

което може да се запише и така:

$$\mathcal{U}(\Lambda, a)\, u(x)\, \mathcal{U}(\Lambda, a)^{-1} = V(\Lambda^{-1})\, u(\Lambda x + a) \qquad /1.14/$$

Последното равенство е еквивалентно на условието за релативистична инвариантност и може да бъде прието за постулат [38]. То означава, че полето $u(x)$ се трансформира като ковариантна операторна функция.

Инфинитезималната форма на трансформационния закон /1.13/ в случай на транслации

$$[P_n, u(x)] = -i \frac{\partial u(x)}{\partial x^n} \qquad /1.15/$$

е изходна за определяне на комутационните съотношения между операторите на свободните полета.

[+] Както се посочи, не прецизираме дефиниционните области на операторите

Обикновено е прието динамичните променливи, зависещи квадратично от оператори с еднакви аргументи, да се записват във вид на нормално произведение[36]. Има и друга, еквивалентна форма[34], използвана също в модели на алгебрата на токовете[35]: постулира се, че произведенията на фермионните/бозонните/ полета влизат винаги в антисиметрични/респ. симетрични/ комбинации. В този случай лагранжианът на свободно спинорно поле се запис например във вида

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}(x)\gamma^n \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^n}\right] - \frac{i}{2}\left[\frac{\partial\overline{\psi}(x)}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right] - m\left[\overline{\psi}(x)\psi(x)\right], \qquad /1.16/$$

където

$$[A\gamma^n B] = \frac{1}{2}(A\gamma^n B - B\overset{T}{\gamma}{}^n A), \qquad /1.17/$$

$$[AB] = \frac{1}{2}(AB - BA)$$

/Анти/симетризацията на $\mathcal{L}$ като алтернативна форма на лагранжиана, записан чрез нормално произведение, може да се разглежда като следствие от следните две еквивалентни изисквания:

1. Инвариантност на $\mathcal{L}$ спрямо товароспрягането[34].

2. Отстраняване на ненаблюдаемите сингуларности в средното значение на лагранжиана[35].

За ферми-полета разликата $\mathcal{L} - :\mathcal{L}:$ е /сингуларно/ с-число, и двата лагранжиана са еквивалентни. В по-общия случай обаче, когато не се постулира, че или комутаторът, или антикомутаторът на две операторни полеви функции е с-число, $\mathcal{L}$ и $:\mathcal{L}:$ не са равнозначни. Паракомутационните съотношения например не могат да бъдат изведени от $:\mathcal{L}:$, докато следват по естествен начин от /анти/симетризираните лагранжиани. Нещо повече, както ще видим в трета глава, в рамките на квантовата теория на полето токовете, построени от /анти/симетризирани лагранжиани, удовлетворяват основната аксиома на алгебрата на токовете: едновременните комутатори на нулевите им компоненти затварят алгебра на Ли. В този смисъл тези лагранжиани са по-удобни за обобщения на статистиката. Ето защо и в по-общия случай, следвайки [38], ще приемем следващият постулат.

3. Постулат за симетризация. Ако в динамичните променливи се срещат произведения на полеви оператори, то винаги се предполага, че произведенията на тензорните полета са симетризирани, а произведенията на спинорните - антисиметризирани[+].

Да изведем основните съотношения за квантуване на спинорно поле. В алгебричните разсъждения, които следват, по-удобна е нековариантната нормировка на операторите на раждане и унищожение, използвана в[36]. За по-компактен запис на комутационните съотношения малко ще модифицираме означенията:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\underline{p} \left[e^{ipx} v^{\mu,+}(\underline{p},-)\, a^{+}_{\mu}(\underline{p},-) + e^{-ipx} v^{\mu,-}(\underline{p},+)\, a^{-}_{\mu}(\underline{p},+) \right],$$

/1.18/

$$\overline{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\underline{p} \left[e^{ipx} v^{\mu,+}(\underline{p},+)\, a^{+}_{\mu}(\underline{p},+) + e^{-ipx} v^{\mu,-}(\underline{p},-)\, a^{-}_{\mu}(\underline{p},-) \right],$$

където $p^0 = (\underline{p}^2 + m^2)^{1/2}$, а $a^{\xi}_{\mu}(\underline{p},\eta)$ е оператор на раждане/ ξ =+/ или унищожение/ ξ =-/ на частица със заряд η .

Ермитовото спрягане в тези означения се дава с /ξ,η=+,-/:

$$\left[a^{\xi}_{\mu}(\underline{p},\eta) \right]^{*} = a^{-\xi}_{\mu}(\underline{p},\eta) \qquad /1.19/$$

$$\left[v^{\mu,-\xi}(\underline{p},\xi) \right]^{*} \gamma^{0} = v^{\mu,\xi}(\underline{p},\xi) \qquad /1.20/$$

[+] В параграф 5 няма да се придържаме към този постулат.

Съответствието с означенията в [36] е, както следва:

по Боголюбов и Ширков:	в дисертацията:
$\overset{*}{a}{}^{\pm}_{\mu}(\underline{p})$	$a^{\pm}_{\mu}(\underline{p},\pm)$,
$a^{\pm}_{\mu}(\underline{p})$	$a^{\pm}_{\mu}(\underline{p},\mp)$,
$v^{\mu,\pm}(\underline{p})$	$v^{\mu,\pm}(\underline{p},\mp)$
$\overline{v}^{\mu,\pm}(\underline{p})$	$v^{\mu,\pm}(\underline{p},\pm)$

/1.21/

От каноничния тензор на енергията и импулса

$$T^{k}_{\ell} = \frac{i}{4}\left[\overline{\psi}(x)\gamma^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^{\ell}}\right] - \frac{i}{4}\left[\frac{\partial\overline{\psi}(x)}{\partial x^{\ell}}\gamma^{k}\psi(x)\right]$$

за оператора на 4-импулса, изразен посредством амплитудите $a^{\xi}_{\mu}(\underline{p},\eta)$ $\xi,\eta = +,-$, се получава

$$P_n = \frac{1}{2}\int \underline{dp}\, p_n \left[a^{+}_{\mu}(\underline{p},\xi), a^{-}_{\mu}(\underline{p},\xi)\right] , \qquad /1.22/$$

където $[x,y] = xy - yx$ и се сумира по ξ и μ .

Комутационното съотношение /1.15/ от своя страна дава

$$[P_n , a^{\xi}_{\mu}(\underline{p},\eta)] = \xi\, p_n\, a^{\xi}_{\mu}(\underline{p},\eta) \qquad /1.23/$$

Подставяйки тук /1.22/, достигаме до $/\xi,\eta,\delta,\varepsilon = +,-/$

$$\int \underline{dk}\, k_n [[a^{+}_{\mu}(\underline{k},\eta), a^{-}_{\mu}(\underline{k},\eta)]_{\varepsilon} , a^{\xi}_{\nu}(\underline{p},\delta)] = 2\xi\, p_n \overset{a^{\xi}_{\nu}}{\cancel{v}}(\underline{p},\delta) , \qquad /1.24/$$

където $[x,y]_{\varepsilon} = xy + \varepsilon yx$; за разглеждания случай на спинорно поле $\varepsilon = -$, докато за скаларни и векторни полета $\varepsilon = +$.

Равенство /1.24/ трябва да се разглежда като уравнение за установяване на структурни съотношения между операторите $a^{\xi}_{\mu}(\underline{k},\eta)$. Ще го приемем за изходно при изучаване на някои схеми на спинорни полета. За определеност ще наричаме /1.23-24/ изходно уравнение за квантуване /ИУК/[+].

В частност /1.24/ се удовлетворява, ако положим

$$[[a^{+}_{\mu}(\underline{k},\eta),\, a^{-}_{\mu}(\underline{k},\eta)]_{\varepsilon},\, a^{\xi}_{\nu}(\underline{p},\delta)] = 2\xi\,\delta_{\mu\nu}\delta_{\eta\delta}\,\delta(\underline{k}-\underline{p})\,a^{\xi}_{\nu}(\underline{p},\delta). \qquad /1.25/$$

Ако в допълнение към приетите постулати наложим изискването /анти/комутаторът на полевите функции да е с-число, то, както е известно, се получава

$$[a^{\xi_1}_{\mu_1}(\underline{p}_1,\eta_1),\, a^{\xi_2}_{\mu_2}(\underline{p}_2,\eta_2)]_{\pm} = 0 \qquad /1.27/$$

при $\xi_1 = \xi_2$ – следствие от транслационната инвариантност, а при $\xi_1\eta_1 = \eta_2\xi_2$ - от градиентната инвариантност.

В този случай от /1.25/ еднозначно следват известните комутационни съотношения между операторите на раждане и унищожение:

Бозони -

$$[a^{\xi_1}_{\mu_1}(\underline{p}_1,\eta_1),\, a^{\xi_2}_{\mu_2}(\underline{p}_2,\eta_2)] = \frac{1}{2}(\xi_2-\xi_1)\,\delta_{\eta_1\eta_2}\delta_{\mu_1\mu_2}\delta(\underline{p}_1-\underline{p}_2) \qquad /1.28/$$

Фермиони -

$$[a^{\xi_1}_{\mu_1}(\underline{p}_1,\eta_1),\, a^{\xi_2}_{\mu_2}(\underline{p}_2,\eta_2)]_{+} = \frac{1}{4}(\xi_1-\xi_2)^2\,\delta_{\eta_1\eta_2}\delta_{\mu_1\mu_2}\delta(\underline{p}_1-\underline{p}_2) \qquad /1.29/$$

където $\xi_i,\ \eta_i = \pm$ или ± 1, $i=1,2$.

По такъв начин бозе- и ферми-статистиката, а, както ще видим, и техните обобщения - парастатистиките - са следствие /въобще нееднозначно/ от структурните съотношения /1.25/. Априори не е ясно

[+] Строго казано /1.24/ е по-силно изискване, тъй като в него вече е заложен постулата за симетризация.

обаче дали тази конкретизация на изходното съотношение за квантуване /1.24/ не елеминира решения, които също биха представлявали интерес. Така например едно друго възможно решение на изходното уравнение , което наред с /1.25/ ще бъде от значение по-нататък, се дава със структурното съотношение

$$\sum_{\eta=\pm}[[a^{+}_{\mu}(\underline{k},\eta),a^{-}_{\mu}(\underline{k},\eta)]_{\varepsilon},a^{\xi}_{\nu}(\underline{p},\delta)]=2\xi\delta_{\mu\nu}\delta(\underline{k}-\underline{p})a^{\xi}_{\nu}(\underline{p},\delta)\ . \qquad /1.30/.$$

В следващите параграфи ще бъдат разгледани някои Ли-алгебрични следствия от съотношенията /1.25,1.30/ за спинорни полета ($\varepsilon=-$). При това за да използуваме апарат на теорията на крайномерните алгебри на Ли и представянията им , без да държим сметка за дефиниционните области на срещащите се оператори и законноста на операторните умножения, ще разглеждаме крайна съвкупност от оператори. В този случай съотношенията /1.25 и 1.30/ се преписват съответно във вида / ε е или само плюс, или само минус/

$$[[a^{+}_{i},a^{-}_{i}]_{\varepsilon},a^{\xi}_{j}]=2\xi\delta_{ij}a^{\xi}_{j}\ ;\ \xi=\pm \qquad /1.25'/$$

$$\sum_{\eta=\pm}[[a^{+}_{\eta i},a^{-}_{\eta i}]_{\varepsilon},a^{\xi}_{\delta j}]=2\xi\delta_{ij}a^{\xi}_{\delta j}\ ;\ \xi,\eta,\delta=\pm \qquad /1.26/$$

При написването на /1.25'/ тройката индекси $(\mu,\underline{k},\eta)$, номерираща оператора $a^{\pm}_{\mu}(\underline{k},\eta)$, беше заменена с един индекс - i ,т.с.

$$a^{\pm}_{\mu}(\underline{k},\eta)\longrightarrow a^{\pm}_{i} \qquad /1.31/$$

Съотношение /1.26/ следва от /1.30/ със субституцията $(\mu,\underline{k})=i$, а η става долен индекс:

$$a^{\pm}_{\mu}(\underline{k},\eta)\longrightarrow a^{\pm}_{\eta i} \qquad /1.32/$$

В контекста съотношения /1.25-26/ ще се срещат твърде често. За удобство те ще бъдат обособени в едно определение.

<u>Определение 1.1.</u> Операторното равенство /1.25,респ.1.25'/ ще наричаме основно съотношение за квантуване, а всяко от равенствата

/1.26, 1.30/ - изродено съотношение за квантуване.

В случай на ортодоксална статистика операторите $a_{\mu}^{\xi}(\underline{k},\eta)$ се наричат оператори на раждане /ξ =+/ и унищожение /ξ =-/. Затова и в по-общия случай ще приемем следната терминология.

Определение 1.2. Всяка съвкупност от оператори $a_{\mu}^{\xi}(\underline{k},\eta)$, изпълняващи изходното уравнение за квантуване /1.23/, респ. операторите a_i^{ξ}, $a_{\eta i}^{\xi}$, удовлетворяващи основното и изроденото съотношения /1.25'-26/, ще наричаме оператори на раждане /ξ =+/ и унищожение /ξ =-/.

Както вече се посочи, ще разглеждаме предимно краен брой оператори на раждане и унищожение. Въпреки това ще продължим да се придържаме към приетата терминология и ще говорим за квантуване с оператори $a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}$. В по-строг смисъл това е верно, когато $n \to \infty$. Обобщението на резултатите за безкрайномного оператори обикновено е очевидно, но когато са континуум /както и в ортодоксалната теория/ се появяват специфични особености от топологично естество.

Поради споменатите причини в приведения извод на изходното уравнение за квантуване се акцентира върху трансформационните свойства на полевите оператори и почти напълно се игнорираха топологичните им свойства. Същевременно голяма част от трудностите в квантовата теория на полето възникват при съгласуване на топологичните свойства с релативистичната инвариантност. Даже в най-простия случай на свободно скаларно бозе-поле операторът $u(x)$ не е дефиниран в хилбертовото пространство на състоянията H. Той е определен само върху навсякъде гъсто /в топологията на H/ ядрено пространство $\Omega \subset H$ със значения в спрегнатото му /спрямо топологията на Ω/ пространство $\overset{*}{\Omega} \supset H \supset \Omega$, т.е. в пространството на обобщените състояния. В този смисъл произведението на полетата /например в лагранжиана/ не е определено, равенство /1.12/ и /1.14/ не са строго дефинирани. Например в /1.12/ $u(x)\phi \notin H$, а в /1.13/ операторното умножение не е определено. Произтичащите оттук трудности са известни от литературата по квантова теория на полето. Този въпрос се засегна, само за да уточним, че топологични въпроси на теорията в дисертацията няма да се третират.

2. Ли-алгебрични методи / резюме /

Математичният апарат, използуван в дисертацията, е преди всичко апаратът на теорията на алгебрите на Ли и техните представяния. Предполага се, че читателят е запознат с групово-алгебричната терминология. В изложението обаче многократно ще ни се наложи да боравим с кръг от сравнително прости, но по-специфични Ли-алгебрични въпроси , които обикновено или не намират място във физическата литература по теория на групите, или изложението им не е съвсем прецизно. Затова, пък и за едно по-самосвързано изложение тук ще бъдат припомнени някои определения и ще се приведат без доказателства необходимите сведения. Еднократно използуваните Ли-алгебрични твърдения ще бъдат привеждани на съответното място в текста.

Нека $\mathcal{A}$ е комплексна полупроста алгебра на Ли от ранг n , $\mathcal{H}$ - Картановата й подалгебра с базис $h_1, h_2, \ldots, h_n$. С (x,y), $x, y \in \mathcal{A}$ означаваме билинейната форма на Картан-Килинг /КК-форма/:

$$(x,y) = \mathrm{Tr}\, \mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y \quad ; \qquad /2.1/$$

тук $\mathrm{ad}x$ е линеен оператор в $\mathcal{A}$, действуващ като комутатор:

$$(\mathrm{ad}x).z = [x,z] \quad , \quad z \in \mathcal{A} \qquad /2.2/$$

Базисът $h_1, \ldots, h_n, e_{\omega_1}, \ldots, e_{\omega_p}$ в $\mathcal{A}$ винаги може да се избере така, че за всяко $h \in \mathcal{H}$:

$$[h, e_{\omega_i}] = \overset{*}{\omega}_i(h)\, e_{\omega_i} \quad , \qquad /2.3/$$

където $\overset{*}{\omega}_i(h)$ е линейна функция /форма/ в $\mathcal{H}$.

Линейните функционали $\overset{*}{\omega}_i$ и векторите e_{ω_i} , $i = 1, 2, \dots, p$ се наричат съответно корени и корневи вектори на алгебрата $\mathcal{A}$. Съответствието

$$\overset{*}{\omega}_i \longrightarrow e_{\omega_i} \qquad /2.4/$$

е взаимно-еднозначно.

Трябва да се помни, че докато корневите вектори са елементи от $\mathcal{A}$, корените са вектори в спрегнатото /дуалното/ пространство $\overset{*}{\mathcal{H}}$ на Картановата подалгебра $\mathcal{H}$. Често обаче се оказва по-удобно те също да се разглеждат като елементи от $\mathcal{H}$ в следния смисъл. Произволен линеен функционал $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ се представя във вида

$$\overset{*}{\lambda}(h) = (h, \lambda) \quad \forall \ \overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}} \qquad /2.5/$$

От неизродеността на формата на Картан-Килинг следва, че това е винаги възможно. Изображението

$$\theta : \overset{*}{\lambda} \longrightarrow \lambda \equiv \theta \overset{*}{\lambda} \in \mathcal{H} \qquad /2.6/$$

е взаимно-еднозначно и запазва операциите в линейното пространство $\overset{*}{\mathcal{H}}$. Затова θ дефинира изоморфизъм на $\overset{*}{\mathcal{H}}$ върху $\mathcal{H}$. По такъв начин векторът $\lambda \in \mathcal{H}$ характеризира напълно линейния функционал $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$. Обикновено образите $\omega_i = \theta \overset{*}{\omega}_i \in \mathcal{H}$ на корените $\overset{*}{\omega}_i \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ също се наричат корени. Като се използува /2.5/ ,наред с /2.3/ може да се запише:

$$[h, e_{\omega_i}] = (h, \omega_i) e_{\omega_i} \ . \qquad /2.7/$$

Често е по-удобно корените $\overset{*}{\omega}_i$ и ω_i , разглеждани като елементи от $\overset{*}{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{H}$, да се бележат с един и същ символ, например ω_i . С това съглашение вместо /2.3/ понякога се пише:

$$[h, e_{\omega_i}] = \omega_i(h) e_{\omega_i}$$

Доказва се, че формата на Картан-Килинг задава скаларно произведение в реалното пространство $\mathcal{H}^r$, което е линейна обвивка над $\mathbb{R}$ на корените $\omega_i \in \mathcal{H}$; $\mathcal{H} = \mathcal{H}^r + i\,\mathcal{H}^r$.

Някои по-важни свойства на корените, които ще се използват, са:

1) корневите подпространства

$$X_{\omega_i} = \{ x \mid [h, x] = (h, \omega_i)x,\ h \in \mathcal{H},\ x \in \mathcal{A} \} \qquad /2.8/$$

са едномерни;

2) ако ω_i е корен, то $2\omega_i$, $3\omega_i$,.... и т.н. не са корени;

3) ако ω_i е корен, то $-\omega_i$ е също корен;

4) комутаторът между два корневи вектора не е нула,

$$[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}] \neq 0 \qquad /2.9/$$

тогава и само тогава, когато $\omega_i + \omega_j$ е корен или 0.

Корневите вектори, задаващи заедно с $h_1, \ldots, h_n$ базис в $\mathcal{A}$, могат да се нормират така, че да са в сила комутационните съотношения:

$$\begin{aligned} &[e_{\omega_i}, e_{-\omega_i}] = \omega_i \\ &[h, e_{\omega_i}] = (h, \omega_i)\, e_{\omega_i} \qquad \forall\, h \in \mathcal{H} \qquad /2.10/ \\ &[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}] = N_{\omega_i \omega_j}\, e_{\omega_i + \omega_j} \ , \quad N_{\omega_i \omega_j} \text{ - число} \end{aligned}$$

Този базис се нарича базис на Картан-Вайл.

Нека $h_1, \ldots, h_n$ е базис в $\mathcal{H}^r$ /и следователно базис в $\mathcal{H}$ /. За базис в $\overset{*}{\mathcal{H}}$ ще изберем дуалния базис, състоящ се от линейни функционали $\overset{*}{h}{}^1, \ldots, \overset{*}{h}{}^n$, дефинирани с равенството

$$\overset{*}{h}{}^{i}(h_j) = \delta^{i}{}_{j} \qquad i,j = 1,\dots,n \qquad /2.11/$$

Съвкупността $\Sigma_{\mathcal{A}}$ /пишем също $\Sigma(\mathcal{A})$ или просто Σ, когато алгебрата се подразбира/ от корените на алгебрата $\mathcal{A}$ е корневата система на алгебрата. Коренът $\omega_i \in \Sigma$ се нарича положителен, $\omega_i > 0$ /отрицателен, $\omega_i < 0$ /, ако първата му ненулева координата в избрания подреден базис е положителна /респ. отрицателна/. Даденото определение не зависи от това дали ω_i се разглежда като елемент от $\mathcal{H}$ или от $\overset{*}{\mathcal{H}}$, но се влияе от избора на базиса в $\mathcal{H}$. Положителният корен се нарича прост, ако не може да се представи като сума от други положителни корени. Всеки положителен /респ. отрицателен/ корен е линейна комбинация от прости корени с целочислени положителни /респ. отрицателни/ коефициенти. Простите корени са n на брой / = ранга на $\mathcal{A}$ / и задават /винаги неортогонален спрямо КК-формата/ базис в $\mathcal{H}$.

С $\Sigma^{+}(\Sigma^{-})$ и $X^{+}(X^{-})$ съответно ще означаваме множествата от положителните /респ. отрицателните/ корени и корневи вектори на $\mathcal{A}$;

$$\Sigma = \Sigma^{+} \cup \Sigma^{-} \qquad /2.12/$$

$$X = X^{+} \cup X^{-} \qquad /2.13/$$

$$\mathcal{A} = \{ \text{л.о.}\, X^{-} \oplus \mathcal{H} \oplus \text{л.о.}\, X^{+} \} \qquad /2.14/$$

Да разгледаме произволно представяне π на алгебрата $\mathcal{A}$ в крайномерното /за определеност - N-мерното/ пространство W ; съответствуващия на $\ell \in \mathcal{A}$ оператор ще бележим с $\hat{\ell}$:

$$\pi : \ell \longrightarrow \hat{\ell} \; , \; \ell \in \mathcal{A} \qquad /2.15/$$

Ако $\ell \in \mathcal{A}$, то за действието $\hat{\ell}x$ на оператора $\hat{\ell}$ върху произволен елемент $x \in W$ обикновено пишем ℓx, т.с. полагаме

$$\ell x \equiv \hat{\ell} x \qquad /2.16/$$

В такъв случай пространството на представянето W се нарича $\mathcal{A}$ -модул.$^{+}$ Ако π е неприводимо представяне, W е неприводим $\mathcal{A}$ - модул.

В $\mathcal{A}$-модула W винаги може да се избере базис

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \qquad /2.$$

диагонален спрямо Картановата подалгебра:

$$h x_i = \overset{*}{\lambda}_i(h) x_i \quad , \; i = 1, \ldots, N \qquad /2.1/а/$$

Като се използува отново изображението /2.6/, линейните функционали $\overset{*}{\lambda}_i \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ могат да се разглеждат и като елементи от Картановата подалгебра $\mathcal{H}$. Тогава вместо /2.17/, може да се пише

$$h x_i = (h, \lambda_i) x_i \qquad /2.17б/$$

По такъв начин на всеки базисен вектор $x_i \in W$ се съпоставя образ $\lambda_i \in \mathcal{H}$ /или от $\overset{*}{\mathcal{H}}$ /, дефиниран от равенството /2.17/,

$$\tau : x_i \longrightarrow \lambda_i \, . \qquad /2.18/$$

Векторите x_i и λ_i, $i = 1, \ldots, N$, се наричат съответно **тегловни вектори** и **тегла** на представянето π. Кратността на теглото λ_i е размерността на тегловното подпространство

$$T_{\lambda_i} = \tau^{-1}(\lambda_i) \qquad /2.19/$$

Нека e_ω е корнев вектор с корен $\omega \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ и $x \in T_{\lambda_i}$.

$^{+}$Това не е дефиниция на $\mathcal{A}$ -модул, а следствие от полагането /2.16/. За абстрактната дефиниция на това понятие вж. напр.[9].

Винаги, когато сумата $\omega + \lambda_i$ не е тегло, операторът e_ω анулира вектора x :

$$e_\omega \cdot x = 0 . \tag{2.20}$$

Обратно, ако $\omega + \lambda_i$ е тегло, тогава има поне един вектор $x \in T_{\lambda_i}$, такъв, че

$$y = e_\omega \cdot x \neq 0$$

Всеки ненулев вектор, който може да се представи във вида $e_\omega \cdot x$, $x \in T_{\lambda_i}$, е тегловен вектор с тегло $\omega + \lambda_i$.

Нека по-долу W е неприводим $\mathcal{A}$-модул. Има единствено тегло Λ , старшето тегло на представянето, със следните свойства:

1) Λ има кратност единица;

2) тегловният вектор $x_\Lambda \in W$ се анулира от всички положителни корневи вектори -

$$e_\omega \cdot x_\Lambda = 0 \quad \forall \ \omega \in \Sigma^+_{\mathcal{A}} , \tag{2.21}$$

или, което е същото,

$$\omega + \Lambda \text{ не е тегло } \quad \forall \ \omega \in \Sigma^+_{\mathcal{A}} ; \tag{2.22}$$

3) пространството на представянето W съвпада с линейната обвивка на всевъзможните вектори от вида

$$e_{\omega_{i_1}} e_{\omega_{i_2}} \cdots e_{\omega_{i_m}} x_\Lambda , \text{ където } \omega_i \in \Sigma^-_{\mathcal{A}} \ (\text{т.с. } e_{\omega_i} \in X^-), m \in \mathbb{N}_0 \tag{2.23}$$

От последното свойство и обстоятелството, че всеки корнев вектор е въобще многократен комутатор от прости корневи вектори, заключаваме, че всяко тегло λ е представимо във вида

$$\lambda = \Lambda - \sum_{\omega_i > 0} k_i \omega_i ; \tag{2.24}$$

числата k_i са цели неотрицателни, а сумата е по положителните /или само по простите/ корени на алгебрата $\mathcal{A}$.

Нека $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ са простите корени на $\mathcal{A}$. Показва се, че за произволно тегло λ векторът $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, чиито координати се дефинират с равенството

$$\lambda_i = \frac{2(\lambda, \pi_i)}{(\pi_i, \pi_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad /2.25/$$

има целочислени координати. Ще ги наричаме канонични координати на теглото λ.

Скаларното произведение на произволни линейни функционали $\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2 \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ се дефинира чрез скаларното произведение на θ-образите им /2.6/:

$$(\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) = (\theta\lambda_1, \theta\lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2). \qquad /2.26/$$

Затова теглото λ и простите корени π_i, влизащи в дефиниционното равенство /2.25/, могат да се разглеждат като вектори както от Картановата подаргебра $\mathcal{H}$, така и от спрегнатото ѝ пространство $\overset{*}{\mathcal{H}}$.

Векторът $[\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n]$, съответствуващ на старшето тегло Λ, има неотрицателни цели координати и определя неприводимото представяне с точност до еквивалентност. Обратно, на всеки n цели положителни числа $[\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n]$ отговаря неприводимо представяне на $\mathcal{A}$.

В $\overset{*}{\mathcal{H}}$ /респ. в $\mathcal{H}$/ винаги може да се избере базис, в който координатите на всяко тегло λ се дават с числата $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Този базис ще наричаме каноничен.

Съществено свойство на съвкупността от теглата Γ е инвариантността ѝ спрямо групата на Вайл S. Тя е крайна група на трансформации, дефинирани в реалната линейна обвивка на корените $\mathcal{H}^r$; елементите ѝ се номерират с корените на алгебрата:

$$S = \{ S_{\omega_i} \mid \omega_i \in \Sigma \}. \qquad /2.27/$$

действието на $S_{\omega_i} \in S$ върху произволен вектор $h \in \mathcal{H}^r$ се дава с равенството

$$S_{\omega_i} \cdot h = h - \frac{2(h,\omega_i)}{(\omega_i,\omega_i)}\omega_i \in \mathcal{H}^r \qquad /2.28/$$

Оттук и от /2.25/ се получава, че за всяко $\lambda \in \Gamma$ също и

$$S_{\omega_i} \cdot \lambda = \lambda + j\omega_i \in \Gamma \quad , \ \omega_i \in \Sigma . \qquad /2.29/$$

При това j е цяло число. Доказва се, че линейните функционали

$$\lambda, \ \lambda+\omega_i, \ \lambda+2\omega_i, \ldots, \ \lambda+j\omega_i \qquad /2.30/$$

са също тегла.

Теглата, породени едно от друго с трансформации от групата на Вайл, се наричат еквивалентни. Те имат една и съща кратност. Сред еквивалентните тегла съществува само едно тегло, наречено доминантно, чиито канонични координати са цели неотрицателни числа.

По-нататък в изложението често се налага да боравим с различни базиси както в Картановата подалгебра $\mathcal{H}$, така и в спрегнатото и пространство $\overset{*}{\mathcal{H}}$. Затова тук ще ги дефинираме, ще посочим накратко основните им свойства и Ли-алгебричния им смисъл.

Нека най-напред $\mathcal{H}$ е n-мерно евклидово пространство със скаларно произведение (,) , $\overset{*}{\mathcal{H}}$ - пространството спрегнато на $\mathcal{H}$. За всеки функционал $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ съществува единствен вектор $\lambda \in \mathcal{H}$, такъв, че

$$\overset{*}{\lambda}(h) = (h,\lambda) \quad \forall \ h \in \mathcal{H} \qquad /2.31/$$

ще наричаме λ образ на $\overset{*}{\lambda}$ и щом се среща двойка еднакви символи, от които единият е със звезда, например $\overset{*}{\lambda}, \lambda$, обикновено ще разбираме, че $\lambda \in \mathcal{H}$ е образ на $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$. Както беше отбелязано, ако в $\overset{*}{\mathcal{H}}$ се въведе скаларно произведение

$$(\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) = (\lambda_1, \lambda_2), \qquad /2.32/$$

то $\overset{*}{\mathcal{H}}$ се превръща в евклидово пространство, а изображението

$$\overset{*}{\lambda} \longrightarrow \lambda \qquad /2.33/$$

задава изоморфно и изометрично изображение на $\overset{*}{\mathcal{H}}$ върху $\mathcal{H}$.

Ще дефинираме следните базиси.

1) ковариантен базис H в $\mathcal{H}$ - произволен базис

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\};$$

2) контравариантен базис $\overset{*}{h}{}^1, \dots, \overset{*}{h}{}^n$ в $\overset{*}{\mathcal{H}}$ - дуален на H-базиса;

3) контравариантен базис $h^1, \dots, h^n$ в $\mathcal{H}$ - базис от образите на базис 2;

4) ковариантен базис $\overset{*}{h}_1, \dots, \overset{*}{h}_n$ в $\overset{*}{\mathcal{H}}$ - базис, дуален на базиса 3.

Означенията са съгласувани - H-базисът е същевременно и базис от образи на ковариантния базис в $\overset{*}{\mathcal{H}}$. Индексите се качват и свалят с помощта на тензорите

$$c_{ij} = (h_i, h_j) \quad \text{и} \quad (c^{-1})^{ij} = (h^i, h^j). \qquad /2.34/$$

Ковариантният и контравариантният базис в $\mathcal{H}$ /в $\overset{*}{\mathcal{H}}$/ са биортогонални:

$$(h_i, h^j) = \delta_i^{\,j}, \quad (\overset{*}{h}_i, \overset{*}{h}{}^j) = \delta_i^{\,j}. \qquad /2.35/$$

Координатите на $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ в $\overset{*}{h}{}^1, \dots, \overset{*}{h}{}^n$ и на образа му $\lambda \in \mathcal{H}$ в $h^1, \dots, h^n$ съвпадат. Наистина, ако

$$\overset{*}{\lambda} = \lambda_i \overset{*}{h}{}^i, \qquad /2.36/$$

тогава за всяко $h \in \mathcal{H}$ имаме

$$(h,\lambda) = \overset{*}{\lambda}(h) = (\lambda_i \overset{*}{h}{}^i)(h) = \lambda_i \overset{*}{h}{}^i(h) = (h, \lambda_i h^i) \Longrightarrow$$

$$\lambda = \lambda_i h^i \qquad /2.37/$$

Това се отнася и за ковариантните базиси.

При произволна трансформация на базиса

$$f_i = A_i^{\ j} h_j \qquad /2.38/$$

величините с долен индекс - ковариантните величини /с горен индекс - контравариантните величини/ се трансформират с матрицата A $(\overset{T}{A}{}^{-1})$. В този смисъл индексите на базисните векори и на координатите в /2.35/ са поставени правилно.

Нека сега $\mathcal{H}$ е Картановата подалгебра на простата алгебра $\mathcal{A}$ от ранг n ; $\pi_1,\dots,\pi_n$ - простите й корени. Базисът

$$F = \{ f_i \mid i = 1,\dots,n \} \qquad /2.39/$$

от елементи на $\mathcal{H}$ ще наречем F -базис, ако дуалният му базис

$$K = \{ \overset{*}{f}{}^i \mid i = 1,\dots,n \} \qquad /2.40/$$

е каноничен. Ще напомним, че базисът в каноничен, ако координатите на произволно тегло $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ в K съвпадат с каноничните координати на $\overset{*}{\lambda}$. Да положим

$$f_i = \frac{2}{(\pi_i,\pi_i)} \pi_i \ , \quad i = 1,\dots,n \qquad /2.41/$$

Тогава

$$\overset{*}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{\lambda}(f_i) \overset{*}{f}{}^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\overset{*}{\lambda}(\pi_i)}{(\pi_i,\pi_i)} \overset{*}{f}{}^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(\lambda,\pi_i)}{(\pi_i,\pi_i)} \overset{*}{f}{}^i$$

и следователно съвкупността от вектори /2.41/ е F -базис в $\mathcal{A}$.

Удобно е ковариантният базис в $\mathcal{H}$ да се избира ортогонален /тогава и останалите базиси 2-4 са ортогонални/ . В този случай координатите на произволен функционал $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ в контравариантния базис се наричат /ковариантни/ ортогонални координати на $\overset{*}{\lambda}$.Докато F -базисът и каноничният базис се определят /след фиксирането на простите корети/ еднозначно, в избора на ортогоналния базис има известна свобода. Това се използува, както ще бъде изяснено по-нататък, за да се направят ортогоналните координати на всяко тегло /полу/цели числа.

С помощта на F -базиса и ортогоналния базис H могат ефективно да се пресмятат каноничните и ортогоналните координати на произволно тегло λ - i-тата канонична /респ. ортогонална/ координата се оказва собствена стойност на вектора f_i /на h_i / върху тегловния вектор x_λ . Наистина

$$f_i x_\lambda = \lambda(f_i) x_\lambda = \frac{2(\lambda, \pi_i)}{(\pi_i, \pi_i)} x_\lambda, \qquad /2.42/$$

$$h_i x_\lambda = \lambda(h_i) x_\lambda .$$

В следващата глава при разглеждане на представянията на операторите на раждане и унищожение в явен вид ще се изпишат F -базисите и подходящо избрани ортогонални базиси за всяка класическа проста алгебра на Ли.

3. Полупросто квантуване

Едно от решенията на изходното уравнение за квантуване /1.24/ се дава с оператори, изпълняващи структурното съотношение /1.25/. Несъмнено това структурно съотношение представлява интерес. Наистина при $\varepsilon = -$ ферми-операторите, а при $\varepsilon = +$ - бозе-операторите на раждане и унищожение са решение на /1.25/ . Тук ще започнем да изучаваме систематично алгебричните и преди всичко Ли-алгебричните свойства на краен брой оператори, удовлетворяващи основното съотношение за квантуване /1.25/.

Определение 3.1. Ще казваме , че е зададено представяне на операторите на раждане и унищожение, ако е дефинирано изображение

$$\varphi : a_i^{\pm} \longrightarrow A_i^{\pm} \qquad /3.1/$$

на $a_i^{\pm}$ в множество от линейни оператори, удовлетворяващи изходното уравнение /1.23/

В частния случай под представяне на основното съотношение за квантуване /ОСК/

$$[[a_i^+, a_i^-]_\varepsilon, a_j^\xi] = 2\xi\delta_{ij}a_j^\xi \quad , \quad \xi = \pm \, , \qquad /3.2/$$

където ε =+/-/ за тензорни /спинорни/ полета, разбираме изображение φ, за което:

1) $A_i^{\pm}$ са линейни оператори в дадено линейно пространство L;

2) в L е изпълнено операторното равенство

$$[[A_i^+, A_i^-]_\varepsilon, A_j^\xi] = 2\xi\delta_{ij}A_j^\xi \quad . \qquad /3.3/$$

По-нататък в параграфа под оператори на раждане и унищожение ще се разбира крайна съвкупност $a_1^{\pm}, \dots, a_n^{\pm}$, за която е изпълнено ОСК /3.2/.

Едно от представянията φ_0 на ОСК, което в известен смисъл е универсално, може да се построи по следния начин. Нека $\mathcal{Z}_1$ е $2n$-мерно векторно пространство с образуващи /базис/ $a_1^{\pm}, \dots, a_n^{\pm}$. С $\mathfrak{F}_{cb}$ означаваме тензорната алгебра над $\mathcal{Z}_1$. По определение

$$\mathfrak{F}_{cb} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3 + \dots + \mathcal{Z}_i + \dots \quad , \qquad /3.4/$$

където $\mathcal{Z}_i = \underbrace{\mathcal{Z}_1 \otimes \mathcal{Z}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{Z}_1}_{i \text{ пъти}}$ е пространство от всички формални хомогенни полиноми от степен i на елементите от $\mathcal{Z}_1$.

Освен естествено определяемите за векторно пространство операции за сума и умножение на скалар, във $\mathfrak{F}_{cb}$ се дефинира и умножение. При $x = x_1 \cdot x_2 \cdots x_i \in \mathcal{Z}_i$, $y = y_1 y_2 \cdots y_j \in \mathcal{Z}_j$ полагаме

$$x \cdot y \equiv (x_1 \cdot x_2 \dots x_i) \cdot (y_1 \cdot y_2 \dots y_j) = x_1 \dots x_i y_1 \dots y_j \in \mathcal{Z}_{i+j} \qquad /3.5/$$

Очевидно е, че $\mathfrak{F}_{cb}$ е асоциативна алгебра. Това е по същество алгебрата породена от всевъзможните формални полиноми на образуващите $a_1^{\pm}, \dots, a_n^{\pm}$, с естествено определени като между полиноми от некомутиращи променливи операции за сума, умножение и умножение на скалар.

Да въведем двустранния идеал $\mathfrak{J}_{cb} \subset \mathfrak{F}_{cb}$, породен от основното съотношение /3.2/, т.с. генериран от елементите / ε е или + или - , ξ =+,-/:

$$[[a_i^+, a_i^-]_\varepsilon, a_j^\xi] - 2\xi\delta_{ij} a_j^\xi \quad , \quad i,j = 1,\dots,n \qquad /3.6/$$

Нека $F_{cb} = \mathfrak{F}_{cb} / \mathfrak{J}_{cb}$ е съответната фактор-алгебра.

Определяме операторите $A_i^{\pm}$ в F_{cb}, разглеждано като линейно пространство, с равенството

$$A_i^{\pm}(f + \mathfrak{J}_{cb}) = a_i^{\pm} f + \mathfrak{J}_{cb} , \qquad /3.7/$$

където $f + \mathfrak{J}_{cb}$ е произволен елемент от F_{cb}, $f \in \mathfrak{F}_{cb}$.

Операторите $A_i^{\pm}$ са дефинирани правилно. Наистина, ако

$$f_1, f_2 \in \mathfrak{F}_{cb} \quad \text{и} \quad f_1 = f_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{J}_{cb}) , \ \text{т.с.} \ f_1 - f_2 \in \mathfrak{J}_{cb} ,$$

то $a_i^{\pm} f_1 = a_i^{\pm} f_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{J}_{cb})$ и следователно

$$A_i^{\pm}(f_1 + \mathfrak{J}_{cb}) = A_i^{\pm}(f_2 + \mathfrak{J}_{cb}) . \qquad /3.8/$$

Освен това за всеки елемент $f \in \mathfrak{F}_{cb}$

$$([[A_i^+, A_i^-]_\varepsilon, A_j^\xi] - 2\xi\delta_{ij} A_j^\xi)(f + \mathfrak{J}_{cb}) = \mathfrak{J}_{cb} ,$$

тъй като по определение

$$([[a_i^+, a_i^-]_\varepsilon, a_j^\xi] - 2\xi\delta_{ij} a_j^\xi) f \in \mathfrak{J}_{cb} \qquad /3.9/$$

Следователно във $F_{\mathcal{B}} \Big|$ е изпълнено равенството

$$[[A_i^+, A_i^-]_\varepsilon, A_j^\xi] = 2\xi\delta_{ij}A_j^\xi \qquad /3.10/$$

и затова изображението

$$\varphi_0 : a_i^\pm \longrightarrow A_i^\pm \qquad /3.11/$$

дефинира представяне на основното съотношение за квантуване в безкрайномерното пространство $F_{\mathcal{B}}$.

Алгебрата $F_{\mathcal{B}}$ по аналогия с универсалната обвиваща за алгебра на Ли може да се нарече универсална обвиваща за операторите на раждане и унищожение. В случай на една двойка оператори a^+ и a^- при $\varepsilon = -$ тя е изоморфна на универсалната обвиваща на $A_1 \approx sl(2,\mathbb{C})$. Широк клас от представяния на основното съотношение за квантуване могат да бъдат получени в подходящо подбрани фактор-пространства на $F_{\mathcal{B}}$. В случай на универсална обвиваща $F_{\mathcal{B}}$ на дадена алгебра на Ли така по самото определение на $F_{\mathcal{B}}$ се получават всички крайномерни /но не само крайномерни/ представяния на алгебрата [42, гл.V, п.1].

В дисертацията не се поставя за цел да се намерят всевъзможните представяния на ОСК. Това е сложна и нестандартна математическа задача, чиито значително по-частни конкретизации не са решени напълно /например и досега не са намерени всички безкрайномерни представяния на $sl(2)$ /. Ще се направи опит да бъдат разгледани някои класове от представяния, свеждащи се до представяния на алгебри на Ли, които могат да представляват физически интерес.

Поради появата при $\varepsilon = +$ на антикомутатор в ОСК /3.2/, представянията на операторите на раждане и унищожение трудно могат да се разглеждат като представяния в Ли-алгебричен смисъл. Разбира се, във всяко крайномерно пространство те пораждат някаква алгебра на Ли, но тя зависи от пространството и няма да е една и съща за всички представяния. Затова по-нататък ще се изучават представяния на ОСК за спинорни полета, т.е. при $\varepsilon=-$. Ще видим, че в този случай важен клас от представяния може да се разглежда като представяния на подходящо избрана алгебра на Ли.

Изходен обект за намиране на такива представяния няма да бъде $F_{\mathcal{B}}$, а фактор-алгебра

$$F_J = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}/J$$

спрямо подходящо избран двустранен идеал J във $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, удовлетворяващ изискванията:

а) $J_{\mathcal{B}} \subset J$;

б) във F_J операторите на раждане и унищожение пораждат крайномерна алгебра на Ли.

Да прецизираме това твърдение. Тук и навсякъде по-нататък с

л.о. X се означава линейната обвивка на произволно множество X . /3.12/

Да разгледаме следните подпространства на $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$:

$$\mathcal{D}_0 = \text{л.о.}\{[[a_i^+, a_i^-], a_j^\pm] \mid i,j=1,\dots,n\} \subset \mathcal{L}_3 , \qquad /3.13/$$

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^2 + \dots + \mathcal{L}^m , \qquad /3.14/$$

където $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}_1$, а при $p > 1$

$$\mathcal{L}^p = \text{л.о.}\{[\dots[x_1, x_2], x_3], \dots], x_p] \mid x_i \in \mathcal{L}_1 , i=1,\dots,p\} \qquad /3.15/$$

Очевидно е, че $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}_p$, а при $m \geq 3$ $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{K}_m$. Нека θ_0 е линеен оператор във $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ с дефиниционна област $\mathcal{D}_0$ и такъв, че

$$\theta_0 [[a_i^+, a_i^-], a_j^\xi] = 2\xi\delta_{ij} a_j^\xi , \quad i,j=1,\dots,n ; \xi=\pm \qquad /3.16/$$

Задачата, която ще бъде разгледана, интерес представляват всевъзможните разширения Θ_m на Θ_o , $\Theta_o \subset \Theta_m$, с линейни оператори, дефинирани върху подпространството

$$\mathcal{F}^{cb} = \mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^2 + \dots + \mathcal{L}^i + \dots$$

и със значения в $\mathcal{K}_m$. Наистина нека сме намерили оператор с посочените свойства и нека J_m е двустранен идеал във $\mathcal{F}_{cb}$, породен от елементите $x - \Theta_m x$, $x \in \mathcal{F}^{cb}$. Тогава във фактор-алгебрата $F_m = \mathcal{F}_{cb} / J_m$ се получава, че $x = \Theta_m x$. Следователно за всеки многократен комутатор е изпълнено включването:

$$[\dots[[a_{i_1}^{\xi_1}, a_{i_2}^{\xi_2}], a_{i_3}^{\xi_3}], \dots], a_{i_r}^{\xi_r}] \in \mathcal{K}_m (\mathrm{mod}\, J_m), r \in \mathbb{N} . \qquad /3.17/$$

Тъй като $\Theta_o \subset \Theta_m$, то $J_{cb} \subset J_m$ и затова

$$[[a_i^+, a_i^-], a_j^\varepsilon] = 2\varepsilon \delta_{ij} a_j^\varepsilon (\mathrm{mod}\, J_m) . \qquad /3.18/$$

От /3.17 и 3.18/ се вижда, че във F_m операторите $a_i^\pm$ са оператори на раждане и унищожение, пораждащи крайномерна алгебра на Ли $\mathcal{A}(m)$. За всяко представяне на алгебрата $\mathcal{A}(m)$ $a_i^\pm$ са линейни оператори, удовлетворяващи изискването /3.3/ при $\varepsilon = -$. Следователно във F_m , се реализира представяне на основното съотношение за квантуване, което е същевременно и представяне на $\mathcal{A}(m)$. И в по-общия случай на произволна съвкупност от оператори, удовлетворяващи ИУК, ще приемем следната дефиниция.

<u>Определение 3.2.</u> Квантуването се нарича алгебрично, ако всевъзможните комутатори на операторите на раждане и унищожение затварят крайномерна алгебра на Ли.

По такъв начин в часния случай на оператори, удовлетворяващи ОСК , задачата за намиране на всевъзможните схеми за алгебрично квантуване се свежда до намирането на всевъзможните разширения Θ_m на оператора Θ_o . С други думи това е задача за доопределяне на комутационните съотношения по такъв начин, че операторите $a_i^{\pm}$ да удовлетворяват основното съотношение за квантуване /3.2/ и да пораждат крайномерна алгебра на Ли.

Естествено е сред всевъзможните схеми за алгебрично квантуване да отделим квантуването с най-често използуваните в теоретичната физика алгебри - полупростите и простите алгебри на Ли. Тези алгебри са напълно класифицирани и са намерени всички крайномерни и широк клас от безкрайномерни представяния на т.нар. класически алгебри на Ли [45].

Преди да се даде следващата дефиниция, ще припомним, че алгебрата на Ли $\mathcal{A}$ се поражда от елементите си $x_1, \ldots, x_p$, ако линейната обвивка на всевъзможните комутатори /включително и многократните/ съвпада с $\mathcal{A}$.

Определение 3.3. Квантуването е просто /полупросто/, ако операторите на раждане и унищожение пораждат проста /полупроста/ алгебра на Ли.

Пример за алгебрично, но не полупросто квантуване е квантуването с бозе-оператори, които удовлетворяват основното съотношение за квантуване на тензорни полета /3.2 при $\varepsilon = +$/ и същевременно са генератори на нилпотентна алгебра на Ли.

Теорема 3.1. Полупростата алгебра на Ли $\mathcal{A}$ от възможно най-нисък ранг се поражда от n двойки оператори на раждане и унищожение $a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}$ тогава и само тогава, когато тя е от ранг n и е пряка сума от класически прости алгебри

$$\mathcal{A} = B_{m_1} \oplus B_{m_2} \oplus \cdots \oplus B_{m_k}, \qquad /3.19/$$

където $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Най-напред ще се докажат някои предварителни резултати.

Лема 3.1. Нека $\tilde{\mathcal{A}}$ е полупроста алгебра на Ли, породена от двойки $a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}$ оператори на раждане и унищожение. Елементите

$$h_i = \frac{1}{2}[a_i^-, a_i^+] \quad , \quad i = 1, \dots, n \qquad /3.20/$$

се съдържат в Картановата подалгебра $\tilde{\mathcal{H}}$ на $\tilde{\mathcal{A}}$. Рангът на $\tilde{\mathcal{A}}$ е не по-малък от n.

<u>Доказателство</u>.

От основното съотношение за квантуване се вижда, че

$$[h_i, a_i^+] = -a_i^+ \quad , \quad [h_i, a_i^-] = a_i^- \qquad /3.21/$$

и следователно операторите $a_i^{\pm}, h_i$ задават базис на подалгебра $A_1^i \subset \tilde{\mathcal{A}}$, изоморфна на алгебрата $A_1 \approx sl(2, \mathbb{C})$. Операторът h_i принадлежи на Картановата подалгебра на A_1^i.

Да разгледаме присъединеното представяне $ad\,\tilde{\mathcal{A}}$ на $\tilde{\mathcal{A}}$. Последното, ограничено върху A_1^i, дава въобще приводимо представяне на тази алгебра в пространството $\tilde{\mathcal{A}}$. Както е известно, всяко /крайномерно/ представяне на A_1 /и в частност разглежданото/ е напълно приводимо и в пространството на всяко неприводимо /а следователно - и приводимо/ представяне може да се избере базис, диагонализиращ Картановата подалгебра - това е т.нар. каноничен базис [44], стр.31. Заключаваме, че операторът $ad\,h_i$ може да се диагонализира и следователно h_i е /по определение/ полупрост елемент на алгебрата $\tilde{\mathcal{A}}$. От UCR следва още, че

$$[h_i, h_j] = 0 \qquad i,j = 1, \dots, n.$$

Затова операторите $ad\,h_1, \dots, ad\,h_n$ се диагонализират едновременно. Ето защо подпространството

$$\mathcal{H} = \text{л.о.}\{h_i \mid i = 1, \dots, n\} \qquad /3.22/$$

е полупросто. Доказателството на лемата сега следва от приведената по-долу теорема.

Теорема [43, 19.22]. Ако $\tilde{\mathcal{A}}$ е полупроста алгебра на Ли, то Картановите и подалгебри са максималните полупрости подпространства на $\tilde{\mathcal{A}}$; в частност те са комутативни.

Като разширяваме $\mathcal{H}$ до максимално полупросто подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$, заключаваме, че елементите $h_1, \dots, h_n$ принадлежат на така избраната Картанова подалгебра $\tilde{\mathcal{H}}$.

Операторите $h_1, \dots, h_n$ са линейно независими. Наистина да допуснем, че

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i h_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha^i [a_i^-, a_i^+] = 0 \qquad /3.23/$$

Като се комутират лявата и дясната част на това равенство с a_j^+ и се използува ОСК /3.2/, се получава

$$[\sum_{i=1}^{n} \alpha^i h_i , a_j^+] = -\alpha^j a_j^+ = 0 .$$

Тъй като $a_j^+ \neq 0$, равенството /3.23/ е изпълнено, само ако всички константи $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ са нули. Въз основа на този резултат заключаваме, че

$$\mathrm{rank}\, \tilde{\mathcal{A}} = \dim \tilde{\mathcal{H}} \geq \dim \mathcal{H} = n , \qquad /3.24/$$

с което лемата е доказана.

Доколкото се търси полупроста алгебра $\mathcal{A}$ от минимален ранг, а съгласно с /3.24/ $\mathrm{rank}\, \tilde{\mathcal{A}} \geq n$, естествено е най-напред да се предположи, че $\mathrm{rank}\, \mathcal{A} = n$ и да се докаже или да се опровергае такава възможност.

И така допускаме, че съществува алгебра на Ли от ранг n , пораждаща се от n двойки оператори на раждане и унищожение $a_i^{\pm}$, $i=1,\dots,n$. Съгласно с доказаната лема $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ и следователно множеството $\mathcal{H}$, дефинирано с /3.22/ е Картанова подалгебра на $\mathcal{A}$.

За подреден базис в $\mathcal{H}$ избираме векторите /3.20/

$$h_1, h_2, \dots, h_n \qquad /3.25/$$

а за подреден базис в пространството $\overset{*}{\mathcal{H}}$, дуално на $\mathcal{H}$, дефинираните в § 2 линейни функционали

$$\overset{*}{h}{}^{1}, \overset{*}{h}{}^{2}, \ldots, \overset{*}{h}{}^{n} . \qquad /3.26/$$

Като се комутира произволен елемент $h \in \mathcal{H}$ с $a_i^{\pm}$, се получава

$$[h, a_i^{\pm}] = \mp \overset{*}{h}{}^{i}(h) a_i^{\pm} . \qquad /3.27/$$

Това равенство показва, че ако алгебрата $\mathcal{A}$ съществува, то пораждащите я оператори $a_i^{\pm}$ са нейни корневи вектори.

Следствие 3.1. Ако полупростата алгебра на Ли $\mathcal{A}$ от ранг n се поражда от n двойки оператори на раждане и унищожение, тогава относто подредения базис /3.26/ операторите на раждане /респ. унищожение/ са отрицателни /респ. положителни/ корневи вектори.

Както се вижда от равенство /3.27/, на оператора $a_i^{\pm}$ се съпоставя тегло $\mp \overset{*}{h}{}^{i}$, т.с.

$$a_i^{\pm} \longleftrightarrow \mp \overset{*}{h}{}^{i} . \qquad /3.28$$

Нека Σ е корневата система на полупростата алгебра $\mathcal{A}$.

Определение 3.4. Системата $\Phi = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ от корени на произволна полупроста алгебра на Ли $\mathcal{A}$ ще наричаме пълна, ако всеки корен $\omega \in \Sigma$ е представим във вида

$$\omega = \sum_j k_j \omega_j , \quad \omega_j \in \Phi , \qquad /3.29/$$

където всички k_j са цели числа.

Тъй като

$$\text{л.о.}\,\Phi = \text{л.о.}\{\omega \mid \omega \in \Sigma\} = \mathcal{H} ,$$

то

$$m \geq n \qquad /3.30/$$

и затава всяка пълна система съдържа не по-малко от n корена.

Нека $e_{\pm\omega_1}, \dots, e_{\pm\omega_m}$ са корневите вектори с корени $\pm\omega_i$, $\omega_i \in \Phi$. Корневият вектор e_ω на произволен корен

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} k_i \omega_i = \sum_{i=1}^{m} \xi_i |k_i| \omega_i \quad , \; \xi_i = \pm 1 \qquad /3.31/$$

е $|k_1|+|k_2|+\dots+|k_m|$ кратен комутатор на $|k_1|$ вектора $e_{\xi_1\omega_1}$, $|k_2|$ вектора $e_{\xi_2\omega_2}$, ... и $|k_m|$ вектора $e_{\xi_m k_m}$. Следователно системата

$$X_\Phi = \{ e_{\pm\omega_i} \mid \omega_i \in \Phi \} \qquad /3.32/$$

поражда алгебрата $\mathcal{A}$.

Като пример за пълна система може да се посочи всяка проста система от корени. Във всяка алгебра на Ли има обаче и пълни системи, които не са прости спрямо никакъв базис в $\mathcal{H}$.

Ще бъде доказан един удобен критерий, който ще позволи да се класифицират всевъзможните алгебри, задаващи полупросто квантуване.

Лема 3.2. Полупростата алгебра на Ли $\mathcal{A}$ от ранг n се поражда от n двойки оператори на раждане и унищожение тогава и само тогава, когато съдържа пълна система Φ от ортогонални /спрямо формата на Картан-Килинг/ корени.

Доказателство.

Нека $\Phi = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ е пълна система от ортогонални корени. Тъй като в n-мерно евклидово пространство не може да има повече от n ортогонални вектора,

$$m \le \dim \mathcal{H} = n \qquad /3.33/$$

и затова съгласно с /3.30/ $m = n$. Ето защо Φ задава базис в $\mathcal{H}$. Нека в $\mathcal{A}$ е въведен базис на Картан-Вайл, т.с.

$$[e_\omega, e_{-\omega}] = \omega \quad , \quad \omega \in \Sigma_{\mathcal{A}} , \qquad /3.34/$$

$$[h, e_\omega] = (h, \omega)\, e_\omega .$$

При $h = \omega_i$, $e_\omega = e_{\pm\omega_j}$ и $\omega_i, \omega_j \in \Phi$ последният комутатор се преписва във вида

$$[\omega_i, e_{\pm\omega_j}] = [[e_{\omega_i}, e_{-\omega_i}], e_{\pm\omega_j}] = \pm(\omega_i, \omega_j) e_{\pm\omega_j} , \qquad /3.35/$$

където $(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij} (\omega_i, \omega_i)$.

Полагайки

$$a_i^{\pm} = \sqrt{\frac{2}{(\omega_i, \omega_i)}}\; e_{\pm\omega_i} , \qquad /3.36/$$

се убеждаваме, че

$$[[a_i^+, a_i^-], a_j^{\pm}] = \pm 2 \delta_{ij} a_j^{\pm} \qquad /3.37/$$

По такъв начин операторите $a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}$ удовлетворяват основното съотношение за квантуване /3.2/ и пораждат алгебрата $\mathcal{A}$.

Обратно, нека полупростата алгебра от ранг n се поражда от операторите на раждане и унищожение $a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}$. Както се знае от лема 3.1 , елементите $[a_i^-, a_i^+]$, $i=1,\ldots,n$ задават базис в подалгебрата на Картан. Всеки от тях е пропорционален на корена ω_i на корневия вектор a_i^+ :

$$[a_i^+, a_i^-] = c_i \omega_i \quad , \; c_i\text{-константа} \qquad /3.38/$$

Тъй като при $i \neq j$

$$[\omega_i, a_j^{\pm}] = (\omega_i, \omega_j) a_j^{\pm} = 0 ,$$

то

$$(\omega_i, \omega_j) = 0 \quad i \neq j = 1, \ldots, n \qquad /3.39/$$

и системата $\Phi = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \subset \mathcal{A}$ е пълна ортогонална система.

Доказателство на теорема 3.1.

Съгласно с лема 3.2 сега е достатъчно да се намерят всевъзможните полупрости алгебри на Ли, съдържащи пълни системи ϕ с n ортогонални корена.

От общата теория на алгебрите на Ли се знае, че всяка полупроста алгебра на Ли $\mathcal{A}$ от ранг n е пряка сума

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1(m_1) \oplus \mathcal{A}_2(m_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_k(m_k) \qquad /3.40/$$

от прости алгебри на Ли $\mathcal{A}_i(m_i)$, $m_i = \mathrm{rank}\, \mathcal{A}_i(m_i)$, където

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k . \qquad /3.41/$$

Алгебрата $\mathcal{A}$ се поражда от пълна система от ортогонални корени ϕ тогава и само тогава, когато всеки неин прост идеал $\mathcal{A}_i$ съдържа пълна система ϕ_i от m_i ортогонални корена. Тогава

$$\phi = \bigcup_i \phi_i \qquad /3.42/$$

Твърдението следва от обстоятелството, че всеки корен $\omega \in \Sigma$ е вектор от Картановата подалгебра на някоя от простите подалгебри $\mathcal{A}_i$, а различните подалгебри $\mathcal{A}_i$ са ортогонални спрямо формата на Картан Килинг. По такъв начин задачата се свежда до намиране на всевъзможните прости алгебри на Ли , съдържащи пълни ортогонални системи от корени.

В ортогонален базис от вектори с еднаква дължина $e_1, e_2, \ldots$ кориевите системи Σ на класическите прости алгебри на Ли от ранг n са следните [45, стр.492] :

$$\Sigma(A_n) = \{ e_j - e_k \ , j \neq k \ , j,k = 1,\ldots, n+1 \} , \qquad /3.43/$$

$$\Sigma(B_n) = \{ \pm e_j \ , j = 1,\ldots,n \ ; \pm e_j \pm e_k \ , j<k \ , j,k = 1,\ldots,n \} , \qquad /3.44/$$

$$\Sigma(C_n) = \{ \pm 2 e_j \ , j = 1,\ldots,n \ ; \pm e_j \pm e_k \ , j<k \ ; j,k = 1,\ldots,n \} , \qquad /3.45/$$

$$\sum(D_n)=\{\pm e_i \pm e_j \ , \ i<j \ , \ i,j=1,\dots,n \ , \ n>1\} \ . \tag{3.46}$$

Корневите системи та петте особени алгебри могат да се запишат, както следва. Нека $e_1, e_2, \dots$ е ортогонален базис в евклидово пространство. Полагаме

$$e^{(r)} = e_1+e_2+\dots+e_r \ ,$$

Тогава

$$\sum(G_2)=\{e_i-e_j, \pm(e^{(3)}-3e_i), \ i,j=1,2,3\} \ , \tag{3.47}$$

$$\sum(F_4)=\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j \ , \ \tfrac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4), \ i,j=1,2,3,4\} \tag{3.48}$$

$$\sum(E_6)=\{e_i-e_j, \pm e_7\sqrt{2}, \pm(\frac{e_7}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}e^{(6)}-e_i-e_j-e_k), i,j,k=1,\dots,6\} \tag{3.49}$$

$$\sum(E_7)=\{e_i-e_j, (\tfrac{1}{2}e^{(8)}-e_i-e_j-e_k-e_m), i,j,k,m=1,\dots,8\} \tag{3.50}$$

$$\sum(E_8)=\{\pm e_i \pm e_j, \pm(\tfrac{1}{2}e^{(8)}-e_i), \pm(\tfrac{1}{2}e^{(8)}-e_i-e_j-e_k), i,j,k=1,\dots,8\} \tag{3.51}$$

В корневите системи /3.47 - 51/ всеки два буквени индекса са различни.

Не е трудно да се убедим, че във всяка от приведените системи съществуват множество ортогонални подсистеми. Алгебрите B_n, C_{2m}, D_{2m} и всички особени алгебри съдържат ортогонални системи от корени, задаващи базис в подалгебрата на Картан. В случая на алгебрите C_{2m} и D_{2m} такава е например системата от вектори $\tilde{\Phi}$

$$\begin{gathered} e_1+e_2 \ , \ e_3+e_4, \dots, e_{2m-1}+e_{2m} \ , \\ e_1-e_2 \ , \ e_3-e_4, \dots, e_{2m-1}-e_{2m} \ . \end{gathered} \tag{3.52}$$

Съответствуващата на $\tilde{\Phi}$ система $X_{\tilde{\Phi}}$ от корневи вектори поражда в D_{2m} подалгебрата

$$\underbrace{B_1 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_1} \subset D_{2m} \qquad /3.53/$$

докато в C_{2m} това е

$$B_2 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_2 \subset C_{2m} \qquad /3.54/$$

Ето защо и в двата случая $\tilde{\phi}$ не е пълна система.

В C_n може да се избере и друг ортогонален базис $\phi' = (2e_1, 2e_2, \dots, 2e_n)$. Тъй като $\pm 2e_i \pm 2e_j$ не е корен, корневите вектори $e_{\pm 2e_i}$, $i = 1, \dots, n$ генерират подалгебра, изоморфна на пряка сума от n алгебри B_1, и ϕ' отново не е пълна система. Аналогично се показва, че ортогоналните системи от корени в особените алгебри също не са пълни. В алгебрата A_n /с изключение на $n = 1$, когато $A_1 \sim B_1 \sim C_1$ и $n = 3$ - $A_3 \sim D_3$/ няма ортогонален базис от корени. Същото се отнася и за D_{2m+1}.

От всички прости алгебри на Ли остава единствено алгебрата B_n на ортогоналната трупа $SO(2n+1)$, отговаряща на изискванията. За да се убедим в това въвеждаме системата от корени

$$\phi = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \} \qquad /3.55/$$

Тази система е ортогонална съвкупност от вектори и, както веднага се вижда от /3.44/, всеки корен от B_n е линейна комбинация на елементи от ϕ с целочислени коефициенти. Следователно ϕ е пълна ортогонална система от корени в B_n.

По такъв начин всеки прост идеал $\mathcal{A}_i(m_i)$ в /3.40/ е изоморфен на B_{m_i}, което доказва теоремата.

4. Параферми-квантуване /B-квантуване/

Важна конкретизация на доказаната теорема се получава, ако се наложи изискването, породената от операторите на раждане и унищожение алгебра $\mathcal{A}$ да е проста. За този случай се отнася

Следствие 4.1. Алгебрата $\mathcal{A}$ от най-нисък ранг, задаваща просто квантуване с n двойки оператори на раждане и унищожение, е изоморфна на класическата алгебра B_n .

За намиране на комутационните съотношения между операторите на раждане и унищожение би могло да се изходи от явния вид на генераторите на B_n в някое матрично представяне, например в низшето точно представяне. Предпочитаме да не прибягваме до конкретна реализация.

Ще забележим най-напред, че при $i \neq j$

$$\xi\omega_i + \eta\omega_j \in \sum(B_n) \ , \quad \xi,\eta = \pm \ , \tag{4.1}$$

поради което

$$[a_i^{\xi}, a_j^{\eta}] \neq 0 \ . \tag{4.2}$$

Както знаем, при $i=j$ и $\xi = -\eta$

$$[a_i^{\xi}, a_i^{-\xi}] \in \mathcal{H} \ . \tag{4.3}$$

По такъв начин комутаторът между всеки два различни оператора на раждане и унищожение a_i^{ξ} , a_j^{η} не е 0, а корневи вектор.

Да разгледаме двойните комутатори

$$[[a_i^{\xi}, [a_j^{\eta}, a_k^{\delta}]] \ . \tag{4.4}$$

Векторът

$$\xi\omega_i + \eta\omega_j + \delta\omega_k \in \sum(B_n) \ , \tag{4.5}$$

само ако сумата на две от трите слагаеми е 0. Затова единственият неизвестен двоен комутатор е от вида

$$[a_i^{\xi}, [a_i^{-\xi}, a_j^{\eta}]] \ . \tag{4.6}$$

При $a_i^{-\xi} \neq a_j^{\eta}$ вътрешният комутатор не е 0 и коренът на /4.6/ е $\eta\omega_j$. Това значи, че комутаторът /4.6/ е пропорционален на a_j^{η} . Използувайки тъждеството на Якоби и основното съотношиние за квантуструктурни съотношения, в които същественото е, че вътрешният комутатор в /4.12/ се заменя с антикомутатор:

$$[\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\}, a_k^{\delta}] = (\delta-\xi)\delta_{ik} a_j^{\eta} + (\delta-\eta)\delta_{kj} a_i^{\xi} . \qquad /4.13/$$

Именно поради тази причина парабозе-операторите не могат да бъдат вложени в Ли-алгебрична структура и да бъдат изучавани с методите на представянията на алгебрите на Ли.

Като едно възможно обобщение на статистиката в квантовата теория на полето пара-операторите са въведени за първи път от Грин [4], който ги постулира, изхождайки от основните съотношения /1.25-25/ за спинорни полета / $\varepsilon = -$/ и тензорни полета / $\varepsilon = +$/. Те могат да бъдат изведени от тези съотношения, ако се изисква инвариантността им спрямо унитарни преобразования [46]. Видяхме, че определящото равенство /4.12/ за параферми-операторите има и по-дълбок, Ли-алгебричен смисъл - тези оператори затварят проста алгебра на Ли. Затова, ако се заимствува алгебрична терминология, параферми-квантуването може да се нарече и просто квантуване. Като се използува съществено Ли-алгебричната структура на параферми-операторите, във втора глава ще бъдат изучени техните представяния.

Да намерим връзката между операторите на раждане и унищожение и генераторите на низшето $2n+1$-мерно точно матрично представяне $\hat{B}_n$ на B_n. Произволна матрица T в това представяне има следния блочен вид [вж.напр. 15, стр.1/9]: Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, Ann. Phys. v. 51, p. 337 (1969)

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ n \\ n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \quad & n \quad & n \end{matrix} & \end{array} \qquad /4.14/$$

където $T_{00}=0$, $T_{22} = -\overset{T}{T}_{11}$, а T_{12} и T_{21} са антисиметрични n-мерни матрици.

ване /3.2/ и означавайки коефициента на пропорционалност с C_{ji}^{η}, получаваме

$$[a_i^{\xi},[a_i^{-\xi},a_j^{\eta}]] = [a_i^{-\xi},[a_i^{\xi},a_j^{\eta}]] = C_{ji}^{\eta}a_j^{\eta} \qquad /4.7/$$

За пресмятане на C_{ji}^{η} ще използуваме присъединеното представяне

$$x \longrightarrow \mathrm{ad}\,x \equiv \hat{x}\ ,\quad x \in B_n\ . \qquad /4.8/$$

Действуваме с нулевия оператор $(i \neq j)$

$$[[\hat{a}_i^{\xi},\hat{a}_i^{-\xi}],\hat{a}_j^{\eta}] = \mathrm{ad}\,[[a_i^{\xi},a_i^{-\xi}],a_j^{\eta}] = 0 \qquad /4.9/$$

върху вектора $a_i^{\xi} \in B_n$:

$$[[\hat{a}_i^{\xi},\hat{a}_i^{-\xi}],\hat{a}_j^{\eta}]\cdot a_i^{\xi} = [a_i^{\xi}[a_i^{-\xi}[a_j^{\eta},a_i^{\xi}]]]-[a_i^{-\xi}[a_i^{\xi}[a_j^{\eta},a_i^{\xi}]]]-$$

$$-[a_j^{\eta}[a_i^{\xi}[a_i^{-\xi},a_i^{\xi}]]]+[a_j^{\eta}[a_i^{-\xi}[a_i^{\xi},a_i^{\xi}]]]=0\ .$$

Оттук, като се използува ОСК и обстоятелството, че $2\xi\omega_i+\eta\omega_j$ не е корен, се получава

$$(C_{ji}^{\eta}-2)[a_i^{\xi},a_j^{\eta}] = 0\ . \qquad /4.10/$$

Вече знаем, че $[a_i^{\xi},a_j^{\eta}]$ при $i\neq j$ не е 0. Следователно

$$[a_i^{\xi}[a_i^{-\xi},a_j^{\eta}]] = [a_i^{-\xi}[a_i^{\xi},a_j^{\eta}]] = 2a_j^{\eta} \qquad /4.11/$$

Всевъзможните трилинейни комутационни съотношения между операторите на раждане и унищожение могат да се запишат компактно с едно равенство

$$[[a_i^{\xi},a_j^{\eta}],a_k^{\delta}] = \tfrac{1}{2}(\eta-\delta)^2\delta_{jk}a_i^{\xi}-\tfrac{1}{2}(\xi-\delta)^2\delta_{ik}a_j^{\eta} \qquad /4.12/$$

където $\xi,\eta,\delta = \pm$ или ± 1 ; $i,j,k = 1,2,\dots,n$.

Операторите, удовлетворяващи трилинейните комутационни съотношения /4.12/, се наричат параферми-оператори. Аналогът им за тензорни полета са парабозе-операторите. Те удовлетворяват подобни

Картановата подалгебра $\mathcal{H}$ се дава от съвкупността от всевъзможните диагонални матрици

$$h = \mathrm{diag}\left(0, t^1, t^2, \dots, t^n, -t^1, -t^2, \dots, -t^n\right). \qquad /4.15/$$

Като се номерират стълбовете и колоните на T $0,1,2,\dots,n$, $-1,-2,\dots,-n$, алгебрата B_n може да се представи като пряка сума от подпространства

$$B_n = \mathcal{H} \underset{r}{\oplus} \mathbb{C} e_r \; , \qquad /4.16/$$

където $\mathbb{C} e_r$ е едномерната линейна обвивка на дефинираната по-долу матрица e_r, а $\oplus$ означава пряка сума между подпространства:

$$e_r = \begin{cases} e_{i,j} - e_{-j,-i} \quad , & -e_{-i,-j} + e_{ji} \\ e_{i,-j} - e_{j,-i} \quad , & -e_{-i,j} + e_{-j,i} \qquad 0 < i < j \leq n \\ 2e_{i,0} - e_{0,-i} \quad , & -2e_{-i,0} + e_{0,i} \end{cases} \qquad /4.17/$$

Тук e_{ij} е матрица с (ij)-ти матричен елемент $=1$ и всички останали $=0$.

Ако за базис в Картановата подалгебра се приемат векторите

$$h_i = e_{ii} - e_{-i,-i} \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \quad , \qquad /4.18/$$

то лявата /респ. дясната/ колона от матрици в /4.17/ задава съвкупността от положителните /респ. отрицателните/ корневи вектори.

Операторите на раждане и унищожение имат вида:

$$\begin{aligned} a_i^- &= 2e_{i0} - e_{0,-i} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,\dots,n \; , \\ a_i^+ &= -2e_{-i,0} + e_{0i} \end{aligned} \qquad /4.19/$$

а съответната пълна ортогонална система от вектори, състояща се от корени на a_i^- , $i=1,\dots,n$, се дава с векторите от контравариантния базис в $\mathcal{H}$,

$$\phi = (h^1, h^2, \dots, h^n) , \qquad /4.20/$$

където

$$h^i = \frac{[a_i^-, a_i^+]}{8n-4} = \frac{h_i}{4n-2} . \qquad /4.21/$$

Билинейната форма на Картан-Килинг е положително определена върху реалната линейна обвивка на корените $\mathcal{H}^r$ и въвежда скаларно произведение в $\mathcal{H}$:

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij}(4n-2) . \qquad /4.22/$$

В дисертацията не се отделя специално внимание на особените алгебри на Ли, тъй като при използувания подход, те не представляват интерес. Затова тук съвсем накратко, без да ги отделяме в нов параграф, ще отбележим едно от свойствата им, което при известна модификация на следваната схема, може да доведе до интересни резултати.

В Картановата подалгебра на всяка особена алгебра може да се въведе ортогонален базис от корени, чиито корневи вектори удовлетворяват основното съотношение за квантуване. Разбира се, тези вектори не пораждат алгебрата. Същевременно за всяка особена алгебра в $\mathcal{H}$ може да се избере базис от пълна, но не ортогонална система от корени. Ще приведем пример с алгебрата F_4 , която е и от по-особен интерес. Както се вижда от /3.48/ , корневата система $\sum(F_4)$ съдържа 4 ортогонални вектора: $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{H}$. Съответствуващите на $\pm e_i$ корневи вектори $a_i^{\pm}$, $i=1,2,3,4$ са оператори на раждане и унищожение, пораждащи подалгебрата $B_4 \subset F_4$. От друга страна, за пълен базис в $\mathcal{H}$ могат да се приемат корените:

$$\alpha_0 = \tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4) , \quad \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4) ,$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3-e_4) , \quad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}(-e_1-e_2+e_3-e_4) . \qquad /4.23/$$

За симетрия въвеждаме още корена

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4) \quad . \qquad /4.24/$$

Нека $q_k^{\pm}$, $k=1,2,3,4$ са корневите вектори на $\pm\alpha_k$. Тогава

$$e_i = \alpha_0 + \alpha_i \, , \quad i = 1,2,3,4 \, , \qquad /4.25/$$

поради което /с точност до константа/

$$a_i^{\pm} = [q_0^{\pm}, q_i^{\pm}] \, , \quad i = 1,2,3,4 \, . \qquad /4.26/$$

По такъв начин операторите на раждане и унищожение могат да се построят от по-фундаментални обекти . Операторите $q_i^{\pm}$ не удовлетворяват изходното съотношение за квантуване и затова не могат да бъдат интерпретирани като оператори на раждане или унищожение на реални частици. От тях обаче се строят оператори на раждане и унищожение с правилни трансформационни свойства. В този смисъл пораждащите алгебрата F_4 оператори $q_i^{\pm}$ имат свойства, аналогични на кварките.

5. Унитарно квантуване /А-квантуване/

Видяхме, че основното съотношение за квантуване /3.2/ се удовлетворява с генератори на проста алгебра на Ли, когато операторите на раждане и унищожение са генератори, пораждащи B_n . Естествено възниква въпросът, защо сред простите алгебри на Ли алгебрата на ортогоналната група $SO(2n+1)$ играе своего рода привилегирована роля в квантовата теория на спинорните полета и не е ли възможна модификация на приетата схема, така че да е допустимо квантуване с генератори на други прости алгебри на Ли.

За да си отговорим на този въпрос, да се върнем и анализираме отново приетите и формулирани в § 1 постулати за квантуване. Очевидно е, че постулатът за релативистична инвариантнаст не може да се мени. Основният постулат за квантуване също трудно би могъл да се модифицира, без при това да се измени същината на квантовата теория на полето. Във формулировката му обаче има един момент, на който бихме искали да се спрем по-подробно. Става дума за това, че с този постулат не се дефинира редът на изобщо не комутиращите помежду си операторни множители. С третия постулат /за симетризация/ бе фиксиран и този ред. Дали той обаче е единствено възможен и не се ли налагат по този начин твърде силни ограничения?

Да разгледаме този въпрос с примера на параферми-статистиката. Най-напред записваме оператора на 4-импулса в дискретно импулсно представяне. Като се предполага, че полето е затворено в пространствен куб с ребро L, периодично по всяка координата със същия период за 4-импулса в нормална форма се получава[36]:

$$:P^m: = \sum_n K_n^m a_n^+ a_n^- , \qquad /5.1/$$

където $n \equiv (n_1, n_2, n_3)$ и сумата по целите числа n^α е от минус до плюс безкрайност;

$$K_n^\alpha = \frac{2\pi}{L} n^\alpha , \quad K_n^0 = \sqrt{m^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left[(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2\right]} .$$

Ако сега предположим, че $a_n^\pm$ са параферми-оператори, не е трудно да се убедим, че за $:P^m:$ не се изпълнява основното уравнение за квантуване /1.23/. Изходът от това затруднение ни е известен и се дава с постулата за симетризация - вместо нормално трябва да се вземе антисиметризирано произведение, т.е.

$$P_c^m = \frac{1}{2} \sum_n K_n^m [a_n^+, a_n^-] . \qquad /5.2/$$

За връзката между двете форми на 4-импулсите имаме

$$P_c^m = :P^m: - q \qquad /5.3/$$

където $q = \frac{1}{2} \sum K_n^m \{a_n^+, a_n^-\}$.

В случай на ферми-статистика

$$\{a_n^+, a_n^-\} = 1$$

и затова

$$q = \frac{1}{2}\sum_n K_n^m \qquad /5.5/$$

В този случай двата оператора на енергията се различават с /безкрайна/ константа, която може да се пренебрегне. Тук както $:P^m:$, така и P_c^m удовлетворяват ИУК /1.23/. В по-общия случай обаче q е оператор и двата израза не са еквивалентни. По такъв начин може да се счита, че посулатът за симетризация е равнозначен на добавяне към $:P^m:$ на подходящо избран оператор $-q$, така че полето да има правилни трансформационни свойства при транслации:

$$[P_c^m, \varphi(x)] = -i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_m} . \qquad /5.6/$$

Пита се: може ли към оператора на 4-импулса да се добавят други,подходящо избрани оператори , така че схемата за квантуване да е самосъгласувана и операторите $a_i^{\pm}$ да са генератори, пораждащи някоя от останалите прости алгебри на Ли. За да отговорим на този въпрос, да погледнем на прехода от ферми- към парафермй-статистиката от друг, разбира се , еквивалентен, но по-удобен за обобщения аспект. Ще го разчленим в няколко части.

1. Изхожда се от представяне на операторите $a_i^{\pm}$, $i = 1,2,\ldots$, така че всевъзможните им комутатори да генерират матрично представяне $\hat{A}$ на класическата алгебра A , а 4-векторът на енергията-импулса, записан в нормална форма,

$$P^m = \sum_i K_i^m a_i^+ a_i^- \qquad /5.7/$$

да изпълнява изходното уравнение за квантуване /1.23/

$$[P^m, a_i^{\pm}] = \pm K_i^m a_i^{\pm} . \qquad /5.8/$$

$A = B_n$, операторите, удовлетворяващи тези изисквания, са ферми-операторите на раждане и унищожение:

$$\{ a_i^{\xi}, a_j^{\eta} \} = \frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 \delta_{ij} \ . \qquad /5.9/$$

2. Като се използуват свойствата на матричното представяне $\hat{\mathcal{A}}$, 4-импулсът P^m се представя във вид на сума от две слагаеми,

$$P^m = P_c^m + Q^m \qquad /5.10/$$

първата от които е елемент от картановата подалгебра на $\hat{\mathcal{A}}$. Когато $\mathcal{A} = B_n$ тези слагаеми са

$$P_c^m = \frac{1}{2} \sum_i K_i^m [a_i^+, a_i^-] , \qquad /5.11/$$

$$Q^m = \frac{1}{2} \sum_i K_i^m ,$$

Освен това

$$[a_i^{\pm}, Q^m] = 0 \qquad /5.12/$$

Целта тук е ясна: да се представи матричното произведение $a_i^+ a_i^-$, което не е Ли-алгебрична операция и следователно не се запазва при преминаване към други представяния на $\mathcal{A}$, чрез Ли-алгебрични действия - суми и комутатори по възможност с минимално разширение на алгебрата $\mathcal{A}$ /в представянето $\hat{\mathcal{A}}$/. В случай на B_n разширението се свежда до добавяне на константата Q^m.

В по-общия случай също разглеждаме представяния на операторите $a_i^{\pm}$, при които комутаторът /5.12/ се запазва. По такъв начин се запазва естествено и комутационното съотношение /5.8/. Представянията, в които наред с комутационните съотношения между операторите $a_i^{\pm}$ се запазва и /5.12/ , а следователно и /5.8/, са очевидно представяния на алгебрата на Ли $\tilde{\mathcal{A}}$, породена от матричното представяне $\hat{\mathcal{A}}$ на $\mathcal{A}$ и операторът Q^m. В случай на ферми-оператори, когато $\mathcal{A} = B_n$, операторът Q^m комутира с всички генератори на алгебрата B_n и затова във всяко друго представяне е /въобще зависеща от представянето/ константа.

3. Приемаме, че във всяко представяне на алгебрата $\tilde{\mathcal{A}}$ операторът на 4-импулса P^m се дефинира с равенството /5.10/. Въз основа на посоченото заключаваме, че той има правилни трансформационни свойства.

Когато $\mathcal{A} = B_n$, операторът Q^m е константа, която може да се пренебрегне и за 4-импулс да се вземе P^m_c.

И така, ако приемем за изходно представянето на $a_i^{\pm}$ с ферми-оператори, то от посочените три изисквания произтича квантуване с параферми-оператори. В по-общия случай на произволна алгебра $\mathcal{A}$ ще разглеждаме условия 1-3 като изходни за обобщаване на схемата на квантуване. Те, разбира се, едва ли трябва да се абсолютизират - някои от тях може да отразяват специфични свойства на параферми-квантуването. В последна сметка важното е да се построи непротиворечива схема за квантуване. В рамките на трите изисквания нетривиалната част е намирането на аналог на ферми-операторите-изходното матрично представяне на $a_i^{\pm}$, което да генерира $\mathcal{A}$, а операторът на 4-импулса да има правилни трансформационни свойства /5.8/. По-нататък в този параграф ще бъде направен опит да се удовлетворят постулатите 1-3 с генератори, пораждащи алгебрата на групата $SL(n+1)$.

Удобно е алгебрата A_n на $SL(n+1)$ да се разглежда като подалгебра на алгебрата $gl(n+1)$, която е изоморфна на множеството от всевъзможните квадратни $(n+1)$-мерни матрици. Съвкупността от квадратните $(n+1)$-мерни матрици

$$\{ e_{ij} \mid i,j = 0,1,2,\dots,n \} \qquad /5.13/$$

[illegible] базис в алгебрата. Подмножеството на матриците със следа 0 е [illegible]фно на простата класическа алгебра на Ли A_n. Нека $\tilde{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{H}$ [illegible]ветно множествата от диагоналните матрици и диагоналните матрици [illegible] следа 0. $\mathcal{H}$ е Картанова подалгебра на A_n. Изхождайки от подреден базис

$$\tilde{H} = \{ h_i \mid h_i = e_{ii} \ , \ i = 0, 1, \dots, n \} , \qquad /5.13/$$

ще дефинираме скаларно произведение в $\tilde{\mathcal{H}}$:

$$(h_i , h_j) = 2(n+1) \delta_{ij} \ . \qquad /5.14/$$

Въведената метрика е удобна с това, че, ограничена върху $\mathcal{H}$, съвпада с билинейната форма на Картан-Килинг. С точност до изоморфизъм

$$A_n = \mathcal{H} \overset{n}{\underset{i \neq j = 0}{\oplus}} \mathbb{C} e_{ij} \ , \qquad /5.15/$$

където

$$\mathbb{C} e_{ij} = \text{л.о.} \{ e_{ij} \} \ . \qquad /5.16$$

Матриците e_{ij} , $i \neq j$, са корневи вектори на алгебрата. Ако ω_r е коренът на корневия вектор e_r , то от релацията

$$[h , e_r] = (h , \omega_r) \, e_r \qquad /5.17/$$

лесно се показва, че $h^i - h^j$ са корени на A_n , а съответствието между корневите вектори и корените е

$$e_{ij} \longrightarrow h^i - h^j \ , \ i \neq j = 0, 1, \dots, n, \qquad /5.18/$$

където $h^0, \dots, h^n$ са векторите от контравариантния базис в $\tilde{\mathcal{H}}$. За корневата система $\Sigma(A_n)$ се получава естествено съвкупността /3.43/. В базиса /5.13/ матриците

$$e_{ij} \quad i < j \quad (i > j) \ , \ i \neq j = 0, 1, \dots, n \qquad /5.19/$$

са положителните /респ. отрицателните/ корневи вектори на A_n .

Записваме генераторите на $gl(n+1)$ във вид на квадратна матрица:

$$\begin{pmatrix} e_{00} & e_{01} & e_{02} \cdots & e_{0n} \\ e_{10} & e_{11} & e_{12} \cdots & e_{1n} \\ e_{20} & e_{21} & e_{22} \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n0} & e_{n1} & e_{n2} \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} \qquad /5.20/$$

Като изключим елемента e_{oo} , който не принадлежи на A_n , означаваме генераторите от първия стълбец с a_i^+ , а тези от първия ред - с a_i^- ,т.с.

$$a_i^+ = e_{io} \quad , \quad a_i^- = e_{oi} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n . \qquad /5.21/$$

Съответствието между корневите вектори и корените им е

$$a_i^\pm \longleftrightarrow \mp(h^o - h^i) \quad , \quad i = 1,\ldots,n \qquad /5.22/$$

Произволен корен е сума на корени от вида /5.22/,т.с.

$$h^i - h^j = (h^i - h^o) - (h^j - h^o) \quad , \quad i \neq j \qquad /5.23/$$

и съгласно определение 3.4 системата

$$\Phi = \{ h^1 - h^o, h^2 - h^o, \ldots, h^n - h^o \} \qquad /5.24/$$

е пълна /разбира се, не ортогонална/ система от корени. Следователно операторите $a_i^\pm$ пораждат A_n и комутационните съотношения в алгебрата трябва да могат да се изразят само в термини на многократни комутатори от тези оператори. Използувайки релацията

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj} , \qquad /5.25/$$

намираме

$$[[a_i^+, a_j^-], a_k^+] = \delta_{kj} a_i^+ + \delta_{ij} a_k^+ , \qquad /5.26а/$$

$$[[a_i^+, a_j^-], a_k^-] = -\delta_{ki} a_j^- - \delta_{ij} a_k^- , \qquad /5.26б/$$

$$[a_i^+, a_j^+] = [a_i^-, a_j^-] = 0 , \qquad /5.26в/$$

по-компактно

$$\ldots a_j^{-\eta}], a_k^{\xi}] = \frac{1}{2}(1+\xi\eta)\delta_{jk} a_i^{\eta} - \frac{1}{2}(1-\xi\eta)\delta_{ik} a_j^{-\eta} + \qquad /5.27/$$
$$+ \xi\eta\delta_{ij} a_k^{\xi} ,$$

където $\xi, \eta = \pm$ или ± 1;

В изходното матрично представяне, дефинирано с $(n+1)$-мерните матрични генератори e_{ij}, последните удовлетворяват матричното равенство

$$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il} \qquad /5.28/$$

Като се използува /5.28/, не е трудно да се провери, че в това представяне операторът

$$P^m = \sum \kappa_i^m a_i^+ a_i^- \qquad /5.29/$$

изпълнява основното уравнение за квантуване /5.8/.

По такъв начин в изходното представяне на A_n операторите $a_i^{\pm}$ удовлетворяват първото условие на следваната схема и следователно те са търсеният аналог на ферми-операторите.

В произволно представяне на A_n операторите $a_i^{\pm}$ удовлетворяват комутационни съотношения, аналогични на трилинейните съотношения за параферми-операторите. В известен смисъл релациите /5.26/ са даже по-естествени, тъй като поотделно положителночестотните и отрицателночестотните оператори a_i^+ и a_i^- комутират помежду си.

<u>Определение 5.1</u>. Операторите a_i^+ и a_i^-, удовлетворяващи комутационните съотношения /5.26/, ще наричаме a-оператори /унитарни оператори/ на раждане и унищожение.

Названието a-оператори подсказва, че $a_i^{\pm}$ са генератори от A_n. Щом е ясно, че става дума за тях, ще продължим да ги наричаме просто оператори на раждане и унищожение.

Удовлетворихме първото условие на следваната схема за квантуване - намерихме аналог на ферми-операторите. За да удовлетворим останалите изисквания, ще запишем $a_i^+ a_i^-$ в $(n+1)$-мерното представяне като сумо от две слагаеми:

$$a_i^+ a_i^- = [a_i^+ , a_i^-] + e_{00} . \qquad /5.30/$$

Тук използувахме обстоятелството, че в това представяне

$$e_{0i}\cdot e_{i0} = e_{00} \qquad /5.31/$$

По такъв начин за оператора на 4-импулса получаваме

$$P^m = \sum_i K_i^m \{[a_i^+, a_i^-] + e_{00}\} = P_c^m + C^m \quad , \qquad /5.32/$$

където

$$P_c^m = \sum K_i^m [a_i^+, a_i^-] \in \mathcal{H} \; ; \qquad /5.33/$$

$$C^m = \sum K_i^m e_{00} \quad .$$

Освен това

$$[a_i^\pm, e_{00}] = \pm a_i^\pm \quad , \qquad /5.34/$$

поради което

$$[a_i^\pm, C^m] = \pm \sum_j K_j^m a_i^\pm \in A_n \; . \qquad /5.35/$$

В тези равенства не прецизираме сумата по i , тъй като при извода им тя не се използува. Навсякъде може да считаме, че i е безкрайност. Отново ще подчертаем, че получените релации са верни само за изходното матрично представяне - при получаването им бе съществено използувано матричното умножение /5.31/, което не е Ли-алгебрична операция и зависи от представянето.

Сега постулираме, че във всяко представяне на a-операторите на раждане и унищожение:

а) операторът на 4-импулса се дава с равенството /5.32/;

б) e_{00} е оператор, удовлетворяващ комутационното съотношение /5.34/.

Лесно се проверява, че при тези предположения се получават [illegible] трансформационни свойства за полето в импулсно представяне:

$$[P^m, a_i^\pm] = \pm K_i^m a_i^\pm \quad . \qquad /5.35/$$

Ако вместо P^m за оператор на 4-импулса се приеме /както в параферми-случая/ симетризираният израз P_c^m, тогава

$$[P_c^m, a_i^\pm] = \pm k_i^m a_i^\pm \pm \delta_0^m C a_i^\pm . \qquad /5.36/$$

константата

$$C = \sum_i k_i^0 \qquad /5.37/$$

при сумиране по $i = (i^1, i^2, i^3)$ от $-\infty$ до ∞ е безкрайна положителна величина.

Операторът e_{oo} има добре определен Ли-алгебричен смисъл. Наистина с постулирането на комутатора /5.34/ за всяко представяне на A_n по същество постулирахме, че това е e_{oo}-генераторът на алгебрата $gl(n+1)$. Този генератор заедно с a-операторите на раждане и унищожение поражда цялата алгебра $gl(n+1)$. По такъв начин с въвеждането на e_{oo} разширихме простата алгебра A_n до алгебрата $gl(n+1)$.

Аналогът на представянето на ферми-операторите в този случай е изходното представяне на алгебрата A_n. За него $(a_i^+)^* = a_i^-$, така че полето е ермитово. Векторите на състояние се определят по естествен начин. Вакуумът на системата $|0\rangle$, анулиращ се от операторите на унищожение a_i^- и произволно "едночастично състояние" като вектори от пространството на изходното представяне имат вида

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_i^+|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \\ i \\ \\ \vdots \\ n \end{array} \qquad /5.38/$$

Като се вземе под внимание, че в това представяне

$$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$$

се получава

$$a_i^- a_j^+ |0\rangle = \delta_{ij} |0\rangle$$
$$a_i^+ a_j^+ |0\rangle = 0 \quad . \qquad /5.39/$$

Операторът e_{oo} запазва вакуума и анулира всички останали състояния:

$$e_{oo}|0\rangle = e_{oi} e_{io} |0\rangle = a_i^- a_i^+ |0\rangle = |0\rangle ,$$
$$e_{oo}|i\rangle = a_i^- a_i^+ a_i^+ |0\rangle = 0 \qquad i \neq 0 \qquad /5.40/$$

Виждаме, че в изходното представяне A-статистиката налага силни ограничения върху векторите на състояние - възможни са само едночастични състояния. Многочастични състояния могат да се получат, ако се разглеждат представяния от по-висш порядък. Този въпрос ще бъде разгледан във втората глава при изучаване на представянията на операторите на раждане и унищожение.

6. Четно-ортогонално квантуване / D -квантуване/

В предишния параграф се спряхме на една от възможностите за обобщаване на статистиката, основаваща се на известна модификация на третия постулат за квантуване /за симетризацията/. До този момент обаче все още не сме изчерпали всички възможности в рамките на този постулат. Както се знае от § 1, изходното уравнение за квантуване /1.24/ , в което е заложен постулатът за симетризация, се удовлетворява както от основното съотношение /1.25/, така и от израденото съотношение за квантуване /1.26/. Първото от тях бе вече разгледано. При просто квантуване то се удовлетворява от параферми-операторите на раждане и унищожение. В този и следващия параграф по-подробно ще бъдат разгледани възможностите, които предоставя изроденото съотношение за квантуване /ИСК/. В случай на изброим или краен брой оператори това съотношение се записва във вида

$$\sum_{,\eta=\pm}[[a^{+}_{\eta i}, a^{-}_{\eta i}], a^{\varepsilon}_{\xi j}] = 2\varepsilon\delta_{ij}a^{\varepsilon}_{\xi j} \qquad /6.1/$$

Ще покажем, че в рамките на просто квантуване /определение 3.3/ ИСК /3.1/ може да се удовлетвори с генератори, пораждащи алгебрата на четно-ортогоналната, и алгебрата на симплектичната група. В параграфа ще се спрем на връзката между ИСК и алгебрата на четно-ортогоналната група. По-точно се има предвид следното. Нека индексите i,j в /6.1/ пробягват значения от 1 до n. Твърдението е, че уравнението /6.1/ може да се удовлетвори с оператори, линейната обвивка на всевъзможните комутатори на които е изоморфна на класическата проста алгебра на Ли D_{n+1}. Последната, както е известно, е алгебрата на Ли на групата от $2(n+1)$-мерни ортогонални матрици $SO(2n+2)$

За установяване на връзката между операторите на раждане и унищожение и генераторите на D_{n+1} е удобно и в този случай, както и за B_n, да се изхожда от низшето $2(n+1)$-мерно точно представяне $\hat{D}_{n+1}$ на D_{n+1}. Произволна матрица T принадлежи на D_{n+1} тогава и само тогава, когато е представима в блочен вид от $(n+1)$-мерни квадратни матрици T_{ij}, $i,j = 1,2$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \qquad /6.2/$$

където $T_{22} = -\overset{T}{T}_{11}$, а T_{12} и T_{21} са антисиметрични матрици. За Картанова подалгебра $\mathcal{H}$ на D_{n+1} може да се приеме съвкупността от всевъзможните диагонални матрици:

$$h = \mathrm{diag}\,(t^0, t^1, \dots, t^n, -t^0, -t^1, \dots, -t^n) \qquad /6.3/$$

Като номерираме стълбовете и колонките на T $0,1,2,\dots,n,-0,-1,\dots$ $\dots,-n$, /0 и -0 са различни индекси / можем да напишем

$$D_{n+1} = \mathcal{H} \bigoplus_r \mathbb{C} e_r \,, \qquad /6.4/$$

където $\mathbb{C} e_r \equiv$ л.о. e_r е едномерната линейна обвивка на вектора e_r. В разглежданата матрична реализация тези вектори се представят във вида

$$e_r = \begin{cases} e_{i,j} - e_{-j,-i} & -e_{-i,-j} + e_{ji} \\ e_{i,-j} - e_{j,-i} & -e_{-i,j} + e_{-j,i} \end{cases} \quad 0 \leq i < j \leq n \qquad /6.5/$$

Векторите e_r са корневите вектори на алгебрата/разбира се,не само в това представяне/ . Ще изберем за H -базис в Картановата подалгебра векторите

$$h_i = e_{ii} - e_{-i,-i} \;, \quad i = 0,1,2,\dots,n \,. \qquad /6.6/$$

Този базис е ортогонален спрямо формата на Картан-Килинг. Не е трудно да се покаже, че

$$(h_i, h_j) = 4n\delta_{ij} \qquad /6.7/$$

Произволен елемент $h \in \mathcal{H}$ трансформира корневите вектори по формулите

$$[h, e_{ij} - e_{-j,-i}] = (\overset{*}{h}{}^i - \overset{*}{h}{}^j)(h)\cdot(e_{ij} - e_{-j,-i}),$$

$$[h, -e_{-i,-j} + e_{ji}] = (\overset{*}{h}{}^j - \overset{*}{h}{}^i)(h)\cdot(-e_{-i,-j} + e_{ji}),$$

$$[h, e_{i,-j} - e_{j,-i}] = (\overset{*}{h}{}^i + \overset{*}{h}{}^j)(h)\cdot(e_{i,-j} - e_{j,-i}), \qquad /6.8/$$

$$[h, e_{-i,j} - e_{-j,i}] = (-\overset{*}{h}{}^i - \overset{*}{h}{}^j)(h)\cdot(-e_{-i,j} + e_{-j,i}),$$

където $\overset{*}{h}{}^0, \overset{*}{h}{}^1, \dots, \overset{*}{h}{}^n$ са векторите от контравариантния базис в спрегнатото пространство $\overset{*}{\mathcal{H}}$. Виждаме, че лявата /респ. дясната/ колонка от елементи e_r в /6.5/ задава съвкупността от положителни /отрицателни/ корневи вектори. Отъждествявайки с помощта на КК-формата линейните функционали $\overset{*}{h}{}^i \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ с вектори $h^i \in \mathcal{H}$, намираме

$$h^i = \frac{h_i}{4n} \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n . \qquad /6.9/$$

Затова навсякъде в десните части на комутационните съотношения /6.8/ вместо $\overset{*}{h}{}^i(h)$ можем да пишем (h, h^i). Взаимно-еднозначното съответствие между корневите вектори и корените /като вектори от $\mathcal{H}$ / е:

$$\begin{aligned} e_{ij} - e_{-j,-i} &\longleftrightarrow h^i - h^j \quad , \\ -e_{-i,-j} + e_{ji} &\longleftrightarrow -h^i + h^j \quad , \\ e_{i,-j} - e_{j,-i} &\longleftrightarrow h^i + h^j \quad , \\ -e_{-i,j} + e_{-j,i} &\longleftrightarrow -h^i - h^j \quad . \end{aligned} \qquad /6.10/$$

Както следваше да се получи, корневата система Σ на разглежданата алгебра съвпада със системата от вектори /3.46/. Простите корени на алгебрата са

$$\pi = \{ h^0 - h^1 , h^1 - h^2 , \ldots , h^{n-1} - h^n , h^{n-1} + h^n \} . \qquad /6.11/$$

Да се опитаме да идентифицираме част от генераторите с оператори на раждане и унищожение. По определение това трябва да е съвкупност от генератори Δ , която

а) да удовлетворява изроденото съотношение за квантуване /6.1/;

б) да поражда D_{n+1} .

Второто изискване е удобно да се формулира още така. Да означим с $[A, B]$, $A, B \subset D_{n+1}$ подпространството

$$[A, B] = \text{л.о.} \{ [a, b] \mid a \in A, b \in B \} ; \qquad /6.12/$$

нека

$$\Delta^{(1)} = \text{л.о.}\,\Delta\,, \quad \Delta^{(2)} = \text{л.о.}[\Delta^{(1)}, \Delta^{(1)}]\,, \quad \Delta^{(3)} = \text{л.о.}[\Delta^{(2)}, \Delta^{(1)}], \ldots$$

$$\ldots, \Delta^{(m)} = \text{л.о.}[\Delta^{(m-1)}, \Delta^{(1)}]\,. \qquad /6.13/$$

Съвкупността от генератори Δ поражда D_{n+1} тогава и само тогава, когато съществува цяла положително число m такова, че

$$D_{n+1} = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \ldots + \Delta^{(m)} \qquad /6.14/$$

т.с. алгебрата може да се представи във вид на крайна сума от подпространства $\Delta^{(i)}$.

Ако се окаже, че избраната система Δ удовлетворява изискванията а) и б), но m зависи от ранга на алгебрата, то съвкупността Δ едва ли би била удобна за физически приложения. В този случай резултатите от крайномерния случай трудно биха се обобщили за алгебри с некраен брой генератори. Затова ще търсим решения, при които m в /6.14/ не зависи от ранга $n+1$ на D_{n+1}.

Естествено е най-напред да се опита със система Δ', състояща се от простите корневи вектори на D_{n+1}. Тъй като Π /6.11/ е пълна система, то корневите вектори $e_{\pm\pi_i}, \pi_i \in \Pi$ пораждат цялата алгебра. В този случай обаче коренът $h^0 - h^n \in \Sigma$ може да се представи като линейна комбинация - в случая сума - от най-малко n прости корена:

$$h^0 - h^n = (h^0 - h^1) + (h^1 - h^2) + \ldots + (h^{n-1} - h^n)\,. \qquad /6.15/$$

Като помним, че корневият вектор на сума от два корена е пропорционален на комутатора от съответствуващите им корневи вектори, заключаваме, че корневият вектор $e_{h^0 - h^n}$ се поражда от Δ' най-малко с n-кратен комутатор на съответствуващите на Δ' корневи вектори. Поради тази причина /която не е единствена / простите корневи вектори не могат да се приемат за оператори на раждане и унищожение.

Ние ще изхождаме от система Δ , съдържаща $4n$ генератора, които в разглежданото матрично представяне се записват по следния начин:

$$\overset{(h^0-h^j)}{d_j^+ = e_{0j} - e_{-j,-0}}\ , \qquad \overset{(-h^0+h^j)}{d_j^- = e_{j0} - e_{-0,-j}}\ , \tag{6.16}$$

$$\overset{(-h^0-h^j)}{d_{-j}^+ = e_{-j,0} - e_{-0,j}}\ , \qquad \overset{(h^0+h^j)}{d_{-j}^- = e_{0,-j} - e_{j,-0}}\ ,$$

В случая елементите на Δ са корневи вектори, което е удобно, макар и незадължитерно изискване. В скобки над корневите вектори за удобство са приведени корените им. Да покажем, че така избраните генератори са оператори на раждане и унищожение /определение 1.2/.

Нека

$$\Phi_\Delta = (h^0 \pm h^j \mid j = 1,2,\dots,n) \tag{6.17}$$

е съвкупността от положителни корени, съответствуваща на корневите вектори от Δ /спрямо подредения базис $h_0, h_1, \dots, h_n$/ При $i,j = 1,\dots,n$

$$\begin{aligned} h^i - h^j &= (h^0 - h^j) - (h^0 - h^i)\ , \\ h^i + h^j &= (h^0 + h^i) - (h^0 - h^j)\ , \\ -h^i - h^j &= -(h^0 + h^i) + (h^0 - h^j)\ . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Корневата система Σ е обединение на $\pm \Phi_\Delta$ и векторите в лявата част на посочените равенства. Както се вижда от /6.18/ , тези вектори са суми или разлики по на два елемента от Φ_Δ . Това означава, че Φ_Δ е пълна система от корени /определение 3.4/. От /6.18/ заключаваме, ч че

$$D_{n+1} = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)}\ , \tag{6.19}$$

независимо от ранга на разглежданата алгебра.

По такъв начин

$$D_{n+1} = \text{л.о.}\{ d^{\varepsilon}_{\xi i}, [d^{\varepsilon}_{\xi i}, d^{\delta}_{\eta j}] \mid \xi, \eta, \varepsilon, \delta = \pm ; i,j = 1,2,\dots,n \} \qquad /6.20/$$

и затова всеки троен комутатор

$$[[d^{\xi_1}_{\eta_1 i_1}, d^{\xi_2}_{\eta_2 i_2}], d^{\xi_3}_{\eta_3 i_3}] \in D_{n+1}, \quad \xi_j, \eta_j = \pm \qquad /6.21/$$

Тъй като в сумата

$$\xi_1(h^0 + \eta_1 h^{i_1}) + \xi_2(h^0 + \eta_2 h^{i_2}) + \xi_3(h^0 + \eta_3 h^{i_3}) =$$

$$= (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) h^0 + \xi_1\eta_1 h^{i_1} + \xi_2\eta_2 h^{i_2} + \xi_3\eta_3 h^{i_3}$$

на всеки три корена от Δ първото слагаемо в дясната част е или $\pm h^0$, или $\pm 3h^0$, тройният комутатар /6.21/ е или пропорционален на оператор от Δ, или 0 /няма корени, съдържащи $\pm 3h^0$/. Ето защо и в този случай комутационните съотношения между операторите от Δ ще бъдат трилинейни, аналогични на комутационните съотношения между парафермиоператорите.

Сега ще изпишем в явен вид комутационните съотношения между $d^{\xi}_{\eta i}$-операторите. Доколкото сумата от корените на следващите комутатори от корневи вектори не е корен, съответствуващите комутатори са 0.

$$[d^-_{-j}, d^-_{-i}] = [d^+_{-j}, d^+_{-i}] = [d^-_j, d^-_i] = [d^+_j, d^+_i] = 0 \qquad /6.22/$$

$$[d^+_j, d^-_{-i}] = [d^+_{-j}, d^-_i] = 0 \qquad /6.23/$$

$$[d^+_j, d^+_{-j}] = [d^-_j, d^-_{-j}] = 0 \qquad /6.24/$$

От останалите $2n(2n-1)$ комутатори $2n^2-n+1$ са линейно независими. Операторите

$$[d^+_j, d^-_j] \text{ и } [d^+_{-j}, d^-_{-j}] \qquad j = 1,\dots,n \qquad /6.25/$$

пораждат $n+1$ -мерната Картанова подалгебра $\mathcal{H}$. Освен това при $i \neq j = 1,\dots,n$ са в сила равенствата:

$$
\begin{aligned}
[d_j^+, d_i^-] &= [d_{-j}^+, d_{-i}^-] = -e_{ij} + e_{-j,-i} \longleftrightarrow h^i - h^j \\
[d_i^+, d_{-j}^+] &= [d_{-i}^+, d_j^+] = e_{-ij} - e_{-ji} \longleftrightarrow -h^i - h^j \qquad /6.26/ \\
[d_i^-, d_{-j}^-] &= [d_{-i}^-, d_j^-] = e_{i,-j} - e_{j,-i} \longleftrightarrow h^i + h^j .
\end{aligned}
$$

Отдясно са приведени корените на съответните комутатори. Те всички са различни и затова повече връзки между съответствуващите им корневи вектори няма. Получават се общо $2(n+1)^2 - (n+1)$ линейно независими елемента - колкото е размерността на D_{n+1}.

Структурата на алгебра на Ли в D_{n+1} се определя напълно от комутационните съотношения между генериращите алгебрата $d^{\xi}_{\eta i}$-оператори. Като използуваме при пресмятането матричното представяне /6.16/, намираме

$$
\begin{aligned}
&[[d_j^+, d_i^-], d_k^+] = \delta_{ik} d_j^+ + \delta_{ij} d_k^+ && \text{а} \\
&[[d_j^+, d_i^-], d_k^-] = -\delta_{jk} d_i^- - \delta_{ij} d_k^- && \text{б} \\
&[[d_j^+, d_i^-], d_{-k}^+] = \delta_{ik} d_{-j}^+ - \delta_{ij} d_{-k}^+ && \text{в} \\
&[[d_j^+, d_i^-], d_{-k}^-] = -\delta_{jk} d_{-i}^- + \delta_{ij} d_{-k}^- && \text{г} \\
&[[d_{-j}^+, d_{-i}^-], d_k^+] = \delta_{ik} d_j^+ - \delta_{ij} d_k^+ && \text{д} \\
&[[d_{-j}^+, d_{-i}^-], d_k^-] = -\delta_{jk} d_i^- + \delta_{ij} d_k^- && \text{е} \qquad /6.27/ \\
&[[d_{-j}^+, d_{-i}^-], d_{-k}^+] = \delta_{ik} d_{-j}^+ + \delta_{ij} d_{-k}^+ && \text{ж}
\end{aligned}
$$

$$[[d_{-j}^{+}, d_{-i}^{-}], d_{-k}^{-}] = -\delta_{jk} d_{-i}^{-} - \delta_{ij} d_{-k}^{-}$$ з

$$[[d_{j}^{+}, d_{-i}^{+}], d_{k}^{+}] = 0$$ и

$$[[d_{j}^{+}, d_{-i}^{+}], d_{k}^{-}] = \delta_{ik} d_{-j}^{+} - \delta_{jk} d_{-i}^{+}$$ к

$$[[d_{j}^{+}, d_{-i}^{+}], d_{-k}^{+}] = 0$$ л

$$[[d_{j}^{+}, d_{-i}^{+}], d_{-k}^{-}] = \delta_{ik} d_{j}^{+} - \delta_{jk} d_{i}^{+}$$ м

$$[[d_{j}^{-}, d_{-i}^{-}], d_{k}^{+}] = -\delta_{jk} d_{-i}^{-} + \delta_{ik} d_{-j}^{-}$$ н

$$[[d_{j}^{-}, d_{-i}^{-}], d_{k}^{-}] = 0$$ о

$$[[d_{j}^{-}, d_{-i}^{-}], d_{-k}^{+}] = \delta_{ik} d_{j}^{-} - \delta_{jk} d_{i}^{-}$$ п

$$[[d_{j}^{-}, d_{-i}^{-}], d_{-k}^{-}] = 0$$ р

Тези комутационни съотношения могат да се запишат и по-компактно. Както винаги до сега, нека $\xi, \eta, \delta, \varepsilon \doteq +, -$. Първите осем равенства се обединяват в едно комутационно съотношение

$$[[d_{\delta j}^{\xi}, d_{\delta i}^{-\xi}], d_{\eta k}^{\xi}] = \delta_{ik} d_{\eta j}^{\xi} + \delta \cdot \eta \cdot \delta_{ij} d_{\eta k}^{\xi} . \qquad /6.28/$$

σρ σq εe

За /и-л-о-р/ имаме

$$[[d_{\eta i}^{\xi}, d_{\delta j}^{\xi}], d_{\varepsilon k}^{\xi}] = 0 , \qquad /6.29/$$

а за /к-м-н-п/

$$[[d_{j}^{\xi}, d_{-i}^{\xi}], d_{\eta k}^{-\xi}] = \delta_{ik} d_{-\eta j}^{\xi} - \delta_{jk} d_{-\eta i}^{\xi} . \qquad /6.30/$$

От /6.28/ лесно се показва, че

$$\sum_{\eta=\pm}[[d^{+}_{\eta i}, d^{-}_{\eta i}], d^{\varepsilon}_{\xi j}] = 2\varepsilon\delta_{ij} d^{\varepsilon}_{\xi j} \qquad /6.31/$$

т.с. изроденото съотношение за квантуване /6.1/ е изпълнено.

И така операторите $d^{\xi}_{\eta i}$ удовлетворяват изходното уравнение за квантуване и пораждат алгебрата D_{n+1}. Затова по определение те са оператори на раждане и унищожение.

<u>Определение 6.1</u>. Всяка съвкупност от оператори $d^{\xi}_{\eta i}$, удовлетворяваща изроденото съотношение за квантуване /6.1/ и генерираща алгебрата на четно-ортогоналната група, ще наричаме d-оператори на раждане /ξ=+/ и унищожение /ξ=-/, а съответното квантуване - D-квантуване или четно-ортогонално квантуване.

По такъв начин показахме, че операторите $d^{\xi}_{\eta i}$ са d-оператори.

Нека $\Delta \subset D_{n+1}$ и $\Delta' \subset D_{n+1}$ са две съвкупности от оператори на раждане и унищожение. Изображението θ на Δ върху Δ' ще наричаме изоморфизъм на Δ върху Δ', ако то е взаимно-еднозначно и се продължава до автоморфизъм на алгебрата. Две системи Δ и Δ' от оператори на раждане и унищожение ще наричаме изоморфни, ако съществува изоморфизъм на Δ върху Δ'.

Оказва се, че изроденото съотношение за квантуване не определя еднозначно операторите на раждане и унищожение. Има неизоморфни системи от оператори. За една такава възможна система може да се приеме съвкупността от генератори $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{\Delta} = \{\tfrac{1}{\sqrt{2}} D^{\xi}_{\eta j} \mid j = 1,\dots,n;\ \xi,\eta = \pm\}, \qquad /6.32/$$

където

$$D^{\xi}_{\pm j} = d^{\xi}_{j} \pm d^{\xi}_{-j}. \qquad /6.33/$$

Ясно е, че $\tilde{\Delta}$ поражда D_{n+1}. Освен това лесно се проверява, че тези оператори удовлетворяват изроденото съотношение за квантуване, тъй като за $D^{\xi}_{\eta j}$ -операторите е изпълнено равенството /няма сума по повтарящи се индекси/

$$[[D^{+}_{\xi i}, D^{-}_{\xi i}], D^{\varepsilon}_{\eta k}] = \varepsilon \delta_{ik} D^{\varepsilon}_{\eta k} . \qquad /6.34/$$

Трилинейните комутационни съотношения за $D^{\xi}_{\eta i}$-операторите лесно се пресмятат от /6.27/ и имат вида:

$$[[D^{\varepsilon}_{\xi j}, D^{-\varepsilon}_{\eta i}], D^{\varepsilon}_{\delta k}] = \delta_{ik}(1+\xi\eta) D^{\varepsilon}_{\delta j} + \delta_{ij}(1-\xi\eta) D^{\varepsilon}_{-\delta k} , \qquad /6.35а/$$

$$[[D^{\varepsilon}_{\xi j}, D^{\varepsilon}_{\eta i}], D^{-\varepsilon}_{\delta k}] = \delta_{ik}\cdot\delta\cdot(\xi+\eta) D^{\varepsilon}_{\delta j} - \delta_{jk}\cdot\delta\cdot(\xi+\eta) D^{\varepsilon}_{\delta i} , \qquad /6.35б/$$

$$[[D^{\varepsilon}_{\xi j}, D^{\varepsilon}_{\eta i}], D^{\varepsilon}_{\delta k}] = 0 , \qquad /6.35в/$$

$i, j, k = 1,2,\dots,n$; $\xi, \eta, \delta, \varepsilon = +,-$ или $+1,-1$,

Аналогично на равенства /6.26/ и в този случай могат да бъдат написани тъждества между комутатори от D -оператори, изпълняващи се във всяко представяне на алгебрата:

$$[D^{+}_{j}, D^{-}_{i}] = [D^{+}_{-j}, D^{-}_{-i}] , \quad i,j = 1,2,\dots,n , \qquad /6.36/$$

$$[D^{\xi}_{j}, D^{\xi}_{-i}] = [D^{\xi}_{-j}, D^{\xi}_{i}], \quad \xi = \pm, \ i,j = 1,\dots,n . \qquad /6.37/$$

От последното тъждество се вижда, че D^{ξ}_{j} и D^{ξ}_{-j} комутират:

$$[D^{\xi}_{j}, D^{\xi}_{-j}] = 0 . \qquad /6.38/$$

Системите Δ и $\tilde{\Delta}$ не са изоморфни. Това следва например от анализа на подалгебрите, породени от операторите $d^{\xi}_{\eta j} \in \Delta$ и $D^{\xi}_{\eta j} \in \tilde{\Delta}$. Операторите

$$d^{\xi}_{\eta j} \quad и \quad [d^{+}_{\eta j}, d^{-}_{\eta j}]$$

при фиксиран знак на η имат корени $h^{i} - h^{j}$, $i, j = 0,1,\dots,n$, съвпадащи с корневата система $\sum$ на алгебрата A_n /3.43/, и затова пораждат две различни /при $\xi = +$ и $\xi = -$/ подалгебри A_n в

D_{n+1}. В същото време, както показват комутационните съотношения /6.35/ при $\xi = \eta = \delta$, операторите

$$D^{\pm}_{\eta j} \quad \text{и} \quad [D^{+}_{\eta j}, D^{-}_{\eta i}]$$

удовлетворяват трилинейните съотношения на парафермионите операторите и следователно генерират две различни /при $\eta = +$ и $-$/ подалгебри B_n на D_{n+1}.

Физическата интерпретация на въведените оператори би трябвало до голяма степен да зависи от представянето им. На този въпрос ще се спрем в следващата глава, където ще въведем понятие за пространствоно Фок. Тук бихме искали да отбележим още следното. По начина, по който се въведе изроденото съотношение за квантуване /6.1/, знакът на η в операторите $a^{\pm}_{\eta i}$ / в традиционната интерпретация на квантовата теория на полето/ бе отъждествен със знака на заряда на частиците. Това обаче не бива да се приема като задължително изискване. Нещо повече, както ще видим, то даже не е възможно за определен клас от представяния, между които и представянията на D^{ε}_{i} /или на D^{ε}_{-i} / с ферми-оператори на раждане и унищожение - оказва се, че в този случай векторите $D^{\varepsilon}_{i}|0\rangle$ и $D^{\varepsilon}_{-i}|0\rangle$ са колинеарни. Изроденото съотношение за квантуване може да се получи и при друга интерпретация, когато например η се разглежда като индекс на различни полета.
Ще приведем един пример.

Нека ни е даден лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}(x) A \gamma^n \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^n} - \frac{\partial \overline{\psi}(x)}{\partial x^n} A \gamma^n \psi(x)\right] - m\left[\overline{\psi}(x) A \psi(x)\right], \qquad /6.39/$$

където [ ] е символът за антисиметризация на полетата;

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}, \quad \overline{\psi}(x) = \left(\overline{\psi}_+(x), \overline{\psi}_-(x)\right), \qquad /6.40/$$

а матрицата A е засега произволна двумерна квадратна матрица:

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix} \qquad /6.41/$$

Уравненията на Лагранж-Ойлер в този случай са

$$\begin{aligned} &A\left(i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m\right)\psi(x) = 0 \\ &\overline{\psi}(x)\left(i\gamma^n \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^n} + m\right)A = 0 \end{aligned} \qquad /6.42/$$

и затова, ако A е неособена матрица, полетата $\psi_{\pm}(x)$ $/\overline{\psi}_{\pm}(x)/$ удовлетворяват уравнението /спрегнатото уравнение/ на Дирак и могат да бъдат представени в интеграл на Фурие /вж. означенията 1.18/:

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\underline{p} \left[e^{ipx} v^{\mu,+}(\underline{p},-) d^{+}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},-) + e^{-ipx} v^{\mu,-}(\underline{p},+) d^{-}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},+) \right] \qquad /6.43/$$

$$\overline{\psi}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\underline{p} \left[e^{ipx} \overline{v}^{\mu,+}(\underline{p},+) d^{+}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},+) + e^{-ipx} \overline{v}^{\mu,-}(\underline{p},-) d^{-}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},-) \right] \qquad /6.44/$$

За тензора на енергията-импулса T^{κ}_{ℓ} се получава

$$T^{\kappa}_{\ell} = \frac{i}{4}\left[\overline{\psi}(x) A \gamma^{\kappa} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^{\ell}} - \frac{\partial \overline{\psi}(x)}{\partial x^{\ell}} A \gamma^{\kappa} \psi(x) \right], \qquad /6.45/$$

което за 4-мерния импулс на полето дава

$$\begin{aligned} P^m = \sum_{\varepsilon,\varepsilon',\mu} \frac{1}{2} \int d\underline{p}\, p^m A_{\varepsilon\varepsilon'} \Big\{ &\left[d^{+}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},+), d^{-}_{\varepsilon'\mu}(\underline{p},+) \right] + \\ &+ \left[d^{+}_{\varepsilon'\mu}(\underline{p},-) d^{-}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},-) \right] \Big\}. \end{aligned} \qquad /6.46/$$

Да предположим сега, че $d^{\pm}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi)$ са d-оператори на раждане и унищожение, удовлетворяващи комутационните съотношения /6.22-27/, в които дискретният индекс i на оператора $d^{\pm}_{\varepsilon i}$ се отъждествява с тройката индекси $(\mu, \underline{p}, \xi)$ на $d^{\pm}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi)$. Тогава съгласно с /6.23/ при $\varepsilon \neq \varepsilon'$

$$[d^{+}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi), d^{-}_{\varepsilon'\mu}(p,\xi)] = 0, \quad \varepsilon \neq \varepsilon' \qquad /6.47/$$

и операторът на импулса се диагонализира /сума по ε и ξ /:

$$P^m = \frac{1}{2}\int d\underline{p}\, p^m A_{\varepsilon\varepsilon} [d^{+}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi), d^{-}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi)] . \qquad /6.48/$$

Изроденото съотношение за квантуване в тези означения добива вида

$$\sum_{\varepsilon} [[d^{+}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi), d^{-}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi)], d^{\delta}_{\varepsilon'\nu}(\underline{q},\eta)] = 2\delta.\delta_{\mu\nu}\delta_{\xi\eta}\delta(\underline{p}-\underline{q})\, d^{\delta}_{\varepsilon'\nu}(\underline{q},\eta). \qquad /6.49/$$

Използувайки /6.49/, не трудно да се убедим, че

$$[P^m, d^{\delta}_{\varepsilon'\nu}(\underline{q},\eta)] = \delta . q^m . \mathrm{Tr}\, A . d^{\delta}_{\varepsilon'\nu}(\underline{q},\eta) . \qquad /6.50/$$

Следователно изходното уравнение за квантуване /1.24/ се удовлетворява за произволна неособена матрица A със следа единица:

$$\mathrm{Tr}\, A = 1 \qquad /6.51/$$

Разглежданият лагранжиан /6.39/ се свежда към лагранжиан за две свободни полета само в случай на диагонална матрица A. Ако $A = 1/2$, получаваме

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{+} + \mathcal{L}_{-} , \qquad /6.52/$$

където $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ е лагранжианът на свободно спинорно поле $\psi_{\varepsilon}(x)$.

Могат да се приведат и други примери. Изходното уравнение за квантуване се удовлетворява също и за лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{+} \cos^2\theta + \mathcal{L}_{-} \sin^2\theta \qquad /6.53/$$

в който $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ е отново лагранжиан на свободно спинорно поле $\psi_{\varepsilon}(x)$, но в интеграла на Фурие /6.43/ на полето вместо $d^{\eta}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi)$ стоят операторите $\frac{1}{\sqrt{2}} D^{\eta}_{\varepsilon\mu}(\underline{p},\xi)$.

7. Симплектично квантуване /С-квантуване/

В този параграф ще се покаже, че изроденото съотношение за квантуване /6.1/ може да се удовлетвори и с оператори, пораждащи алгебрата на симплектичната група. Изложението е сходно с това за четно-ортогоналното квантуване. Най-напред ще въведем определящото матрично представяне $\hat{C}_{n+1}$ на симплектичната алгебра C_{n+1} от ранг $n+1$. И в този случай произволна матрица $T \in \hat{C}_{n+1}$ може да се напише в блочен вид от $(n+1)$-мерни квадратни матрици T_{ij}, $i,j = 1,2$ /сравни с 6.2/, но сега матриците T_{12} и T_{21} са симетрични и отново $T_{22} = -\overset{T}{T}_{11}$. Картановата подалгебра в това представяне съвпада с тази за D_{n+1} - вж. /6.3/. Като се номерират стълбците и колоните на T $0,1,2,\dots,n$, $-0,-1,-2,\dots,-n$, C_{n+1} може да се представи като пряка сума от подпространства:

$$C_{n+1} = \mathcal{H} \underset{r}{\oplus} \mathbb{C} e_r \qquad /7.1/$$

където e_r са корневите вектори на алгебрата. В разглежданото представяне

$$e_r = \begin{cases} e_{ij} - e_{-j,-i}\,, & -e_{-i,-j} + e_{ji}\,, \\ e_{i,-j} + e_{j,-i}\,, & e_{-i,j} + e_{-j,i}\,, \\ e_{i,-i}\,, & e_{-i,i}\,, \qquad 0 \le i < j \le n \end{cases} \qquad /7.2/$$

Базис, ортогонален спрямо формата на Картан-Килинг, се дава с матриците /6.6/. В този случай

$$(h_i, h_j) = 4(n+2)\delta_{ij} \quad , j,i = 0,1,\dots,n\,. \qquad /7.3/$$

Елементите на Картановата подалгебра $h \in \mathcal{H}$ трансформират корневите вектори по формулите:

$$[h, e_{ij} - e_{-j,-i}] = (h, h^i - h^j)\cdot(e_{ij} - e_{-j,-i}),$$

$$[h, -e_{-i,-j} + e_{ji}] = (h, h^j - h^i)\cdot(-e_{-i,-j} + e_{ji}),$$

$$[h, e_{i,-j} + e_{j,-i}] = (h, h^i + h^j)\cdot(e_{i,-j} + e_{j,-i}),$$

$$[h, e_{-i,j} + e_{-j,i}] = (h, -h^i - h^j)\cdot(e_{-i,j} + e_{-j,i}), \qquad /7.4/$$

$$[h, e_{i,-i}] = (h, 2h^i)\cdot e_{i,-i},$$

$$[h, e_{-i,i}] = (h, -2h^i)\cdot e_{-i,i}.$$

Този път /за разлика от 6.8/ записахме комутационните съотношения /7.4/ направо чрез векторите от контравариантния базис в $\mathcal{H}$:

$$h^i = \frac{h_i}{4(n+2)}, \quad i = 0, 1, \dots, n \qquad /7.5/$$

Простите корени са

$$\pi = \{h^0 - h^1, h^1 - h^2, \dots, h^{n-1} - h^n, 2h^n\} \qquad /7.6/$$

За съвкупност от оператори на раждане и унищожение ще изберем системата Δ от корневи вектори с корени $\xi h^0 + \eta h^j$, $j = 1, \dots, n$; $\xi, \eta = \pm$:

$$\overset{(h^0 - h^j)}{C_j^+ = e_{0j} - e_{-j,-0}} \qquad \overset{(-h^0 + h^j)}{C_j^- = e_{j0} - e_{-0,-j}}$$

/7.7/

$$\overset{(-h^0 - h^j)}{C_{-j}^+ = e_{-0,j} + e_{-j,0}} \qquad \overset{(h^0 + h^j)}{C_{-j}^- = e_{0,-j} + e_{j,-0}}$$

Очевидно е, че системата Φ_Δ от положителни корени /6.17/ и и в този случай е пълна -

$$C_{n+1} = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)}, \qquad /7.8/$$

поради което

$$C_{n+1} = \text{л.о.}\left\{ C^{\varepsilon}_{\xi i}\,,\ [C^{\varepsilon}_{\xi i}, C^{\delta}_{\eta j}] \mid \xi,\eta,\delta = \pm\ ;\ i,j = 1,\dots,n \right\}. \qquad /7.9/$$

Лесно се показва, като се използува например матричното представяне /7.7/, че е изпълнено изроденото съотношение за квантуване

$$\sum_{\eta=\pm} [[C^{+}_{\eta i}, C^{-}_{\eta i}], C^{\varepsilon}_{\xi j}] = 2\varepsilon\,\delta_{ij}\,C^{\varepsilon}_{\xi j}\,. \qquad /7.10/$$

По такъв начин операторите $C^{\xi}_{\eta i}$ удовлетворяват изходното уравнение за квантуване /1.24/, пораждат алгебрата C_{n+1} и затова са оператори на раждане и унищожение.

<u>Определение 7.1.</u> Всяка съвкупност Δ от оператори с посочените свойства ще наричаме с-оператори на раждане и унищожение, а съответното квантуване - симплектично квантуване /С-квантуване/.

За комутационните съотношения между с-операторите /7.4/ намираме

$$[C^{+}_{j}, C^{+}_{i}] = [C^{-}_{j}, C^{-}_{i}] = [C^{+}_{-j}, C^{+}_{-i}] = [C^{-}_{-j}, C^{-}_{-i}] = 0 \quad i,j = 1,\dots,n$$

$$[C^{+}_{j}, C^{-}_{-i}] = [C^{+}_{-j}, C^{-}_{i}] = 0 \quad i \neq j = 1,\dots,n \qquad /7.11/$$

$$[C^{+}_{j}, C^{+}_{-j}] = [C^{-}_{j}, C^{-}_{-j}] = 0 \quad j = 1,\dots,n\,. \quad \to \text{това е според мене не е вярно}$$

$$[e_{0j} - e_{j,-0}\,,\ e_{-0,j} + e_{-j,0}] = e_{-j,j} - e_{jj} \neq 0$$

Тези равенства следват от обстоятелството , че сумата от корените на влизащите в комутаторите оператори не е корен. Останалите комутационни съотношения са трилинейни $(i,j = 1,\dots,n\ ;\ \xi,\eta,\varepsilon = +,-)$:

$$[[C^{\varepsilon}_{\xi j}, C^{-\varepsilon}_{\xi i}], C^{\varepsilon}_{\eta k}] = \delta_{ik} C^{\varepsilon}_{\eta j} + \eta\xi\,\delta_{ik} C^{\varepsilon}_{\eta k}\,, \quad \text{OK} \qquad /7.12/$$

$$[[C^{\varepsilon}_{j}, C^{\varepsilon}_{-i}], C^{\varepsilon}_{\xi k}] = [[C^{\varepsilon}_{\xi j}, C^{\varepsilon}_{\eta i}], C^{\varepsilon}_{\delta k}] = 0\,, \quad \text{OK} \qquad /7.13/$$

$$[[C^{\varepsilon}_{j}, C^{\varepsilon}_{-i}], C^{-\varepsilon}_{\xi k}] = -\xi\,\delta_{ik} C^{\varepsilon}_{-\xi j} - \xi\,\delta_{jk} C^{\varepsilon}_{-\xi i}\,, \quad \text{OK} \qquad /7.14/$$

$$[[C^{\varepsilon}_{j}, C^{-\varepsilon}_{-i}], C^{\xi}_{\eta k}] = (\varepsilon\xi - \eta)\,\delta_{ij}\,C^{\xi}_{\varepsilon\xi k}\,. \quad \text{OK!} \qquad /7.15/$$

В частност намираме, че

$$[C^+_j, C^-_{-i}] = 2\delta_{ij}\, e_{0,-0} \quad , \quad [C^+_j, e_{0,-0}] = [C^-_{-j}, e_{0,-0}] = 0 \qquad /7.16/$$

$$[C^+_{-j}, C^-_i] = 2\delta_{ij}\, e_{-0,0} \quad , \quad [C^+_{-j}, e_{-0,0}] = [C^-_i, e_{-0,0}] = 0$$

Алгебра на Ли, в която могат да се изберат образуващи, q_i, p_i, c, такива, че

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}\, c \quad , \quad [q_i, c] = [p_i, c] = 0 \ , \ i,j = 1,\dots,n \ , \qquad /7.17/$$

се нарича n-мерна алгебра на Хайзенберг. Комутационните съотношения /7.16/ показват, че алгебрата на симплектичната група се поражда от две алгебри на Хайзенберг:

$$Z_+ = \text{л.о.}\{ C^+_j, C^-_{-i}, e_{0,-0} \mid i,j = 1,\dots,n \},$$

$$/7.18/$$

$$Z_- = \text{л.о.}\{ C^+_{-j}, C^-_i, e_{-0,0} \mid i,j = 1,\dots,n \}.$$

Добре е известна ролята на алгебрата на Хайзенберг в теоретичната физика и по-конкретно на представянето ѝ, в което централният елемент е кратен на единичния оператор. В този случай q_i и p_i са оператори на координатите и импулса или бозе-оператори на раждане и унищожение. Ето защо би било интересно да се намерят представяния на симплектичната алгебра, за които централният елемент поне на едната подалгебра на Хайзенберг, например $e_{0,-0}$, да е кратен на единичния оператор. Оказва се, че това не е възможно. Наистина да допуснем че

$$e_{0,-0} = C.1 \quad , \quad C \text{ - константа} . \qquad /7.19/$$

Тогава

$$[e_{0,-0}, e_{-0,0}] = e_{00} - e_{-0,-0} = 0$$

и затова

$$[e_{00} - e_{-0,-0}, C^{\xi}_{\eta j}] = \xi\eta\, C^{\xi}_{\eta j} = 0 \ ,$$

т.с. пораждащите алгебрата генератори са нулеви оператори в това представяне. В /7.19/ с $e_{-0,0}$, $e_{0,-0}$ и т.н. естествено означихме генераторите в търсеното, а не в изходното матрично представяне.

И в този случай комутаторите между операторите $C^{\xi}_{\eta j}$ не са линейно независими /сравни с 6.26/. В сила са тъждествата:

$$[C^{+}_{j}, C^{-}_{i}] = [C^{+}_{-j}, C^{-}_{-i}], \quad i \neq j = 1,\dots,n,$$

$$[C^{+}_{i}, C^{+}_{-j}] = -[C^{+}_{-i}, C^{+}_{j}], \quad i,j = 1,\dots,n \qquad /7.20/$$

$$[C^{-}_{i}, C^{-}_{-j}] = -[C^{-}_{-i}, C^{-}_{j}], \quad i,j = 1,\dots,n.$$

За разлика от аналогичните релации /6.26/ между d-операторите тук в десните части на последните две тъждества се появява знак минус.

Аналогията с d-операторите може да бъде продължена. Съвкупността $\widetilde{\Delta}$ от оператори

$$\widetilde{C}^{\xi}_{\pm j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^{\xi}_{j} \pm C^{\xi}_{-j}) \qquad /7.21/$$

удовлетворява изроденото сьотошение за квантуване, поражда C_{n+1} и не е изоморфна на Δ. За трилинейните комунационни съотношения между тези оператори се получава

$$[[\widetilde{C}^{\delta}_{\xi j}, \widetilde{C}^{-\delta}_{\eta i}], \widetilde{C}^{\delta}_{\varepsilon k}] = \tfrac{1}{2}\delta_{ij}(1+\varepsilon\eta)\widetilde{C}^{\delta}_{\xi k} + \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\eta(\varepsilon-\xi)\widetilde{C}^{\delta}_{-\eta k} + \tfrac{1}{2}\delta_{ik}(1+\xi\eta)\widetilde{C}^{\delta}_{\varepsilon j}, \qquad /7.22/$$

$$[[\widetilde{C}^{\delta}_{\xi j}, \widetilde{C}^{\delta}_{\eta i}], \widetilde{C}^{\delta}_{\varepsilon k}] = 0 \qquad /7.23/$$

$$[[\widetilde{C}^{\delta}_{\xi j}, \widetilde{C}^{\delta}_{\varepsilon k}], \widetilde{C}^{-\delta}_{\varepsilon k}] = \tfrac{1}{2}\delta_{jk}\varepsilon(\eta-\varepsilon)C^{\delta}_{-\varepsilon i} + \tfrac{1}{2}\delta_{ik}\varepsilon(\eta-\xi)C^{\delta}_{-\varepsilon j} \qquad /7.24/$$

Освен това са в сила комутационните съотношения /7.11/ и тъждествата /7.20/, като в последните вместо $C^{\xi}_{\eta j}$ се пише $\widetilde{C}^{\xi}_{\eta j}$.

Операторите $C^{\xi}_{\eta j}$ с фиксиран знак на η ; $\xi = \pm$; $j = 1,\dots,n$ и ненулевите им комутатори имат тегла $h^{i} - h^{j}$, $i \neq j = 0,\dots,n$ и затова и тук те пораждат подалгебра на C_{n+1}, изоморфна на A_n . За разлика обаче от D -квантуването, където $D^{\xi}_{\eta j}$ / η - фиксирано/ генерират друга подалгебра - B_n , тук линейната обвивка на всевъзможните комутатори на $\tilde{C}^{\xi}_{j}$ /или на $\tilde{C}^{\xi}_{-j}$ / дава отново подалгебра, изоморфна на A_n. Това следва от обстоятелството, че

$$[C^{\xi}_{\eta i}, C^{\xi}_{\eta j}] = 0 \quad \text{и} \quad [\tilde{C}^{\xi}_{\eta i}, \tilde{C}^{\xi}_{\eta j}] = 0,$$

а при $\xi = \eta = \varepsilon$ комутационното съотношение /7.22/ преминава в /7.12/, ако в него $\xi = \eta$.

Не е трудно да се покаже, че за лагранжиан от вида /6.39/ полетата $\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$ могат да се квантуват със с-оператори на раждане и унищожение, само ако A е диагонална матрица,т.е. ако $\mathcal{L}$ е сума на свободните лагранжиани на полетата $\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$. Това е свързано с обстоятелството , че в този случай комутаторите

$$[C^{+}_{j}, C^{-}_{-j}] \quad \text{и} \quad [C^{+}_{-j}, C^{-}_{j}]$$

не се анулират, а дават корневи вектори с корени $2h^{0}$ и $-2h^{0}$ съответно.

8. Полупросто непросто квантуване и някои други възможности

Беше доказано /теорема 3.1/, че освен просто по принцип е възможно и квантуване с оператори на раждане и унищожение, пораждащи полупроста непроста алгебра на Ли, каквато е например пряката сума от алгебри

$$B_{m_1} \oplus B_{m_2} \oplus \dots \oplus B_{m_p} . \qquad /8.1/$$

Оказва се също, че е възможно квантуване с представяния на оператори на раждане и унищожение, които пораждат алгебра в по-обобщен смисъл - частично с комутационни и частично с антикомутационни съотношения. В този параграф ще се приведе един такъв пример, който е интересен и с това, че за разлика от парaферми-операторите дава не Ли-алгебрично обобщение на статистиката на Ферми-Дирак. Два от примерите, които ще разгледаме - на полупросто непросто и на неалгебрично квантуване - ще излагаме в началото паралелно като възможни модификации на ферми-операторите. За целта наред с общоприетото определение на ферми-операторите на раждане и унищожение ще дадем и друго, еквивалентно, но в случая по-удобно за обобщения.

Линейните оператори b_i^+ и b_i^-, $i=1,\dots,n$ определени в линейното пространство $\mathcal{L}$, се наричат ферми-оператори на раждане и унищожение, ако удовлетворяват едно от следните две определения, чиято еквивалентност ще докажем.

Определение 8.1. Операторите $b_1^{\pm},\dots,b_n^{\pm}$ удовлетворяват антикомутационните съотношения

$$\{ b_i^{\xi}, b_j^{\eta} \} = \tfrac{1}{4}(\xi-\eta)^2 \delta_{ij}, \quad i,j=1,\dots,n, \quad \xi,\eta = \pm(\pm 1) \qquad /8.2/$$

Определение 8.2. За операторите $b_1^{\pm},\dots,b_n^{\pm}$ са изпълнени следните три изисквания:

а. За всяка стойност на индекса i операторите b_i^+ и b_i^- са съответно положителен и отрицателен корневи вектори на алгебра на Ли A_1^i, изоморфна на тримерната комплексна алгебра A_1.

б. Представянето на всяка от алгебрите A_1^i в крайномерното пространство $\mathcal{L}$ е /при $n>1$/ приводимо. Неприводимите му компоненти са с едно и също тегло $\ell=\frac{1}{2}$. С други думи операторът на Казимир K^i на A_1^i е диагонален в $\mathcal{L}$ и

$$K^i = \ell(\ell+1) \quad \text{при стойност на} \quad \ell = \tfrac{1}{2}. \qquad /8.3/$$

в. Корневите вектори $b_i^{\pm}$ от различни подалгебри A_1^i антикомутират:

$$\{ b_i^{\xi}, b_j^{\eta} \} = 0 \quad , i \neq j \; , \; \xi, \eta = \pm \; .$$

Ще докажем еквивалентността на двете определения.

8.1 $\Longrightarrow$ 8.2

Нека

$$h_i = \frac{1}{2} [b_i^+ , b_i^-] \qquad i = 1, \dots, n \qquad /8.4/$$

От антикомутационното съотношение /8.2/ намираме, че

$$[h_i , b_i^{\pm}] = \pm b_i^{\pm} \; . \qquad /8.5/$$

Равенствата /8.4/ и /8.5/ дават комутационните съотношения между положителния корнев вектор b_i^+, отрицателния такъв b_i^- и Картановия елемент h_i на алгебрата A_1. Затова тези оператори са базис на алгебра A_1^i, изоморфна на A_1 и условие а. е изпълнено. За да проверим условие б. е достатъчно да пресметнем оператора на Казимир K^i на A_1^i. За абстрактна алгебра A_1 с генератори $H_{\pm}, H_3$ имаме [44] :

$$K = \frac{1}{2} \{ H_+ , H_- \} + H_3^2 \; . \qquad /8.6/$$

В случая $H_{\pm} = b_i^{\pm}$ и $H_3 = h_i$. Като използуваме /8.2/, намираме

$$K = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \; , \qquad /8.7/$$

което доказва условие б. Условие в. е изпълнено по определение.

8.2 $\Longrightarrow$ 8.1

При $i \neq j$ условие /8.2/ е следствие от условие в. За да го докажем при $i = j$, използуваме обстоятелството, че всяко /крайномерно/ представяне на A_1 е напълно приводимо и представяме A_1^i -

модула $\mathcal{L}$ в пряка сума

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^1 \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}^p \qquad /8.8/$$

от неприводими A_1^i-модули $\mathcal{L}^i$, $i=1,\dots,p$, в които съгласно с 2б. се реализира двумерно представяне с тегло $\ell = \frac{1}{2}$. Във всяко подпространство $\mathcal{L}^j$ ще изберем каноничен базис $f^j_{\frac{\xi}{2}}$, $\xi = \pm 1$, [44] :

$$\overset{+}{b}_j \cdot f^j_{\frac{\xi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(3+\xi)(1-\xi)} \cdot f^j_{\frac{\xi}{2}+1},$$

$$\overset{-}{b}_j \cdot f^j_{\frac{\xi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\xi)(3-\xi)} \cdot f^j_{\frac{\xi}{2}-1}. \qquad /8.9/$$

Оттук следва, че

$$\overset{\xi}{b}_j \cdot f^j_{\frac{\xi}{2}} = 0 \quad , \quad \overset{\xi}{b}_j \cdot f^j_{-\frac{\xi}{2}} = f^j_{\frac{\xi}{2}} \qquad /8.10/$$

или още по-компактно

$$\overset{\xi}{b}_j \cdot f^j_{\frac{\eta}{2}} = \frac{1}{4}(\xi-\eta)^2 f^j_{-\frac{\eta}{2}}. \qquad /8.11/$$

Следователно

$$\{\overset{+}{b}_j, \overset{-}{b}_j\} \cdot f^j_{\frac{\xi}{2}} = \overset{\xi}{b}_i \cdot \overset{-\xi}{b}_i f^j_{\frac{\xi}{2}} = f^j_{\frac{\xi}{2}}. \qquad /8.12/$$

Освен това

$$\overset{\xi}{b}_j \cdot \overset{\xi}{b}_j \cdot f^j_{\frac{\eta}{2}} = \frac{1}{16}(\xi-\eta)^2(\xi+\eta)^2 \cdot f^j_{\frac{\eta}{2}} = 0 \qquad /8.13/$$

и затова за всяко $x \in \mathcal{L}^j$

$$\{\overset{\xi}{b}_j, \overset{\eta}{b}_j\} x = \frac{1}{4}(\xi-\eta)^2 x \qquad /8.14/$$

което доказва, че определение 8.1 следва от определение 8.2.

Удобно е да се въведе следното определение.

Определение 8.3. Ще казваме, че алгебрите A_1^i и A_1^j, $i \neq j$, дефинирани в пространството $\mathcal{L}$, комутират / $\varepsilon = -$ / или антикомутират / $\varepsilon = +$ / и ще пишем

$$[A_1^i, A_1^j]_\varepsilon = 0 \quad i \neq j, \qquad /8.15/$$

ако в разглежданото представяне корневите вектори на A_1^i комутират /антикомутират/ с корневите вектори на A_1^j.

В следващата глава ще се изясни, че ферми-операторите задават неприводимо представяне на алгебрата B_n с ортогонални координати $(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$. Ли-алгебричното им обобщение - параферми-статистиката - по същество е разширение до клас от представяния на B_n с ортогонална сигнатура $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ за произволни /едновременно/ цели или полуцели стойности на $\ell_1,\ldots,\ell_n$. Възможността за такова обобщение произтича от обстоятелството, че в лявата част на основното съотношение за квантуване /1.25/

$$[[b_i^+, b_i^-], b_j^\pm] = \pm 2\delta_{ij} b_j^\pm \qquad /8.16/$$

има двукратен комутатор от генератори на алгебрата B_n, което е вътрешна, Ли-алгебрична операция. Затова, ако /8.16/ е изпълнено за едно представяне на операторите $b_i^\pm$, то ще се изпълнява и за всяко друго представяне на B_n. Ще си зададем сега следния въпрос: може ли да се намери друго, неалгебрично обобщение на ферми-статистиката? Да разгледаме този въпрос от гледна точка на евентуална модификация, по-точно - ослабване на изискванията, формулирани в определение 8.2. Нека ε_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$ е функция на индексите i и j със стойности, както обикновено, $\pm$ (или ± 1). Като използваме тъждеството

$$[[A,B],C] = \varepsilon[[B,C]_\varepsilon, A]_\varepsilon - \varepsilon[[A,C]_\varepsilon, B]_\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm, \qquad /8.17/$$

преписваме основното съотношение /8.16/ във вида

$$\varepsilon_{ij}[[b_i^-, b_j^\pm]_{\varepsilon_{ij}}, b_i^+]_{\varepsilon_{ij}} - \varepsilon_{ij}[[b_i^+, b_j^\pm]_{\varepsilon_{ij}}, b_i^-]_{\varepsilon_{ij}} = \pm 2\delta_{ij} b_j^\pm . \qquad /8.18/$$

При $i \neq j$ това равенство се удовлетворява, ако, обобщавайки условие в. на определение 8.2, предположим, че всеки две алгебри и A_1^i, A_1^j, или комутират, или антикомутират, т.е.

$$[A_1^i, A_1^j]_{\varepsilon_{ij}} = 0 \qquad /8.19/$$

Както знаем, при $i=j$ от ОСК /8.16/ еднозначно следва, че b_i^+ и b_i^- са корневи вектори на алгебра A_1 и затова подусловие а. трябва да остане. Ограничение б. обаче не е задължително - при $i=j$ основното съотношение за квантуване /8.16/ се изпълнява за всяко представяне на алгебрата A_1.

Направените разсъждения позволяват да изкажем следното твърдение.

Твърдение 8.1. Линейните оператори b_i^+ и b_i^-, $i=1,\dots,n$, определени в линейното пространство $\mathcal{L}$ и удовлетворяващи условията:

а) за всяка стойност на i операторите b_i^+ и b_i^- са съответно положителен и отрицателен корневи вектори на алгебра A_1^i, изоморфна на A_1;

б)

$$[b_i^\xi, b_j^\eta]_{\varepsilon_{ij}} = 0 \quad \xi,\eta = \pm, \quad i \neq j, \qquad /8.20/$$

са оператори на раждане и унищожение.

По-подробно ще бъдат разгледани три съвкупности от оператори, изпълняващи изискванията на това твърдение.

Пример 1. ε-статистика

От по-особен интерес е случаят, когато $\varepsilon_{ij} = -$ за всяко i, j, а за представянето на всяка подалгебра A_1^i е изпълнено и условие б. на определение 8.2, т.е.

$$K^i = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right), \quad i=1,\dots,n. \qquad /.8.21/$$

В този случай квантуването е полупросто непросто. Операторите-те на раждане и унищожение $\tilde{b}_1^{\pm}, \dots, \tilde{b}_n^{\pm}$ пораждат неприводимо представяне на алгебрата

$$\mathcal{E}_n = A_1^1 \oplus A_1^2 \oplus \dots \oplus A_1^n \qquad /8.22/$$

в $\mathcal{E}_n$-модула $\mathcal{L}^-$, което тук е удобно да означим с B_n^-. Това представяне може да се построи, ако изискаме генераторите на всяка подалгебра A_1^i да пораждат от старшия вектор $|->$ на B_n^- неприводим A_1-подмодул с тегло $\frac{1}{2}$. Ще считаме, че+

$$\tilde{b}_i^- |-> = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \qquad /8.23/$$

Тогава

$$(\tilde{b}_i^+)^m |-> = 0 \quad \forall \quad m > 1$$

и за базис в $\mathcal{E}_n$-модула $\mathcal{L}^-$ могат да се изберат векторите

$$(\tilde{b}_1^+)^{m_1} (\tilde{b}_2^+)^{m_2} \dots (\tilde{b}_n^+)^{m_n} |->, \qquad /8.24/$$

където $m_i = 0$ или 1, $i = 1, \dots, n$

Да сравним това представяне с представянето B_n^+ на алгебрата B_n, породено от n двойки ферми-оператори $b_i^{\pm}$. Нека $|+>$ е старшият вектор на последното.

Пространството на представянето $\mathcal{L}^+$ в този случай е пространство на Фок с вакуум $|+>$ и, както е известно, векторите

$$(b_1^+)^{m_1} (b_2^+)^{m_2} \dots (b_n^+)^{m_n} |+>, \quad m_i = 0, 1, \qquad /8.25/$$

Дефинират базис в $\mathcal{L}^+$.

Виждаме, че и двете представяния B_n^+ и B_n^- на алгебрите B_n и $\mathcal{E}_n$ се реализират в пространства с една и съща размерност.

+ По определение $|->$ е старши вектор на представянето, ако той се анулира от всички положителни корневи вектори. Операторите на унищожение $\tilde{b}_i^-$ са такива, ако за базис в $\mathcal{H}$ приемем векторите :

$$h_i = \frac{1}{2} [\tilde{b}_i^-, \tilde{b}_i^+], \qquad i = 1, \dots, n.$$

$$J_2^\circ(\underline{p},\eta) = \frac{i}{2}\left[e^-(\underline{p},\eta) - e^+(\underline{p},\eta)\right],$$
$$J_3^\circ(\underline{p},\eta) = e^3(\underline{p},\eta). \qquad /8.48/$$

В тези променливи комутационните съотношения /8.36/ се преписват във вида

$$[J_\alpha^\circ(\underline{p},\xi), J_\beta^\circ(\underline{q},\eta)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\xi\eta}\delta(\underline{p}-\underline{q})J_\gamma^\circ(\underline{p},\xi) \qquad /8.49/$$

Това равенство е познато в алгебрата на токовете. Настина, ако в него вместо $\underline{p}$ и $\underline{q}$ подставим $\underline{x}$ и $\underline{y}$, то преминава в едновременните комутационни съотношения $(x^\circ = y^\circ = 0)$ между нулевите компоненти на токовете в модела на Гел-Ман и Леви [48], в който токовете удовлетворяват алгебрата $SU(2) \oplus SU(2)$. По такъв начин виждаме, че комбинациите

$$J_1^\circ(\underline{p},\eta) \pm i J_2^\circ(\underline{p},\eta) = e^\pm(\underline{p},\eta) \qquad /8.50/$$

от нулевите компоненти на токовете са ε-оператори на раждане и унищожение. Обратно, в импулсно представяне полетата $\psi^\xi(\underline{p},\eta)$, $\xi,\eta = \pm$, затварят алгебра на Ли, която /в общоприетата, но не съвсем точна терминология/ е изоморфна на $SU(2) \oplus SU(2)$.

Пример 2. Φ-статистика /не Ли-алгебрично обобщение на статистиката на Ферми-Дирак

Статистиката на краен брой ферми-оператори е по същество статистика, породена от краен брой антикомутиращи алгебри A_1^i, спрямо всяка от които пространството на представянето е пряка сума от неприводими A_1-модули с тегла $\ell = \frac{1}{2}$. От гледна точка на определението на оператори на раждане и унищожение /определение 1.2/ последното изискване не е необходимо. Затова ще получим едно естествено обобщение, удовлетворяващо условията в твърдение 8.1, ако, модифицирайки пункт б. на определение 8.2, предположим, че теглата на A_1-модулите могат да приемат произволни цели или полуцели стойности. Това ни дава основание да въведем следното понятие.

Определение 8.5. Линейните оператори $f_1^{\pm}, \ldots, f_n^{\pm}$, дефинирани в линейното пространство $\mathcal{L}$, ще наричаме ϕ-оператори на раждане и унищожение от порядък p, ако

а) за всяка стойност на индекса i операторите f_i^+ и f_i^- са съответно положителен и отрицателен корнев вектор на алгебра A_1^i, изоморфна на A_1;

б) представянето на всяка от алгебрите A_1^i е приводимо в $\mathcal{L}$;

неприводимите му компоненти са с едно и също тегло $\ell = \frac{p}{2}$, където p е цяло положително число;

в) корневите вектори от различни подалгебри A_1^i антикомутират.

Статистиката на ϕ-операторите ще наричаме ϕ-статистика и ще пишем ϕ_p, ако искаме да посочим порядъка ѝ p. В тази терминология ферми-статистиката е ϕ_1-статистика.

При една двойка ϕ_p-оператори $f_i^{\pm}$, i - фиксирано, пространството на представянето $\mathcal{L}_i(p)$ е приводим A_1-модул с тегло $\frac{p}{2}$. Ако $|0\rangle \in \mathcal{L}_i(p)$ е старшият вектор, $f_i^-|0\rangle = 0$, за базис в $\mathcal{L}_i(p)$ могат да се изберат векторите

$$(f_i^+)^{m_i}|0\rangle, \quad 0 \leq m_i \leq p \;; \text{ при } m_i > p \; (f_i^+)^{m_i}|0\rangle = 0. \qquad /8.51/$$

Тогава собствената стойност на Картановия елемент $[f_i^-, f_i^+]$ върху старшия вектор $|0\rangle$ е p, т.е.

$$[f_i^-, f_i^+]|0\rangle = f_i^- f_i^+|0\rangle = p|0\rangle. \qquad /8.52/$$

От /8.51/ и /8.52/ намираме

$$f_i^-(f_i^+)^{m_i}|0\rangle = m_i(p-m_i+1)(f_i^+)^{m_i-1}|0\rangle. \qquad /8.53/$$

В по-общия случай на n-двойки Φ_p-оператори $f_i^\pm$, $i=1,\dots,n$, представянето се задава по естествен начин в пространство на Фок $\mathcal{Z}(p)$ с базис

$$|m_1,\dots,m_n\rangle \equiv (f_1^+)^{m_1}\dots(f_n^+)^{m_n}|0\rangle, \quad 0\le m_i\le p,\ i=1,\dots,n \qquad /8.54/$$

Действието на операторите $b_i^\pm$ върху базисните вектори, респ. в $\mathcal{Z}(p)$, се определя от равенство /8.52/, като се вземат предвид пермутациите /антикомутациите/ с останалите оператори. Пространството на представянето $\mathcal{Z}(p)$ е по същество тензорно произведение на пространствата $\mathcal{Z}_i(p)$:

$$\mathcal{Z}(p) = \mathcal{Z}_1(p)\otimes\mathcal{Z}_2(p)\otimes\dots\otimes\mathcal{Z}_n(p). \qquad /8.55/$$

И в този случай, както и при $\mathcal{E}_p$-статистиката от порядък p, в дадено състояние i могат да се намират не повече от p частици. Състоянието /8.54/ е симетрично /респ. антисиметрично/ спрямо четен /респ. нечетен/брой транспозиции на частици от различни състояния.

Във всяко пространство $\mathcal{Z}(p)$, доколкото то е крайномерно, представянето на операторите $f_1^\pm,\dots,f_n^\pm$ може да бъде затворено до представяне на алгебра на Ли. Тази алгебра е въобще различна за различните пространства, зависи от пространството на представянето $\mathcal{Z}(p)$. В своята съвкупност обаче представянията в $\mathcal{Z}(1), \mathcal{Z}(2),\dots$ не могат да се разглеждат като пространства на представяния на една и съща, не зависеща от порядъка на статистиката, алгебра на Ли, тъй като $f_i^\pm$ удовлетворяват частично и антикомутационни съотношения. В този смисъл /определение 3.2/ квантуването с Φ-оператори не е Ли-алгебрично.

Дали разглежданата статистика, а също и останалите въведени до сега, се реализират в природата, не можем да кажем. Като възможност обаче разглежданото обобщение е доста естествено. В известен смисъл то стои спрямо ферми-статистиката, така, както представянията на групата на въртене с произволен момент ℓ се отнасят към низшето, двумерно представяне с момент $\ell = \frac{1}{2}$. В случая аналог на момента е $\frac{p}{2}$, където порядъкът на ϕ-статистиката p определя максималния брой частици, които могат да се намират в едно и също състояние. Възможна е и друга, нетрадиционна интерпретация. Ако положим

$$(f_i^+)^m |0\rangle = |p_3\rangle \quad , \qquad p_3 = \frac{1}{2}p - m \qquad /8.56/$$

p_3 може да се интерпретира като вътрешна характеристика на състоянието, проекция на $\frac{p}{2}$ /аналог на проекцията на момента/ на i-тата частица, например частица със спин $\frac{1}{2}$, импулс $\underline{p}$ и даден заряд има p вътрешни състояния. В този случай операторите $f_i^\pm$ прехвърлят от едно вътрешно състояние в друго, изменяйки проекцията на $\frac{p}{2}$ с ± 1.

Да разгледаме антикомутационните съотношения между ϕ_p-операторите. От /8.53/ и правилата за антикомутация намираме

$$\{ f_i^+ , f_j^- \} = \delta_{ij} f_i^3 , \qquad /8.57/$$

където f_i^3 е диагонален оператор:

$$f_i^3 |m_1,\dots,m_n\rangle = [\, p + 2m_i(p-m_i)] |m_1,\dots,m_n\rangle . \qquad /8.58/$$

При порядък на статистиката $p = 1$ възможните стойности на m_i са 0 и 1. Затова

$$p + 2m_i(p-m_i) = 1 . \qquad /8.59/$$

Освен това

$$(f_i^+)^2 = (f_i^-)^2 = 0$$

и антикомутационните съотношения между операторите $f_i^{\pm}$ се редуцират в тези за ферми-операторите:

$$\{ f_i^{\xi}, f_j^{\eta} \} = \frac{1}{4}(\xi-\eta)^2 \delta_{ij} . \qquad /8.60/$$

Да пресметнем антикомутаторите между заредени спинорни ϕ_p -полета в конфигурационно пространство. Представяме полетата $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ чрез честотните им части /8.34/, а в интеграла на Фурие /8.35/ вместо $e_\mu^\xi(\underline{p},\eta)$, пишем $f_\mu^\xi(\underline{p},\eta)$, $\xi,\eta=\pm$. Заменяйки дискретния индекс i с тройката $(\underline{p},\mu,\eta)$, ще считаме, че полетата са оператори в пространство на Фок с вакуум, анулиращ се от отрицателночестотните оператори $f_\mu^-(\underline{p},\eta)$, и базисни вектори:

$$|m_1(\underline{k}_1,\mu_1,\eta_1),\ldots,m_r(\underline{k}_r,\mu_r,\eta_r)\rangle = \prod_{i=1}^{r}\left[f_{\mu_i}^+(\underline{k}_i,\eta_i)\right]^{m_i}|0\rangle \qquad /8.61/$$

Без да ограничаваме общността, ще приемем, че всички тройки индекси $(\underline{k}_i,\mu_i,\eta_i)$ в /8.61/ са различни. За краткост вместо $m_i(\underline{k}_i,\mu_i,\eta_i)$ пишем също и само m_i . От /8.61/ е ясен смисълът на означението $m_i(\underline{k}_i,\mu_i,\eta_i)$ - това е броят на "частиците" m_i , намиращи се в състояние $(\underline{k}_i,\mu_i,\eta_i)$.

При пресмятането ще са ни необходими матричните елементи на операторите $f_\mu^{\pm}(\underline{p},\eta)$ и $f_\mu^3(\underline{p},\eta)$. За да ги намерим, най-напред разглеждаме краен брой оператори $f_1^{\pm},\ldots,f_n^{\pm}$ и изразяваме действието на f_i^- върху вектори от вида $(i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_r)$

$$|m_1(i_1),\ldots,m_r(i_r)\rangle \equiv (f_{i_1}^+)^{m_1}\cdot(f_{i_2}^+)^{m_2}\cdots(f_{i_r}^+)^{m_r}|0\rangle \qquad /8.62/$$

Използвайки /8.53/ и правилата за антикомутация, в континуалния случай получаваме:

$$f_\mu^-(\underline{p},\eta)|m_1(\underline{k}_1,\mu_1,\eta_1),\ldots,m_r(\underline{k}_r,\mu_r,\eta_r)\rangle = \sum_{s=1}^{r}(-1)^{m_1+\cdots+m_{s-1}} \cdot \qquad /8.63/$$

$$\cdot\delta_{\mu\mu_s}\delta_{\eta\eta_s}\delta(\underline{p}-\underline{k}_s)\cdot m_s(p-m_s+1)|m_1,\ldots,m_{s-1},m_s-1,m_{s+1},\ldots,m_r\rangle .$$

Оттук /или направо обобщавайки 8.58/ намираме

$$f^3_\mu(\underline{p},\eta)|m_1(\underline{k}_1,\mu_1,\eta_1),\dots,m_r(\underline{k}_r,\mu_r,\eta_r)\rangle = \{p +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{r}\delta_{\mu\mu_s}\delta_{\eta\eta_s}\delta(\underline{p}-\underline{k}_s)\, m_s(p-m_s)\}|m_1,\dots,m_r\rangle \,. \qquad /8.64/$$

За антикомутатора между честотните части на $\overline{\Psi}(x)$ и $\Psi(y)$ получаваме

$$\{\Psi^{\eta}_{\alpha}(x,\eta),\ \Psi^{-\xi}_{\beta}(y,\xi)\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\underline{p}\, d\underline{q}\; e^{i\eta p x - i\xi q y}\,.$$

$$.\, v^{\mu,\eta}_{\alpha}(\underline{p},\eta)\, v^{\nu,-\xi}_{\beta}(\underline{q},\xi)\{f^{\eta}_{\mu}(\underline{p},\eta),\ f^{-\xi}_{\nu}(\underline{q},\xi)\} =$$

$$= \delta_{\eta\xi}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\underline{p}\, d\underline{q}\; e^{i\eta p x - i\xi q y}\, v^{\mu,\eta}_{\alpha}(\underline{p},\eta)\, v^{\nu,-\xi}_{\beta}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta(\underline{p}-\underline{q})\, f^3_\mu(\underline{p},\eta)\,. \qquad /8.65/$$

Ето защо

$$\{\Psi^{\eta}_{\alpha}(x,\eta),\ \Psi^{\eta}_{\beta}(y,-\eta)\} = 0 \qquad /8.66/$$

което, записано с традиционните означения, е

$$\{\overline{\Psi}^{+}(x),\ \Psi^{+}(y)\} = 0, \qquad \{\overline{\Psi}^{-}(x),\ \Psi^{-}(y)\} = 0\,. \qquad /8.67/$$

За да намерим $\{\Psi^{\eta}_{\alpha}(x,\eta),\ \Psi^{-\eta}_{\beta}(y,\eta)\}$ действуваме с този оператор върху състоянието /8.62/. След интеграция по $\underline{q}$, като използуваме /8.64/, достигаме до

$$\{\Psi^{\eta}_{\alpha}(x,\eta),\ \Psi^{-\eta}_{\beta}(y,\eta)\}\cdot|m_1(\underline{k}_1,\mu_1,\eta_1),\dots,m_r(\underline{k}_r,\mu_r,\eta_r)\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\underline{p}\; e^{i\eta p(x-y)}\, v^{\mu,\eta}_{\alpha}(\underline{p},\eta)\, v^{\mu,-\eta}_{\beta}(\underline{p},\eta)\,\{p +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{r}\delta_{\mu\mu_s}\delta_{\eta\eta_s}\delta(\underline{p}-\underline{k}_s)\, m_s(p-m_s)\}|m_1,\dots,m_r\rangle\,.$$

Окончателно с помощта на сумационното тъждество /8.40/ след несложни трансформации, намираме

$$\{\psi_\alpha^\eta(x,\eta), \psi_\beta^{-\eta}(y,\eta)\}|m_1,\dots,m_r\rangle = \Big[\frac{p}{i}\Big(i\gamma^n\frac{\partial}{\partial y^n}+m\Big)_{\beta\alpha} D^{-\eta}(y-x) +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{r} m_s(p-m_s)\, e^{i\eta_s k_s(x-y)}\, v_\alpha^{\mu_s,\eta_s}(\underline{k}_s,\eta_s)\cdot v_\beta^{\mu_s,-\eta_s}(\underline{k}_s,\eta_s)\cdot$$

$$\cdot|m_1,\dots,m_r\rangle \qquad /8.68/$$

Ако порядъкът на ϕ -статистиката p е 1, второто слагаемо се анулира, тъй като при

$$m_s = 0,1 \implies m_s(1-m_s) = 0 \qquad /8.69/$$

и /8.68/ се редуцира в известния израз за антикомутатора между ферми-полета:

$$\{\psi_\alpha^\eta(x,\eta), \psi_\beta^{-\eta}(y,\eta)\} = \frac{1}{i}\Big(i\gamma^n\frac{\partial}{\partial y^n}+m\Big)_{\beta\alpha} D^{-\eta}(y-x)\,. \qquad /8.70/$$

Като се вземе под внимание /8.67/, за пълния антикомутатор се получава:

$$\{\bar\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\}|m_1,\dots,m_r\rangle = \sum_{\eta=\pm}\{\psi_\alpha^\eta(x,\eta)\,\psi_\beta^{-\eta}(y,\eta)\}|m_1,\dots,m_r\rangle =$$

$$\Big[\frac{p}{i}\Big(i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\Big)_{\beta\alpha} D(y-x) + 2\sum_\eta\sum_{s=1}^{r} m_s(p-m_s)\cdot e^{i\eta_s(x-y)}\,\cdot$$

$$v_\alpha^{\mu_s,\eta_s}(\underline{k}_s,\eta_s)\, v_\beta^{\mu_s,-\eta_s}(\underline{k}_s,\eta_s)\Big]|m_1,\dots,m_r\rangle\,. \qquad /8.71/$$

При пространствено-подобни интервали поради наличие на функцията на Паули-Йордан $D(x-y)$ първото слагаемо се анулира, докато второто въобще не е 0. Затова в операторен вид

$$\{\bar\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} \neq 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2<0 \quad \text{и} \quad p>1 \qquad /8.72/$$

Нещо повече, от обстоятелството, че в общия случай

$$\{ f_i^{\xi}, f_i^{\xi} \} \neq 0 \qquad \xi = \pm$$

не е трудно да се заключи, че и едночестотните части на полетата не антикомутират

$$\{ \psi_\alpha^{\pm}(x), \psi_\beta^{\pm}(y) \} \neq 0, \qquad \{ \overline{\psi}_\alpha^{\pm}(x), \overline{\psi}_\beta^{\pm}(y) \} \neq 0 . \qquad /8.73/$$

Интересно е да се отбележи, че върху подпространството $\mathcal{L}_\phi$, което е линейна обвивка на "запълнени състояния" от вида

$$| p(\underline{k}_1, \mu_1, \eta_1) \cdots p(\underline{k}_r, \mu_r, \eta_r) \rangle , \qquad /8.74/$$

т.е. когато в /8.61/ $m_1 = m_2 = \cdots = m_r = p$, операторът /8.72/ е локален, т.е.

$$\{ \overline{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(y) \} | \ell \rangle = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0 , \quad |\ell\rangle \in \mathcal{L}_\phi . \qquad /8.75/$$

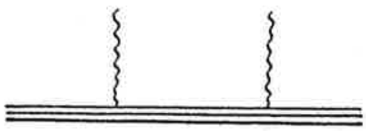
Затова в модел на квантова електродинамика с лагранжиан на взаимодействие

$$\mathcal{L}_{вз}(x) \sim J^n(x) A_n(x), \qquad /8.76/$$

където токът $J^n(x)$ се дефинира с равенството

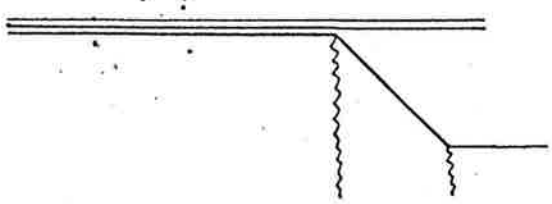
$$J^n(x) = \{ \overline{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) \} \equiv \frac{1}{2} \overline{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) + \frac{1}{2} \psi(x) \gamma^{n\,T} \overline{\psi}(x) , \qquad /8.77/$$

както $\mathcal{L}_{вз}$, така и свободният лагранжиан са локални в $\mathcal{L}_\phi$. В този случай например при $p = 3$ процесът от типа на комптоновското разсейване



/8.78/

е допустим, докато примерно диаграмата



/8.79/

е забранена.

Пример 3. Анзац на Грин

Ще приведем още един пример на оператори на раждане и унищожение, удовлетворяващи условията, формулирани в твърдение 8.1, за които ε_{ij} приема стойности както +1, така и -1. Нека

$$b^{\xi}_{i\alpha}\ ,\ \xi=\pm\ ,\ i=1,\dots,n,\quad \alpha=1,\dots,m, \qquad /8.80/$$

са оператори, удовлетворяващи съотношенията:

$$\begin{aligned} &[\,b^{\xi}_{i\alpha}\,,\,b^{\eta}_{j\beta}\,]=0 \quad \text{при} \quad \alpha\neq\beta \\ &\{\,b^{\xi}_{i\alpha}\,,\,b^{\eta}_{j\alpha}\,\}=\tfrac{1}{4}(\xi-\eta)^2\delta_{ij} \end{aligned} \qquad /8.81/$$

Ако положим

$$h_{i\alpha}=\tfrac{1}{2}\,[\,b^{+}_{i\alpha}\,,\,b^{-}_{i\alpha}\,], \qquad /8.82/$$

тогава $$[\,h_{i\alpha}\,,\,b^{\xi}_{i\alpha}\,]=\xi\, b^{\xi}_{i\alpha} \qquad /8.83/$$

и затова условие а) на твърдение 8.1 е изпълнено. Условие б) е очевидно също в сила.

Операторите /8.80/ имат единствено представяне, което може да се разглежда като представяне на алгебра на Ли. Наистина при фиксирана стойност на α операторите $b^{\pm}_{1\alpha},\dots,b^{\pm}_{n\alpha}$, са ферми-оператори, за които знаем, че генерират /представяне на/ алгебрата B_n - ще я бележим с B^{α}_n. От /8.81/ заключаваме, че

$$[B_n^{\alpha}, B_n^{\beta}] = 0 \qquad \text{при} \quad \alpha \neq \beta . \tag{8.84}$$

Затова всевъзможните комутатори на разглежданите оператори пораждат /неприводимо представяне на/ полупростата алгебра

$$\underbrace{\mathcal{B}_n \oplus \mathcal{B}_n \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n}_{m \text{ слагаеми}} . \tag{8.85}$$

Всъщност операторите /8.80/ са познати в парастатистиката - те са елементи от анзаца на Грин [4] , към които ние ще се върнем в следващата глава. Ще формулираме получения резултат в

<u>Твърдение 8.2.</u> Операторите $b_{i\alpha}^{\xi}$ от анзаца на Грин удовлетворяват основното съотношение за квантуване и могат да се разглеждат като оператори на раждане и унищожение.

ВТОРА ГЛАВА

ВЪРХУ ПРЕДСТАВЯНИЯТА НА ОПЕРАТОРИТЕ НА РАЖДАНЕ И УНИЩОЖЕНИЕ

В тази глава се изучават предимно представянията на операторите на раждане и унищожение. По аналогия с пространството на Фок в класическата квантова механика с краен брой степени на свобода и тук ще въведем понятие за пространство на Фок и ще класифицираме всевъзможните такива пространства. За параферми-операторите тази класификация е известна [49] - на всяко цяло положително число $p \in \mathbb{N}$, наречено порядък на парастатистиката, съответствува с точност до еквивалентност едно неприводимо представяне. Ще видим, че и в по-общия случай на A-, C- и D-статистиките това свойство остава в основни линии в сила - съществува взаимно-еднозначно съответствие между фоковските представяния и целите положителни числа.

В § 9 ще се въведат определения и ще се изведат теореми и леми, изпълняващи се в пространствата на Фок на всяка проста алгебра на Ли. В § 10 ще се разгледат всевъзможните крайномерни /не само фоковските/ представяния на параферми-операторите и ще бъдат класифицирани вакуумните им състояния - векторите от пространството на представянето, анулиращи се от операторите на унищожение. В следващите параграфи ще бъдат класифицирани и изучени пространствата на Фок на останалите прости алгебри на Ли. В § 12 въз основа на получените резултати за d-операторите ще бъдат изписани явни формули за матричните елементи на параферми-оператори.

9. Пространства на Фок за прости алгебри на Ли

В първа глава бе показано, че всяка класическа проста алгебра на Ли се характеризира напълно със съответствуващите ѝ оператори на раждане и унищожение. Обобщавайки основните свойства на пространството на състоянията в класическата квантова механика, тук ще дефинираме понятие за пространство на Фок и ще изведем някои общи свойства за представянията в такива пространства. В следващите параграфи тези резултати ще бъдат конкретизирани за всяка класическа алгебра поотделно и ще бъдат установени Ли-алгебричните характеристики на пространствата на Фок.

Ще напомним, че в квантовата механика с n степени на свобода пространството на състоянията W се поражда от вакуума на системата в следния смисъл. Постулира се съществуването на състояние $|0\rangle \in W$, вакуума, което се анулира от всички бозе-оператори на унищожение:

$$a_i^- |0\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad /9.1/$$

Тогава W се дефинира като попълнение на линейната обвивка M на всевъзможните вектори

$$a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \dots a_{i_m}^+ |0\rangle \qquad /9.2/$$

спрямо метриката, въведена с изискването ермитово спрегнатия оператор на a_i^+ да е a_i^- :

$$(a_i^+)^* = a_i^- . \qquad /9.3/$$

По същия начин се строи и пространството на Фок за ферми-оператори. Нещата тук се опростяват от обстоятелството, че пространството на състоянията е крайномерно, така че $M = W$.

В по-общия случай на оператори на раждане и унищожение ще приемем следната дефиниция.

Определение 9.1. Нека $a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}$ са оператори на раждане и унищожение, съответствуващи на класическата алгебра на Ли $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$-модулът W ще наричаме пространство на Фок на алгебрата $\mathcal{A}$, ако в W са изпълнени изискванията:

1. Условие за ермитовост.

$$(a_i^{+})^{*} = a_i^{-}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad /9.4/$$

Тук $*$ означава ермитово спрягане на съответния оператор.

2. Условие за вакуум. Съществува ненулев вектор $|0\rangle \in W$, анулиращ се от операторите на унищожение:

$$a_i^{-}|0\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad /9.5/$$

3. Условие за неприводимост. Пространството на представянето е линейна обвивка на всевъзможните вектори

$$a_{i_1}^{+} a_{i_2}^{+} \cdots a_{i_m}^{+} |0\rangle, \quad m \in \mathbb{N}_0. \qquad /9.6/$$

Пространството на Фок на алгебрата $\mathcal{A}$ ще наричаме още $\mathcal{A}$-модул на Фок или пространство на Фок на операторите $a_i^{\pm}$, $i = 1, \ldots, n$.

В квантовата теория на полето, когато i пробягва множество с мощността на континуума, първото условие е еквивалентно на изискването на ермитовост на полето. Както ще видим, то налага съществени ограничения върху пространствата на представянията.

Ако i се отъждестви например със собствените стойности на оператора на импулса, второто условие по същество е изискване за ограниченост отдолу на спектъра на енергията. Само по себе си то не налага ограничения върху представянето и затова по-скоро трябва да се приеме като дефиниция на вакуума. Наистина, както знаем, операторите на унищожение a_i^{-} винаги могат да се разглеждат като положителни корневи вектори. Затова във всеки неприводим $\mathcal{A}$-модул те анулират например /но въобще не само/ старшия вектор x_Λ, който, както следва от условие 1. /вж. следствие 9.1/, винаги съществува.

съществени ограничения върху възможните представяния налага условието за неприводимост. Ще видим, че от него произтича единствеността на вакуума $|0\rangle$.

Лема 9.1. Условието за ермитовост /9.4/ може да се удовлетвори тогава и само тогава, когато неприводимият $\mathcal{A}$-модул е крайномерен.

Доказателство.

Нека е изпълнено равенство /9.4/. За да се убедим в справедливостта на лемата, ще използуваме един известен резултат от теорията на представянията: антиермитовите представяния на компактните форми на класическите алгебри на Ли са крайномерни⁺. Върху полето на реалните числа алгебрите, породени от операторите на раждане и унищожение, не дават компактните форми. За да се възползуваме от този резултат, би трябвало да изразим генераторите чрез операторите $a_i^{\pm}$. За краткост ще се ограничим само с алгебрата A_n . В този случай компактната форма е алгебрата на групата $SU(n+1)$. Генераторите и

$$H_{jk} = i(e_{jj} - e_{kk}), \qquad /9.7/$$

$$E_{jk} = i(e_{jk} + e_{kj}),$$

$$F_{jk} = e_{jk} - e_{kj},$$

изразени чрез a-операторите

$$a_i^+ = e_{i0}, \qquad a_i^- = e_{0i}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad /9.8/$$

се преписват във вида

$$H_{0j} = i[a_j^-, a_j^+],$$

⁺ По-точно: ако всеки елемент iL, $L \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат оператор, представянето е крайномерно.

$$E_{0j} = i(a_j^+ + a_j^-),$$
$$F_{0j} = a_j^- - a_j^+,$$
$$H_{jk} = i[a_j^+, a_j^-] - i[a_k^+, a_k^-], \qquad /9.9/$$
$$E_{jk} = i[a_j^+, a_k^-] + i[a_k^+, a_k^-]$$
$$F_{jk} = [a_j^+, a_k^-] - [a_k^+, a_j^-]$$

Като се използува /9.4/, лесно се показва, че генераторите /9.9/ са антиермитови

$$(L_{ij})^* = - L_{ij}, \quad L = E, F, H. \qquad /9.10/$$

Затова A_n -модулът е крайномерен.

Обратно, от антиермитовостта на генераторите L_{ij} следва /9.4/. Известно е, че всяко представяне на компактните форми в крайномерно пространство, в частност това на $su(n+1)$, може с трансформация на подобие да бъде направено антиермитово.

Доказателството за алгебрите B_n, C_n и D_n е аналогично.

Всяко крайномерно неприводимо пространство на представянето W съдържа ненулев вектор x_Λ с тегло - старшето тегло Λ, анулиращ се от всички положителни корени на алгебрата. В глава първа се посочи, че за оператори на раждане и унищожение винаги могат да се вземат корневи вектори. В този случай ортогоналният базис в Картановата подалгебра може да се подреди така, че корените на операторите на раждане /респ. унищожение/ са отрицателни /респ. положителни/ вектори. Това ни дава основание да заключим.

<u>Следствие 9.1.</u> Неприводимите $\mathcal{A}$-модули на Фок са крайномерни. Ако ортогоналният базис в Картановата подалгебра на $\mathcal{A}$ е избран така, че операторите на унищожение a_i^-, $i=1,\dots,n$ са положителни корневи вектори, то старшият вектор на представянето x_Λ

се анулира от всички оператори $a_1^-, \dots, a_n^-$.

По такъв начин всяко крайномерно неприводимо представяне удовлетворява първите изисквания 1. и 2. на определение 9.1.

Лема 9.2. Нека операторите на раждане и унищожение $a_i^{\pm}$ са съответно отрицателни и положителни корневи вектори на $\mathcal{A}$ с корени $\mp\omega_i$. Ако в $\mathcal{A}$-модула W съществува вектор $|0\rangle$, така че са изпълнени трите изисквания на определение 9.1., то той е колинеарен на старшия вектор. Ето защо с точност до константен фактор вакуумът $|0\rangle$ е единствен.

Доказателство.

Произволен вектор $x \in W$ може да се представи по единствен начин във вид на сума от тегловни вектори x_{λ_i} с различни тегла:

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_{\lambda_j}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j\ ;\ i,j = 1,\dots,m. \qquad /9.11/$$

Поради това векторите $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_m}$, са линейно независими. При трансформация

$$x_{\lambda_j} \longrightarrow y_{\lambda_j} = a_i^- x_{\lambda_j}, \qquad j = 1,\dots,m, \qquad /9.12/$$

ненулевите от векторите y_{λ_j} имат също различни тегла $\lambda_j + \omega_i$. Затова тези вектори остават линейно независими. Заключаваме, че векторът $x \in W$ се анулира от оператора a_i^-,

$$a_i^- x = 0 \qquad /9.13/$$

тогава и само тогава, когато a_i^- анулира тегловните му компоненти, т.е.

$$a_i^- x_{\lambda_j} = 0 \qquad /9.14/$$

Това още означава, че за всяко $i = 1,\dots,n$ и $j = 1,\dots,m$ сумата $\lambda_j + \omega_i$ не е тегло.

По такъв начин задачата за намиране на всевъзможните вакуумни вектори /9.13/ се свежда до задача за намиране на тегловните вектори, удовлетворяващи същите условия. Сега ще се възползуваме от обстоятелството, че в лексиграфическото подреждане на ортогоналния Картанов базис старшето тегло Λ е по-голямо от всяко друго тегло, $\Lambda > \lambda$. Иначе казано, векторът $\Lambda - \lambda$ е положителен, $\Lambda - \lambda > 0$. Да предположим, че съществува вектор x_λ с тегло λ, различно от старшето тегло Λ, който удовлетворява постулатите 2. и 3. на определение 9.1. Тогава трябва да съществува полином от операторите на раждане и унищожение

$$P = \sum_{r=1}^{k} \sum_{i_{1r},\dots,i_{rr}} C(i_{1r}, i_{2r}, \dots, i_{rr})\, a^+_{i_{1r}}\, a^+_{i_{2r}} \dots a^+_{i_{rr}}, \qquad /9.15/$$

такъв че

$$x_\Lambda = P x_\lambda . \qquad /9.16/$$

В сумата /9.15/ $C(i_{1r}, \dots, i_{rr})$ са подходящо подбрани числови константи, зависещи от индексите в скобките. За да бъде Px_λ тегловен вектор е необходимо сумите от корени

$$\omega_{i_{1r}} + \omega_{i_{2r}} + \dots + \omega_{i_{rr}} = \omega, \quad r = 1, 2, \dots, k \qquad /9.17/$$

да не зависят от r. В такъв случай теглото на Px_λ ще бъде $\lambda - \omega$. Равенството /9.16/ е изпълнено, само ако

$$\Lambda = \lambda - \omega \qquad /9.18/$$

Такова равенство обаче не е възможно, тъй като ω е положителен вектор и $\Lambda - \lambda > 0$. Следователно направеното допускане не е възможно. Ако векторът $|0\rangle$ съществува, то неговото тегло е старшето тегло Λ на представянето Λ. Тъй като тегловното подпространство на Λ е едномерно, $|0\rangle$ и x_Λ са колинеарни. С това лемата е доказана.

В следващите две леми $\mathcal{A}$ е класическа алгебра с положителни /респ.отрицателни/ корени ω_i $(-\omega_i)$, корневи вектори $e_{\pm i}$ и съответствие между тях

$$\pm\omega_i \longleftrightarrow e_{\pm i}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \qquad /9.19/$$

Ще разгледаме крайномерния неприводим $\mathcal{A}$ -модул W със старши вектор x_Λ и ще допуснем, че

$$-\omega_{i_1}, -\omega_{i_2}, \dots, -\omega_{i_{p-q}}, \qquad q \le p\,,\ i_1 \ne i_2 \ne \dots \ne i_{p-q} = 1,\dots,p, \qquad /9.20/$$

са корени, чиито корневи вектори e_{-i} анулират x_Λ :

$$e_{-i}\, x_\Lambda = 0. \qquad /9.21/$$

Без да ограничаваме общността ще приемем, че /9.21/ се изпълнява за корените

$$-\omega_{q+1}, -\omega_{q+2}, \dots, -\omega_p. \qquad /9.22/$$

Лема 9.3. Ако корневите вектори, съответствуващи на корените /9.22/, анулират старшия вектор, подпространствата

$$W_1 = \text{л.о.}\{\, e_{-i_1} e_{-i_2} \dots e_{-i_r} x_\Lambda \mid i_1,\dots,i_r \le q\,,\ r \in \mathbb{N}_0 \} \qquad /9.23/$$

$$W_2 = \text{л.о.}\{\, e_{-1}^{m_1} e_{-2}^{m_2} \dots e_{-q}^{m_q} x_\Lambda \mid m_1,\dots,m_q \in \mathbb{N}_0 \} \qquad /9.24/$$

съвпадат:

$$W_1 = W_2 \qquad /9.25/$$

Доказателство.

Нека $h_1,\dots,h_n$ е произволен базис в Картановата подалгебра. Очевидно $W_2 \subset W_1$. За да докажем обратното включване, ще се възползуваме от теоремата на Поанкаре-Биркхов-де Вит [9], съгласно с която съвкупността от всевъзможните подредени мономи

$$e_{-1}^{m_1} \dots e_{-q}^{m_q} \dots e_{-p}^{m_p}\, e_1^{m_{p+1}} \dots e_p^{m_{2p}} \,.\, h_1^{m_{2p+1}} \dots h_n^{m_{2p+n}}\,, \qquad /9.26/$$

където $m_1,\dots,m_{2p+n} \in \mathbb{N}_0$, задава базис в универсалната обвиваща алгебра $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ на алгебрата $\mathcal{A}$. Затова

$$e_{-i_1} e_{-i_2} \dots e_{-i_r} = \sum_{m_1,\dots,m_{2p+n}} c_{m_1 \dots m_{2p+n}} e_{-1}^{m_1} \dots e_p^{m_{2p}} . h_1^{m_{2p+1}} \dots h_n^{m_{2p+n}} \qquad /9.27/$$

Последното равенство е между елементи в универсалната обвиваща алгебра $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Доколкото представянето на $\mathcal{A}$ в W се продължава до асоциативен хомоморфизъм на $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ в W, /9.27/ е вярно и в смисъл на операторно равенство в пространството на представянето. Действувайки с лявата и дясната му част върху старшия вектор, използувайки /9.21/ при $i = q+1,\dots,p$ и обстоятелството, че x_Λ е собствен вектор на елементите от Картановата подалгебра, намираме

$$e_{-i_1} \dots e_{-i_r} x_\Lambda = \sum_{m_1,\dots,m_r} c_{m_1 \dots m_r} e_{-1}^{m_1} e_{-2}^{m_2} \dots e_{-q}^{m_q} x_\Lambda \in W_2 , \qquad /9.28/$$

което доказва лемата.

<u>Лема 9.4.</u> Нека Σ_1 е съвкупност от отрицателни корени на алгебрата $\mathcal{A}$, чиито корневи вектори не анулират старшия вектор x_Λ на $\mathcal{A}$-модула W. Ще считаме, че

$$\Sigma_1 = \{-\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_q \mid q \le p\} \qquad /9.29/$$

и че W_1 е подпространството /9.23/, породено от действието на операторите e_{-i}, $i \le q$, върху старшия вектор. $\mathcal{A}$-модулът W съвпада с W_1 тогава и само тогава, когато за всяко $i > q$ векторът $\Lambda - \omega_i$ не е тегло.

<u>Доказателство.</u>

Необходимост. Нека $W_1 = W$. Да допуснем съществуването на корен ω_{i_0}, $i_0 > q$, такъв, че $\Lambda - \omega_{i_0}$ е тегло. Тогава може да се намери поне един тегловен вектор x с тегло Λ, който не се анулира от e_{-i_0}. Знаем, че x е колинеарен на старшия вектор. Затова

$$e_{-i_0} x_\Lambda \neq 0 . \qquad /9.30/$$

Това обаче не е възможно, тъй като

$$e_{-i_0} x_\Lambda \in W \quad \text{и} \quad e_{-i_0} x_\Lambda \notin W_1 \qquad /9.31/$$

Следователно за всяко $i > q$

$$e_{-i} x_\Lambda = 0 \iff \Lambda - \omega_i \text{ не е тегло} \qquad /9.32/$$

Достатъчност. Нека при всяко $i > q$ $\Lambda - \omega_i$ не е тегло. Тогава е изпълнено /9.32/ и затова по силата и в означенията на лема 9.3

$$W_1 = W_2 \qquad /9.33/$$

Да вземем произволен вектор $x \in W$. Доколкото модулът W е неприводим, ще се намери елемент P от универсалната обвиваща алгебра на $\mathcal{A}$, трансформиращ x_Λ в x :

$$x = P x_\Lambda . \qquad /9.34/$$

Използуваме теоремата на Поанкаре-Биркхов-де Вит и представяме P като линейна комбинация от подредени мономи:

$$P = \sum_{m_i} c_{m_1 \dots m_{2p+n}} e_{-1}^{m_1} \dots e_{-p}^{m_p} e_1^{m_{p+1}} \dots e_p^{m_{2p}} h_1^{m_{2p+1}} \dots h_n^{m_{2p+n}} . \qquad /9.35/$$

Действуваме с лявата и дясна част върху x_Λ. Като използуваме обстоятелството, че x_Λ винаги се анулира от положителните корневи вектори

$$e_i x_\Lambda = 0 , \quad \text{а също} \quad e_{-j} x_\Lambda = 0, \quad i = 1,\dots,p ; \ j = q+1,\dots,p ,$$

намираме, че

$$x = P x_\Lambda = \sum_{m_i} c_{m_1 \dots m_q} e_{-1}^{m_1} \dots e_{-q}^{m_q} \cdot x_\Lambda \in W_2 , \qquad /9.36/$$

поради което

$$W \subset W_2 = W_1 . \ \blacksquare \qquad /9.37/$$

Със следващата теорема се установява необходимото и достатъчно условие, за да бъде $\mathcal{A}$ -модулът W пространство на Фок.

Теорема 9.1. Нека операторите на раждане и унищожение $a_i^{\pm}$, $i=1,\dots,n$ на класическата алгебра $\mathcal{A}$ са съответно отрицателни и положителни корневи вектори с корени $\mp \omega_i$. $\mathcal{A}$ -модулът W е пространство на Фок на алгебрата $\mathcal{A}$ тогава и само тогава, когато W е неприводим крайномерен $\mathcal{A}$ -модул, в който

$$a_i^- a_j^+ x_\Lambda = 0, \quad i \neq j = 1,2,\dots,n. \qquad /9.38/$$

С точност до нормировъчен множител векторът $|0\rangle$ е единствен и равен на старшия вектор x_Λ.

Доказателство.

Необходимост. Нека W е $\mathcal{A}$ -модул на Фок. Съгласно с лема 9.1 той е крайномерен, а съгласно с лема 9.2 векторът $|0\rangle$ е старшият вектор x_Λ. За всяка от алгебрите $\mathcal{A} = A_n, B_n, C_n, D_n$ комутаторът

$$[a_i^-, a_j^+], \quad i \neq j = 1,\dots,n, \qquad /9.39/$$

е ненулев елемент от $\mathcal{A}$. Нещо повече, като корнев вектор той е един от базисните елементи на подредения базис /9.26/ в универсалната обвиваща на $\mathcal{A}$ и не може да се представи като никаква друга линейна комбинация от подредени мономи. Затова, ако допуснем, че

$$a_i^- a_j^+ x_\Lambda = [a_i^-, a_j^+] x_\Lambda \neq 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \qquad /9.40/$$

то

$$a_i^- a_j^+ |0\rangle \cong a_i^- a_j^+ x_\Lambda \in W$$

и W не е пространство на Фок. Следователно /9.40/ е невъзможно.

Достатъчност. Нека в неприводимия крайномерен $\mathcal{A}$ -модул е изпълнено равенство /9.38/. Избираме представянето така, че да е удовлетворено условие 1. на лема 9.1. Генератори на $\mathcal{A}$ са

$$a_i^{\pm}, \; [a_i^-, a_j^+], \quad i,j = 1,\dots,n \qquad /9.41/$$

и тези от комутаторите

$$[a_i^-, a_j^-] \, , \; [a_i^+, a_j^+] \, , \qquad /9.42/$$

които не са 0. Например за A_n всички комутатори /9.42/ се анулират, докато за B_n те са корневи вектори. От /9.38/ и обстоятелството, че a_i^- са положителни корневи вектори, следва $(i \neq j)$, че

$$[a_i^-, a_j^+]\, x_\Lambda = 0 \, , \; a_i^- x_\Lambda = 0 \, , \; [a_i^-, a_j^-]\, x_\Lambda = 0 . \qquad /9.43/$$

Затова /лема 9.4/ W се поражда от тези от ненулевите оператори

$$a_i^+ \, , [a_i^+, a_j^+] \, , \qquad /9.44/$$

които не анулират старшия вектор. В такъв случай W е линейна обвивка на вектори от вида

$$a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \cdots a_{i_m}^+ x_\Lambda \, . \qquad /9.45/$$

Виждаме, че за x_Λ са изпълнени трите условия на определение 9.1 и затова W е пространство на Фок на алгебрата $\mathcal{A}$. Този резултат заедно с лема 9.2 показва, че $|0\rangle$ е колинеарен на x_Λ и затова с точност до нормировка е единствен. ▯

С даденото определение 9.1 на пространство на Фок на операторите $a_i^\pm$, $i = 1, \ldots, n$, не се изключва възможността някои от операторите на раждане да анулират вакуума:

$$a_{i_1}^+ |0\rangle = \ldots = a_{i_q}^+ |0\rangle = 0 \qquad /9.46/$$

<u>Определение 9.2.</u> Пространството на Фок W на операторите на раждане и унищожение $a_1^\pm, \ldots, a_n^\pm$ ще наричаме собствено пространство на Фок на тези оператори, ако нито един от операторите на раждане не анулира вакуумния вектор.

Ако в пространството на Фок W операторът a_i^+ анулира вакуума, $a_i^+ |0\rangle = 0$, ще казваме, че W е несобствено пространство относно оператора a_i^+ .