Даденото в началото на този параграф определение за пространство на Фок допуска естествено обобщение за произволна съвкупност от отрицателни корневи вектори.

Нека $\mathcal{A}$ е класическа алгебра на Ли с положителни и отрицателни корени $\pm\omega_i$, корневи вектори $e_{\pm i}$ и съответствие между тях

$$\pm\omega_i \longleftrightarrow e_{\pm i}, \quad i = 1, \dots, p. \qquad /9.47/$$

<u>Определние 9.3.</u> Крайномерният $\mathcal{A}$-модул W ще наричаме пространство на Фок на корените $e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_{-q}$, $q \leq p$, ако в W се изпълняват изискванията:

а) съществува вакуум: във W има вектор $|0\rangle$, анулиращ се от положителните корени e_i, $i \leq p$,

$$e_i|0\rangle = 0 \quad i = 1, \dots, p \qquad /9.48/$$

б) условие за неприводимост: пространството W е линейна обвивка на вектори от вида

$$e_{-i_1} e_{-i_2} \cdots e_{-i_m}|0\rangle , \qquad /9.49/$$

където $i_1, i_2, \dots, i_m \leq q$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Лема 9.2. се обобщава почти без изменение и твърди, че в пространството на Фок с точност до нормировка вакуумът е единствен и колинеарен на старшия вектор x_Λ. От лема 9.4, следва, че W е пространство на Фок на операторите $e_{-1}, \dots, e_{-q}$ тогава и само тогава, когато

$$e_{-i}\, x_\Lambda = 0, \quad i = q+1, q+2, \dots, p. \qquad /9.50/$$

10. Анализ на вакуумните състояния в неприводимите B_n-модули

Без да се ограничаваме в рамките на пространствата на Фок, в параграфа ще класифицираме всички крайномерни представяния на даден брой n двойки парaферми-оператори на раждане и унищожение. Причините за това са две. От една страна, фоковските представяния на тези оператори са класифицирани от Гринберг и Месия [49] и за тях бихме могли да дадем само нов, Ли-алгебричен извод - нещо, което без друго ще бъде направено в рамките на по-общата проблема. От друга страна, в последно време се появиха работи, в които се твърди, че класът от представяния, които могат да представляват физически интерес, не се изчерпва с фоковските представяния. Пионерска в това отношение е работата на Говорков [16] . В нея е показано как в пространство, което е по същество тензорно произведение на две фермиевски пространства на Фок, могат да се въведат вътрешни степени на свобода на парафермионите и е изписан в явен вид оператора на изоспина. По-нататъшно развитие тази идея намери в работата на Брекен и Грин [20] . В нея е предложено да се използува обобщена парастатистика от даден порядък $p \in N$. Това означава, че пространството на състоянията $\mathcal{H}_p$ е тензорно произведение на p неприводими пространства, всяко от които се характеризира със старше тегло $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$ по отношение на B_n . Случаят $p = 3$ е изследван по-подробно от гледна точка на модел, аналогичен на модела на кварките, и е показано по какъв начин могат да се дефинират операторите на изоспина и хипертовара. В този, пък и по-общия случай пространството на представянето $\mathcal{H}_p$ е неприводим B_n-модул, всяка неприводима компонента на който съдържа въобще повече от един вектор, анулиращ се от парафермиоператорите на унищожение. Тези състояния ще наричаме вакуумни. В интерпретацията на Говорков [16],

, възприета също от Брекен и Грин [20] , вакуумните вектори /с изключение на старшия вектор/ не се отъждествяват с безчастичното състояние - вакуума. Между резултатите, отнасящи се за Ли-алгебричната структура на пространството на представянето, в [20] е показано, че в рамките на произволен неприводим B_n-модул всеки неприводим A_{n-1}-подмодул, съдържащ поне едно вакуумно състояние, влиза с кратност единица и че всички такива A_{n-1}-модули се съдържат в един неприводим D_n -подмодул. Ще усилим този резултат и ще докажем съществуването на единствен неприводим A_{n-1}-подмодул, съдържащ всички вакуумни и само вакуумни състояния. По-нататък ще покажем, че въобще теглата на вакуумните състояния не са прости - резултат, който се различава от приведения в [20] $^{+}$.

Ли-алгебрични свойства както на параферми-, така и на парабозе-оператори са изучавани, доколкото ни е известно, най-напред от Камефучи и Такахаши [22] . Те показват, че линейната обвивка на антикомутаторите /респ.комутаторите/ на даден брой n параферми- /респ. парабозе-/ оператори е изоморфна на алгебрата на Ли $D_n(C_n)$. Всевъзможните комутатори на даден брой абстрактни парабозе-оператори не затварят крайномерна алгебра на Ли, докато, както вече знаем, линейната обвивка на всички комутатори на параферми-операторите е изоморфна на B_n . Това свойство е отбелязано в [12] .

<u>Лема 10.1.</u> Върху полето на реалните числа $\mathbb{R}$ Ли-алгебрата, породена от n двойки параферми-оператори $b_i^{\pm}$, $i=1,\ldots,n$, е изоморфна на некомпактната форма $so(n,n+1)$ на алгебрата B_n [50] .

<u>Доказателство.</u>

Алгебрата $so(n,n+1)$ може да се определи като съвкупност от $(2n+1)$-мерни квадратни матрици γ , удовлетворяващи матричното

$^{+}$ В забележка, добавена при коректурите, авторите на [20] отбелязват тази своя неточност и цитират за справка наша работа [10] , резултатите от която ще бъдат приведени в параграфа.

уравнение

$$\overset{T}{\gamma}\beta + \beta\gamma = 0 \qquad /10.1/$$

Тук β е също $(2n+1)$-мерна квадратна матрица с диагонални елементи, както следва:

$$\beta = diag\,(1,-1,1,-1,\ldots,1,-1,1,-1,-1) \qquad /10.2/$$

В така дефинираната алгебра може да се въведе базис от матрици:

$$f_p^1 = e_{2p-1,2n+1} + e_{2n+1,2p-1}, \qquad f_p^2 = e_{2p,2n+1} - e_{2n+1,2p},$$

$$f_p^3 = e_{2p-1,2p} + e_{2p,2p-1}, \qquad f_{pq}^4 = e_{2q,2p} - e_{2p,2q},$$

$$f_{pq}^5 = e_{2p-1,2q} + e_{2q,2p-1}, \qquad f_{pq}^6 = e_{2p-1,2q-1} - e_{2q-1,2p-1}, \qquad /10.3/$$

$$f_{pq}^7 = e_{2p,2q-1} + e_{2q-1,2p},$$

където $p,q = 1,\ldots,n$ и $p<q$.

За базис в ще изберем операторите:

$$g_p^1 = \tfrac{1}{2}(b_p^- + b_p^+),$$

$$g_p^2 = \tfrac{1}{2}(b_p^- - b_p^+),$$

$$g_p^3 = \tfrac{1}{2}[b_p^-, b_p^+],$$

$$/10.4/$$

$$g_{pq}^4 = \tfrac{1}{4}\Big([b_p^-, b_q^-] + [b_p^+, b_q^+] - [b_p^-, b_q^+] + [b_q^-, b_p^+]\Big),$$

$$g_{pq}^5 = \tfrac{1}{4}\Big(-[b_p^-, b_q^-] + [b_p^+, b_q^+] + [b_p^-, b_q^+] + [b_q^-, b_p^+]\Big),$$

$$g_{pq}^6 = \tfrac{1}{4}\Big([b_p^-, b_q^-] + [b_p^+, b_q^+] + [b_p^-, b_q^+] - [b_q^-, b_p^+]\Big),$$

$$g^7_{pq} = \frac{1}{4}\left([b^-_p, b^-_q] - [b^+_p, b^+_q] + [b^-_p, b^+_q] + [b^-_q, b^+_p] \right)$$

С помощта на трилинейните комутационни съотношения /4.12/ се проверява, че изображението θ, дефинирано с

$$\theta g^i_p = f^i_p \, , \quad \theta g^j_{pq} = f^j_{pq} \, , \qquad /10.5/$$

запазва комутационните съотношения между генераторите. Продължавайки го по линейност върху $\mathbb{R}$, заключаваме, че разглежданото матрично представяне на $so(n, n+1)$ е изоморфно на реалната параферми-алгебра. Затова върху $\mathbb{C}$ тази алгебра е изоморфна на B_n. ▯

Да отбележим също, че / $\approx$ означава изоморфизъм/

$$\wedge.o.\{ i^n f^n \mid n = 1, \ldots, 7 \} \approx so(2n+1) \, , \quad i^2 = -1 \, . \qquad /10.6/$$

Ще напомним, че изображението

$$\tau : a_i \longrightarrow A_i \, , \quad i = 1, \ldots, n \, , \qquad /10.7/$$

на произволна съвкупност от абстрактни оператори, удовлетворяващи дадени полиномиални операторни равенства

$$Q_k(a_1, \ldots, a_n) = 0 \, , \quad k = 1, \ldots, m \, , \qquad /10.8/$$

в множеството от линейни оператори A_i, дефинирани в линейното пространство $\mathcal{L}$, се нарича неприводимо линейно представяне на операторите a_i, $i = 1, \ldots, n$, ако

а) $Q_k(A_1, \ldots, A_n) = 0 \, , \quad k = 1, \ldots, m$;

б) нека $\mathcal{P}$ е алгебрата от всевъзможните полиноми на операторите $A_1, \ldots, A_n$ и x - произволен вектор от $\mathcal{L}$; тогава[+]

[+] Тази дефиниция може да се даде в термини на свободната алгебра на изходните оператори. Освен това в случай на безкрайномерни представяния, с каквито няма да се сблъскаме, понятието за неприводимост трябва да се прецизира.

$$\mathcal{I} = \{ P(a_1, a_2, \dots, a_n)x \mid P \in \mathcal{P} \}. \qquad /10.9/$$

За параферми-операторите равенството /10.8/ се конкретизира в трилинейните комутационни съотношения

$$[[b_i^{\xi}, b_j^{\eta}], b_k^{\delta}] = \frac{1}{2}(\eta-\delta)^2 \delta_{jk} b_i^{\xi} - \frac{1}{2}(\xi-\delta)^2 \delta_{ik} b_j^{\eta}, \qquad /10.10/$$

където $\xi, \eta, \delta = \pm$ или ± 1; $i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

Оттук и от обстоятелството, че всеки полином от генератори на B_n може да се представи като полином от параферми-оператори и обратно заключаваме.

Следствие 10.1. Представянето на параферми-операторите $b_i^{\pm}$, $i=1,\dots,n$ е неприводимо тогава и само тогава, когато е неприводимо представянето на породената от тях алгебра B_n с генератори

$$b_i^{\xi}, \quad [b_j^{\eta}, b_k^{\delta}], \quad \xi, \eta, \delta = \pm. \qquad /10.11/$$

Очевидно е, че приведеното тук разсъждение е в сила и за оператори на раждане и унищожение на всяка от останалите класически алгебри на Ли. По такъв начин задачата за намиране на представянията на операторите на раждане и унищожение се свежда към чисто Ли-алгебрична задача. Представянията на реалните форми на класическите алгебри, даже ако се ограничат до класа от интегрируемите представяния - тези, продължими до представяния на съответната група, - не са напълно изучени. Съществува обаче пълна класификация и са намерени матричните елементи на всички крайномерни представяния. Оказва се, че именно тези представяния са от физически интерес. Наистина, ако наложим условието за ермитовост,

$$(b_i^{\pm})^* = b_i^{\mp}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad /10.12/$$

крайномерността на представянето е следствие от лема 9.1. Доказахме я явно за алгебрата A_n . В случай на B_n генераторите на компактната форма $so(2n+1)$ се изразяват чрез операторите /10.4/ с равенството

$$\tilde{g}^n = i^n g^n, \quad n = 1, \ldots, 7 \quad , \quad i^2 = -1 . \qquad /10.13/$$

Както се вижда от явния вид на операторите g^n ,

$$(b_i^{\pm})^* = b_i^{\mp} \iff (\tilde{g}^n)^* = - \tilde{g}^n . \qquad /10.14/$$

<u>Следствие 10.2.</u> Представянето на параферми-операторите, удовлетворяващо условието за ермитовост /9.4/, е неприводимо тогава и само тогава, когато линейната обвивка на операторите /10.11/ задава неприводимо крайномерно представяне на алгебрата B_n . Установеното по този начин съответствие между представянията е взаимно еднозначно.

Този резултат изяснява напълно въпроса за класификацията на разглеждания клас от представяния на параферми-операторите.

Всяко крайномерно неприводимо представяне на B_n се характеризира с координатите на старшето тегло Λ , които обикновено се записват или в каноническия, или в контравариантния ортогонален базис в $\mathcal{H}^*$. Както се отбеляза в края на § 2, тези координати са собствени стойности на векторите от F -базиса и на ковариантния изходен базис в $\mathcal{H}$, H -базиса. H -базисът се избира така, че координатите на всяко тегло да са цели или полуцели числа. За да намерим Ли-алгебричните характеристики на представянето в термини на пораждащите алгебрата B_n параферми-оператори, ще изразим векторите и от двата базиса чрез $b_i^{\pm}$. Най-напред ще намерим връзката между каноничните и ортогоналните координати.

За H -базис в $\mathcal{H}$ ще изберем съвкупността от ортогоналните спрямо формата на Картан-Килинг вектори /4.18/

$$H = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \qquad /10.15/$$

със скаларно произведение /форма на Картан-Килинг/

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij}(4n-2). \qquad /10.16/$$

Като пресметнем комутаторите между елементите от Картановата подалгебра и корневите вектори /4.1//, не е трудно да се убедим, че съответствието между корени $\overset{*}{\omega}_k \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ /или $\omega_k \in \mathcal{H}$ / и корневите вектори e_k е:

$$\begin{aligned}
&e_{ij} - e_{-j,-i} \longleftrightarrow \overset{*}{h}{}^i - \overset{*}{h}{}^j,\\
&e_{ji} - e_{-i,-j} \longleftrightarrow \overset{*}{h}{}^j - \overset{*}{h}{}^i,\\
&e_{i,-j} - e_{j,-i} \longleftrightarrow \overset{*}{h}{}^i + \overset{*}{h}{}^j,\\
&e_{-j,i} - e_{-i,j} \longleftrightarrow -\overset{*}{h}{}^i - \overset{*}{h}{}^j, \qquad 0 < i < j \leq n \qquad /10.17/\\
&2\, e_{i0} - e_{0,-i} \longleftrightarrow \overset{*}{h}{}^i,\\
&-2\, e_{-i,0} + e_{0,i} \longleftrightarrow -\overset{*}{h}{}^i.
\end{aligned}$$

В избрания ред /10.15/ на базисните елементи от $\mathcal{H}$ прости са корените

$$\overset{*}{h}{}^i - \overset{*}{h}{}^{i+1}, \quad \overset{*}{h}{}^n, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \qquad /10.18/$$

От обстоятелството, че координатите на $\overset{*}{\lambda} \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ и на образа му $\lambda \in \mathcal{H}$ са едни и същи в съответните контравариантни базиси

$$h^i = (h^i, h^j)\, h_j = \frac{h_i}{4n-2}, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad /10.19/$$

заключаваме, че като вектори от $\mathcal{H}$ прости корени са:

$$\pi_i = \frac{h_i - h_{i+1}}{4n-2}, \qquad \pi_n = \frac{h_n}{4n-2}, \quad i = 1, \dots, n-1. \qquad /10.20/$$

Оттук и от /2.41/ намираме елементите от F-базиса:

$$f_i = \frac{2}{(\pi_i,\pi_i)}\pi_i = h_i - h_{i+1}, \quad i=1,\dots,n-1,$$

/10.21/

$$f_n = \frac{2}{(\pi_n,\pi_n)}\pi_n = 2h_n .$$

Нека

$$\overset{*}{\lambda} = \lambda_i \overset{*}{f}{}^i = l_j \overset{*}{h}{}^j \in \overset{*}{\mathcal{H}}$$ /10.22/

е произволен функционал. Връзката между каноничните му координати λ_i и ортогоналните му координати l_j се дава с матрицата, свързваща F- и H -базисите

$$f_i = A_i{}^j h_j$$ /10.23/

Явният вид на A се дава с равенствата /10.21/, откъдето намираме:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= l_1 - l_2\\
\lambda_2 &= l_2 - l_3\\
\lambda_3 &= l_3 - l_4\\
&\dots\dots\\
\lambda_{n-1} &= l_{n-1} - l_n\\
\lambda_n &= 2l_n
\end{aligned}$$ /10.24/

Тази система се решава лесно спрямо ортогоналните координати:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \tfrac{1}{2}\lambda_n\\
l_2 &= \qquad \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \tfrac{1}{2}\lambda_n\\
&\dots\dots\dots\dots\\
l_{n-1} &= \qquad\qquad \lambda_{n-1} + \tfrac{1}{2}\lambda_n\\
l_n &= \qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{2}\lambda_n
\end{aligned}$$ /10.25/

Както се посочи в § 2, каноничните координати $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ на произволно тегло са цели числа; в частност каноничните координати $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ на старшето тегло Λ са неотрицателни цели числа. Поради това от /10.25/ заключаваме, че ортогоналните координати $L_1,\dots,L_n$ на Λ удовлетворяват неравенствата:

$$L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_n . \qquad /10.26/$$

Всички те са едновременно цели или полуцели числа в зависимост от това, дали Λ_n е четно или нечетно число. Доколкото ковариантните ортогонални координати на корените са винаги 0 или ± 1, от последното равенство в /10.24/ се вижда, че n -тата канонична координата на произволен корен е 0 или ± 2. От формула /2.24/ следва, че

$$\lambda_n = \Lambda_n - \sum_i k_i [\omega_i]_n , \qquad k_i \in \mathbb{N}_0, \quad \omega_i > 0 \qquad /10.27/$$

Това показва, че едновременно с Λ_n координатата λ_n и на всяко друго тегло е четна или нечетна. Ето защо ортогоналните координати $\ell_1, \ldots, \ell_n$ на всички тегла от дадено представяне са едновременно цели или полуцели числа. Този резултат е известен. Той се използува например при конструирането на базиса на Гелфанд-Цейтлин, в който явно са написани матричните елементи на представянията на B_n [51] . В познатата ни литература не се посочва, пък и това не винаги е необходимо, в какъв базис на Картановата подалгебра се дават ортогоналните координати. Тук това е съществено за намиране на характеристиките на представянето в термини на параферми-оператори.

Както вече знаем /4.21/

$$h_i = \frac{1}{2} [b_i^- , b_i^+], \qquad i = 1,2,\ldots,n. \qquad /10.28/$$

Оттук и от /10.21/ за F -базиса, изразен чрез параферми-оператори, се получава:

$$f_i = \frac{1}{2} [b_i^- , b_i^+] - \frac{1}{2} [b_{i+1}^- , b_{i+1}^+], \qquad i = 1,\ldots,n-1, \qquad /10.29/$$

$$f_n = [b_n^- , b_n^+] .$$

<u>Следствие 10.3.</u> В произволно неприводимо крайномерно представяне на параферми-операторите ортогоналните координати на произ-

волно тегло λ са собствени стойности на оператора

$$\frac{1}{2}[b_i^-, b_i^+], \quad i = 1,\dots,n$$

върху тегловния вектор x_λ. В частност ортогоналните координати на представянето са собствени стойности на тези оператори върху старшия вектор x_Λ.

Пример 1. Да намерим ортогоналните координати на представянето на Фок за n двойки ферми-оператори. От теорема 9.1 се знае, че вакуумът е старшият вектор. Затова

$$\frac{1}{2}[b_i^-, b_i^+]|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle \qquad /10.30/$$

и ортогоналната сигнатура на представянето е

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right). \qquad /10.31/$$

Пример 2. Представянето на параферми-операторите от порядък p се дефинират с условието [49]

$$b_i^- b_j^+ |0\rangle = p\delta_{ij}|0\rangle, \qquad /10.32/$$

където $|0\rangle$ е единственият вектор в пространството на представянето, анулиращ се от операторите на унищожение b_i^-. Затова той е старшият вектор /лема 9.2/ и тъй като

$$b_i^- b_i^+ |0\rangle = [b_i^-, b_i^+]|0\rangle = p|0\rangle \qquad /10.33/$$

ортогоналната сигнатура на съответствуващото на B_n представяне е

$$\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, \dots, \frac{p}{2}\right). \qquad /10.34/$$

Сега може да пристъпим към решаване на основната проблема, поставена в този параграф - намиране на вакуумните състояния.

Определение 10.1. Нека W е крайномерен неприводим модул на алгебрата B_n, породена от n двойки параферми-оператори. Векторът $x \in W$, анулиращ се от операторите на унищожение $b_1^-, \dots, b_n^-$,

$$b_i^- x = 0 \ , \quad i = 1, \dots, n, \qquad /10.35/$$

ще наричаме вакуумен вектор, а подпространството

$$V = \{ x \mid x \in W, \ b_i^- x = 0, \ i = 1, \dots, n \} - \qquad /10.36/$$

вакуумно подпространство на W.

Вече няколкократно използувахме обстоятелството, че ортогоналният базис в $\mathcal{H}$ може да се избере така, че операторите на раждане /респ.унищожение/ да са отрицателни /респ. положителни/ коренни вектори. В H -базиса /10.15/ това е изпълнено. Както знаем от /4.19/

$$b_i^- = 2 e_{i0} - e_{0,-i} , \qquad /10.37/$$

$$b_i^+ = -2 e_{-i0} + e_{0i} .$$

От последните два реда на /10.17/ се вижда, че спрямо H -базиса съответствието на $b_i^{\pm}$ с корените е

$$b_i^{\pm} \longleftrightarrow \mp h^i = \frac{h_i}{4n-2} \qquad /10.38/$$

и затова първата /и единствена/ различна от 0 координата на $b_i^- \ (b_i^+)$ е положителна /респ.ортицателна/. Доколкото в контравариантния ортогонален базис координатите на корените са целочислени, по-нататък ще ги записваме в този базис. По този начин задачата за намиране на вакуумното подпространство сега може да се формулира напълно на Ли-алгебричен език.

<u>Проблема 10.1.</u> Нека W е произволен неприводим модул на алгебрата B_n с коренна система

$$\Sigma = \{ \pm h^i, \ \pm h^j \pm h^k \mid i,j,k = 1, \dots, n, \ j \neq k \} \qquad /10.39/$$

и коренни вектори

$$e_\omega \ , \quad \omega \in \Sigma . \qquad /10.40/$$

Да се намери подпространството

$$V = \{x \mid x \in W,\ e_{h^i} \cdot x = 0,\ i = 1, \ldots, n\}. \qquad /10.41/$$

Видяхме, че ортогоналните ковариантни координати на всички тегла от дадено представяне са едновременно /полу/цели числа, а тези на корените - цели числа.

Лема 10.2. Нека /полу/целите числа $(L_1, \ldots, L_n)$ са ортогоналните координати на старшето тегло Λ. Векторът λ с /полу/цели координати $(l_1, \ldots, l_n)$ е тегло тогава и само тогава, когато координатите му удовлетворяват неравенствата

$$|l_{i_1}| + |l_{i_2}| + \cdots + |l_{i_m}| \leq L_1 + L_2 + \cdots + L_m \qquad /10.42/$$

при $m = 1, 2, \ldots, n;\ i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m = 1, \ldots, n.$

Доказателство.

Нека T_W е съвкупността от теглата на неприводимия модул W със старше тегло Λ и

$$\lambda = (l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n) \in T_W. \qquad /10.43/$$

От инвариантността на T_W спрямо трансформации от групата на Вайл следва, че

$$S_{h^i} \cdot \lambda = \lambda - \frac{2(\lambda, h^i)}{(h^i, h^i)} h^i = (\lambda_1, \ldots \lambda_{i-1}, -\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n) \qquad /10.44/$$

Аналогично

$$S_{h^i - h^j} \cdot (\lambda_1 \cdots \overset{i}{\lambda_i} \cdots \overset{j}{\lambda_j} \cdots \lambda_n) = (\lambda_1 \cdots \overset{i}{\lambda_j} \cdots \overset{j}{\lambda_i} \cdots \lambda_n) \qquad /10.45/$$

Тези свойства показват, че векторът, получен от дадено тегло $(l_1, \ldots, l_n)$ с произволна смяна на знаците $l_i \to -l_i$ и пермутация на ортогоналните му координати, е също тегло.

За доказване на неравенство /10.42/ ще се възползуваме от обстоятелството, че произволно тегло $\lambda \in T_W$ е представимо във вида

$$\lambda = \Lambda + \sum_i k_i \omega_i, \quad k_i \in \mathbb{N}_0, \qquad /10.46/$$

където

$$\omega_i \in \Sigma^- = \{-h^i, -h^j \pm h^k \mid i,j,k = 1,\dots,n;\ j<k\}. \qquad /10.47/$$

Очевидно сумата на първите m ортогонални координати на всеки корен $\omega_i \in \Sigma^-$ не е положително число. Затова и сумата на първите m координати на вектора

$$\sum_i k_i \omega_i, \quad \omega_i \in \Sigma^-, \quad k_i \in \mathbb{N}_0, \qquad /10.48/$$

не е по-голяма от 0. Затова за всяко тегло $\bar\lambda = (\bar\ell_1, \dots, \bar\ell_n) \in T_W$ е изпълнено неравенството

$$\bar\ell_1 + \bar\ell_2 + \dots + \bar\ell_m \le L_1 + \dots + L_m, \quad m = 1,2,\dots,n. \qquad /10.49/$$

Да предположим, че съществува тегло $(\ell_1, \dots, \ell_n)$, нарушаващо някое от неравенствата /10.42/, например

$$|\ell_{i_1}| + \dots + |\ell_{i_m}| > L_1 + \dots + L_m. \qquad /10.50/$$

От инвариантността на съвкупността от теглата T_W спрямо трансформации от групата на Вайл следва, че векторът

$$\bar\lambda = (\bar\ell_1, \bar\ell_2, \dots, \bar\ell_m, \dots, \bar\ell_n) = (|\ell_{i_1}|, \dots |\ell_{i_m}|, \dots, |\ell_{i_n}|) \qquad /10.51/$$

е също тегло. Тогава съгласно /10.50/

$$\bar\ell_1 + \bar\ell_2 + \dots + \bar\ell_m > L_1 + \dots + L_m, \qquad /10.52/$$

което противоречи на /10.49/. Следователно ортогоналните координати на всяко тегло λ удовлетворяват неравенствата /10.42/.

Достатъчната част на доказателството може да се установи, като се използува свойство /2.30/ на групата на Вайл. От това свойство в частност следва, че всеки вектор $(l_1,\dots,l_n)$ с координати, удовлетворяващи неравенствата

$$-L_i \le l_i \le L_i, \tag{10.53}$$

е тегло. Ние няма да се спираме по-подробно на тази част от доказателството, тъй като по-нататък няма да я използуваме.

<u>Теорема 10.1.</u> Тегловният вектор x_l е вакуумен тогава и само тогава, когато ортогоналните координати $l=(l_1,\dots,l_n)$ на теглото му удовлетворяват равенството

$$l_1+l_2+\dots+l_n = L_1+L_2+\dots+L_n. \tag{10.54}$$

Тук $\Lambda=(L_1,\dots,L_n)$ е старшето тегло на разглеждания неприводим B_n-модул W, записано чрез ортогоналните си координати $L_1,\dots,L_n$.

<u>Доказателство.</u>

Равенството /10.54/ е достатъчно. Наистина да допуснем, че координатите на теглото на вектора x_l удовлетворяват /10.54/. Тогава векторът

$$x_{l'} = e_{h^i}\cdot x_l \tag{10.55}$$

е или равен на 0, или има тегло

$$l'=(l_1',\dots,l_i',\dots,l_n') = l+h^i = (l_1,\dots,l_i+1,\dots,l_n). \tag{10.56}$$

Последното обаче е невъзможно, тъй като координатите на вектора l' нарушават неравенство /10.42/:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i' > \sum_{i=1}^{n} L_i. \tag{10.57}$$

При доказателството на необходимата част от теоремата ще се възползуваме от

1. Неприводимостта на представянето. Ако W е крайномерен неприводим модул на алгебра $\mathcal{A}$ с базис $e_1,\dots,e_p$ и x е произволен вектор от W, то W е линейна обвивка на всевъзможните

вектори от вида

$$e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m}x\,,\qquad m\in\mathbb{N}_0\,. \qquad /10.58/$$

2. Теоремата на Поанкаре-Биргхоф-де Вит [42] .

Ще изходим от противното. Да предположим, че съществува теглови вектор $x_\ell \in W$ със следните свойства:

а) ортогоналните координати на теглото $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ удовлетворяват неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\ell_i<\sum_{i=1}^{n}L_i\,; \qquad /10.59/$$

б) корневите вектори $e_{h^i}\,,\ i=1,\dots,n\,,\quad h^i\in\Sigma$ (10.39) анулират x_ℓ :

$$e_{h^i}\cdot x_\ell=0,\qquad i=1,\dots,n. \qquad /10.60/$$

Ще разпределим базисните елементи на алгебрата в три групи -

$$\{e_{\alpha_1},\dots,e_{\alpha_p}\}\,,\quad\{e_{\beta_1},\dots,e_{\beta_q}\}\,,\quad\{h_1,\dots,h_n\}, \qquad /10.61/$$

където в трета група сме включили базисните елементи на Картановата подалгебра $\mathcal{H}$, а корените $\alpha_i,\ \beta_i$ са:

$$\alpha_i\in\Sigma_1=\{-h^k,\ -h^i\pm h^j,\ h^i-h^j\ \mid\ i<j\ ;\ i,j,k=1,\dots,n\} \qquad /10.62/$$

$$\beta_i\in\Sigma_2=\{\,h^k,\ h^i+h^j\ \mid i<j\ ;\ i,j,k=1,\dots,n\}\,. \qquad /10.63/$$

Елементите от всяка група ще подредим произволно. Съгласно с теоремата на Поанкаре-Биргхоф-де Вит, чиято формулировка приведохме, съвкупността от стандартните мономи

$$e_{\alpha_1}^{i_1}\dots e_{\alpha_p}^{i_p}\ e_{\beta_1}^{j_1}\dots e_{\beta_q}^{j_q}\ h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n}\,,\qquad i_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}_0\,, \qquad /10.64/$$

задава базис в универсалната обвиваща алгебра $\mathcal{U}(B_n)$. Доколкото по условие пространството W е неприводимо, то, ако $x\in W$,

$$W = \mathcal{U}(B_n).x \equiv \{ u.x \mid u \in \mathcal{U}(B_n) \} \qquad /10.65/$$

или, което е същото

$$W = \text{л.о.}\{ e_{\alpha_1}^{i_1} \cdots e_{\alpha_p}^{i_p} e_{\beta_1}^{j_1} \cdots e_{\beta_q}^{j_q} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} \cdot x_\ell \} \qquad /10.66/$$

От обстоятелството, че x_ℓ е собствен вектор на $\mathcal{H}$, следва, че

$$h_1^{k_1} h_2^{k_2} \cdots h_n^{k_n} \cdot x_\ell \sim x_\ell . \qquad /10.67/$$

Освен това съгласно с направеното предположение /10.60/

$$e_\beta . x_\ell = 0 \quad \forall \beta \in \Sigma_2 . \qquad /10.68/$$

Затова, ако поне един степенен показател $j_1, \ldots, j_q$ е различен от 0, съответният вектор в /10.66/ е нулев. Тези разсъждения показват, че W е по същество линейна обвивка на всевъзможните тегловни вектори:

$$x^{i_1 \ldots i_p} = e_{\alpha_1}^{i_1} \cdots e_{\alpha_p}^{i_p} . x_\ell , \quad i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{N}_0 . \qquad /10.69/$$

Теглото ℓ' на вектора $x^{i_1 \ldots i_p}$ се дава с равенството

$$\ell' = \ell + \sum_{r=1}^{p} i_r \alpha_r . \qquad /10.70/$$

Както се вижда от /10.62/, сумата на ортогоналните /ковариантни/ координати на всеки корен α_r е неположителна. Ето защо за сумата на координатите на ℓ' имаме

$$\sum_{i=1}^{n} \ell'_i \le \sum_{i=1}^{n} \ell_i < \sum_{i=1}^{n} L_i . \qquad /10.71/$$

Това обаче е невъзможно, тъй като показва например, че старшият вектор x_Λ не принадлежи на W.

Сега решението на формулираната вече проблема е незабавно следствие от доказаната теорема.

<u>Следствие 10.4.</u> Подпространството /10.41/ на вакуумните

вектори е линейна обвивка на тези и само тези тегловни вектори чиито тегла удовлетворяват равенство /10.54/.

Доказателство.

Ако $x \in W$ е линейна комбинация от тегловни вектори, ортогоналните координати на които удовлетворяват /10.54/, то очевидно $x \in V$. Обратно, всеки вектор от W и в частност всеки вектор $x \in V$ е представим по единствен начин във вид на сума от тегловни вектори с различни тегла:

$$x = x_{\lambda_1} + \cdots + x_{\lambda_m}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_m. \qquad /10.72/$$

В такъв случай от уравнението

$$e_{h^i} \cdot x = e_{h^i} \cdot x_{\lambda_1} + \cdots + e_{h^i} \cdot x_{\lambda_m} = 0 \qquad /10.73/$$

заключаваме, че

$$e_{h^i} \cdot x_{\lambda_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \qquad /10.74/$$

В противен случай ненулевите от векторите

$$e_{h^i} \cdot x_{\lambda_j} \longleftrightarrow \lambda_j + h^i, \qquad /10.75/$$

имайки все различни тегла, биха били линейно независими и /10.73/ би било невъзможно.

Доколкото неприводимият модул W се генерира от старшия вектор x_Λ с помощта на полиноми от отрицателни корневи вектори, W е линейна обвивка на всевъзможни вектори от вида

$$x_{\omega_1 \ldots \omega_m} = e_{\omega_1} e_{\omega_2} \cdots e_{\omega_m} \cdot x_\Lambda, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \qquad /10.76/$$

където $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Sigma^-$ са отрицателни корени /вж. 10.47/. Ако сред тях има поне един равен на $-h^k$ или на $-h^i - h^j$ $(i,j,k = 1, \ldots, n)$, векторът /10.76/ не е вакуумен - ортогоналните му координати не удовлетворяват необходимото условие /10.54/. Ето защо произволен вакуумен вектор $x \in V$ може да се представи като

$$x = P x_{\Lambda} ,\qquad /10.77/$$

където P е полином от корневи вектори e_{α} с корени

$$\alpha \in \Sigma'_{-} = \{-h^{i} + h^{j} \mid i<j\ ;\ i,j = 1,\dots,n\} . \qquad /10.78/$$

Нека

$$\Sigma'_{+} = \{ h^{i} - h^{j} \mid i<j\ ;\ i,j = 1,\dots,n\} \qquad /10.79/$$

Тогава за всеки вакуумен вектор

$$x \in V \quad \text{и} \quad \alpha \in \Sigma' = \Sigma'_{-} \cup \Sigma'_{+} \qquad /10.80/$$

очевидно е изпълнено включването

$$e_{\alpha} \cdot x \in V . \qquad /10.81/$$

Непосредствено се проверява, а това следва и от вида на корневата подсистема Σ', че корневите вектори e_{α}, $\alpha \in \Sigma'$, заедно с векторите

$$H' = \{ \omega'_{i} \mid \omega'_{i} = h^{i} - h^{i+1} ,\ i = 1,\dots,n-1\} \qquad /10.82/$$

задават базис на подалгебра в B_n, изоморфна на A_{n-1}. Линейната обвивка на H' може да се приеме за базис на Картанова подалгебра $\mathcal{H}'$ в A_{n-1}, спрямо която Σ' е корневата система с корневи вектори e_{α}, $\alpha \in \Sigma'$. По отношение на подредбата в H-базиса Σ'_{+} и Σ'_{-} са съответно системите от положителни и отрицателни корени, а елементите на H' - простите корени на A_{n-1}.

Включването /10.81/ показва, че вакуумното подпространство V е инвариантно спрямо подалгебрата A_{n-1}. С аргументи, аналогични на използваните при доказателството на теорема 10.1, не е трудно да се установи, че старшето тегло x_{Λ} е единственият вектор от V, анулиращ се от отрицателните корневи вектори на A_{n-1} или с други думи, че представянето на A_{n-1} в V е неприводимо. Неприводимостта може да се докаже и значително по-бързо и от по-общи съображения. Наистина от /10.77/ заключаваме, че V не съдържа нетривиални A_{n-1}-инвариантни подпространства. Оттук и от обстоятелството, че всички крайномерни представяния на класическите алгебри са напълно приводими, следва, че V е неприводим A_{n-1}-модул със старши вектор x_Λ. Представянето на алгебрата A_{n-1} в V се характеризира, както знаем, с каноничните си координати

$$\Lambda_i' = \frac{2(\Lambda, \omega_i')'}{(\omega_i', \omega_i')}, \qquad i = 1, \dots, n-1 . \qquad /10.83/$$

С $(\,,\,)'$ означаваме билинейната форма на Картан-Килинг в A_{n-1}. Тъй като

$$(\omega_i', \omega_j')' = c\,(\omega_i', \omega_j') \qquad /10.84/$$

и коефициентът на пропорционалност c не зависи от индекса $i=1,\dots,n-1$ на базисните вектори ω_i' в $\mathcal{H}'$, заключаваме, че

$$\Lambda_i' = \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \qquad /10.85/$$

където $[\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}, \Lambda_n]$ са каноничните координати на B_n-модула W. Ще съберем получените резултати в теорема.

<u>Теорема 10.2.</u> Всеки крайномерен неприводим B_n-модул W, дефиниран с каноничните си координати $[\Lambda_1, \dots, \Lambda_n]$, задава неприводимо представяне на n двойки параферми-оператори $b_i^{\pm}$, $i = 1, \dots, n$. Вакуумното подпространство е неприводим A_{n-1}-подмодул с канонични координати $[\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}]$.

Старшият вектор на B_n-модула W е /може да се избере за/ старши вектор и на A_{n-1}-подмодула от вакуумни вектори V.

Броят на линейно независимите вакуумни състояния се установява от формулата за размерността на неприводимия A_{n-1}-модул V. Записана чрез каноничните координати $[\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}]$, тя има вида

$$\dim V = \prod_{j=0}^{n-2} \frac{1}{(j+1)!} \prod_{k=1}^{n-j-1} (\Lambda_k + \cdots + \Lambda_{k+j} + j + 1) . \qquad /10.86/$$

В термините на ортогоналните координати $(L_1, \ldots, L_n)$ на B_n-модула W можем да напишем

$$\Lambda_k + \cdots + \Lambda_{k+j} = L_k - L_{k+j+1} , \qquad /10.87/$$

и /10.86/ се редуцира в

$$\dim V = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \prod_{k=1}^{n-i} (L_k - L_{k+i} + i) . \qquad /10.88/$$

При $\Lambda = (L, L, \ldots, L)$

$$\dim V = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \prod_{k=1}^{n-i} i = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(i)^{n-i}}{i!} = 1 . \qquad /10.89/$$

Не е трудно да се установи, че това е единственият случай, когато размерността на вакуумното подпространство е единица.

<u>Следствие 10.5.</u> Неприводимото пространство на представянето на n двойки параферми-оператори има единствено /нормирано/ вакуумно състояние тогава и само тогава, когато в ортогоналната сигнатура на представянето всички координати са равни:

$$\Lambda = (L, L, \ldots, L) . \qquad /10.90/$$

Числото L в /10.90/ приема произволни положителни цели и полуцели значения. Затова може да се въведе нов, целочислен параметър, характеризиращ едновакуумните представяния:

$$p = 2L . \qquad /10.91/$$

Прието е числото $p = 1, 2, \ldots$ да се нарича порядък на парастатистиката. Ортогоналната сигнатура на представянето с порядък на парастатистиката p е

$$\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, \ldots, \frac{p}{2}\right) . \qquad /10.92/$$

Този резултат бе вече получен в пример 2 на този параграф. Сега показахме, че тези представяния наистина изчерпват всички едно-вакуумни представяния.

Като се комбинират резултатите от теорема 10.1 и следствие 10.3, за едновакуумните представяния се получава

$$b_i^- b_j^+ \cdot x_\lambda = p\delta_{ij} x_\lambda . \qquad /10.93/$$

Да се спрем накратко на въпроса за кратността на теглата на вакуумните вектори. Ще напомним, че под кратност на теглото λ се разбира размерността на тегловното подпространство, съответствуващо на λ . Теорема 10.2 показва, че винаги може да се намери неприводим B_n -модул, чието вакуумно подпространство съвпада с всеки предварително зададен неприводим A_{n-1} -модул. В такъв случай въпросът за кратността на теглата на вакуумните състояния е въпрос за кратността на теглата на неприводимите представяния на алгебрата A_{n-1} . Известно е, че те не са прости, нещо повече, досега не съществуват формули за ефективното им пресмятане, с изключение на алгебрите от нисък ранг [52] .

В общия случай може да има по няколко линейно-независими вакуумни вектора с едно и също тегло.

В модела на кварките, предложен в [20] , важна роля играят представянията с ортогонална сигнатура от вида

$$\left(\frac{3}{2}, \dots \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \qquad /10.94/$$

Не е трудно да се установи, че за тези представяния и още само за представянията със сигнатура

$$(1, \dots, 1, 0, \dots 0)$$

действието на операторите e_α , $\alpha \in \Sigma'$ върху старшия вектор се свежда до пермутация на ортогоналните координати. Това показва, че всички вакуумни тегла принадлежат на един и същ еквивалентен клас спрямо групата на Вайл – класът на еквивалентност на старшето тегло. Тъй като теглата от един и същ клас на еквивалентност имат една и съща кратност, а кратността на Λ е единица, то за посочените представяния всички вакуумни вектори са прости. Поради това изводите на Брекен и Грин [20], касаещи въпроси на парафермиi-статистиката от обобщен порядък $p \leq 3$, остават в сила.

В заключение ще се спрем на въпроса за алгебрическия смисъл на операторите от анзаца на Грин [4]. За целта ще разгледаме преди това по-общия случай на произволна класическа алгебра $\mathcal{A}$ с генератори

$$\Delta = \{ h_1, \dots, h_n; e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm q} \}, \quad N = 2q+n. \qquad /10.95/$$

С $h_1, \dots, h_n$ сме означили ортогоналния базис в Картановата подалгебра $\mathcal{H}$, а $e_{\pm i}$ са положителните и отрицателните корневи вектори. Нека изображението

$$\tau^\alpha : a_i \longrightarrow \hat{a}_i^\alpha, \qquad a_i \in \Delta, \quad i = 1, \dots, N, \qquad /10.96/$$

дефинира неприводимо представяне на операторите a_i в линейното пространство W^α с елементи x^α, старше тегло Λ^α, тегла λ^α и тегловни вектори x_{λ^α}. τ^α-образите на системата Δ ще бележим с

$$\Delta^\alpha = \{ \hat{h}_1^\alpha, \dots, \hat{h}_n^\alpha; \hat{e}_{\pm 1}^\alpha, \dots, \hat{e}_{\pm q}^\alpha \}. \qquad /10.97/$$

Прякото /тензорното/ произведение

$$\tau = \tau^1 \otimes \tau^2 \otimes \dots \otimes \tau^p \qquad /10.98/$$

на представянията $\tau^1, \dots, \tau^p$ се дефинира в тензорното произведение W на изходните пространства:

$$W = W^1 \otimes W^2 \otimes \dots \otimes W^p. \qquad /10.99/$$

По определение

$$W = \text{л.о.}\{x^1 \otimes x^2 \otimes \cdots \otimes x^p \mid x^\alpha \in W^\alpha,\ \alpha = 1,\dots,p\}. \qquad /10.100/$$

Генераторите $\hat{a}_i \in \hat{\Delta}$ на представянето τ действуват в W съгласно правилото

$$\hat{a}_i \cdot x^1 \otimes x^2 \otimes \cdots \otimes x^p = \hat{a}_i^1 x^1 \otimes x^2 \otimes \cdots \otimes x^p + x^1 \otimes \hat{a}_i^2 x^2 \otimes \cdots \otimes x^p + \dots + x^1 \otimes x^2 \otimes \cdots \otimes \hat{a}_i^p x^p. \qquad /10.101/$$

Затова, ако се въведат оператори a_i^α, дефинирани в W с равенството ($\hat{a}_i^\alpha \in \Delta^\alpha$)

$$a_i^\alpha \cdot x^1 \otimes \cdots \otimes x^\alpha \otimes \cdots \otimes x^p = x^1 \otimes \cdots \otimes \hat{a}_i^\alpha x^\alpha \otimes \cdots \otimes x^p, \qquad /10.102/$$

то сме в правото да напишем

$$\hat{a}_i = a_i^1 + a_i^2 + \dots + a_i^p, \quad i = 1,\dots,N. \qquad /10.103/$$

Очевидно при $\alpha \neq \beta = 1,\dots,p$

$$[a_i^\alpha, a_j^\beta] = 0 \qquad /10.104/$$

Съществено е да се има предвид, че ако генераторите $\hat{a}_i^\alpha \in \Delta^\alpha$ на $\mathcal{A}$ удовлетворяват някакви полиномиални операторни равенства в W^α, то от

$$P_k(\hat{h}_i^\alpha, \dots, \hat{e}_{\pm q}^\alpha) = 0 \quad \text{следва} \quad P_k(h_i^\alpha, \dots, e_{\pm q}^\alpha) = 0, \qquad /10.105/$$

където в дясната част на /10.105/ операторните равенства са във W. Освен това от

$$\hat{h}_i^\alpha x_{\Lambda^\alpha} = L_i^\alpha x_{\Lambda^\alpha} \quad \text{следва} \quad h_i^\alpha x_\Lambda = L_i^\alpha x_\Lambda \qquad /10.107/$$

където

$$x_\Lambda = x_{\Lambda^1} \otimes x_{\Lambda^2} \otimes \cdots \otimes x_{\Lambda^p}. \qquad /10.108/$$

Ако $\hat{h}$ е елемент от Картановата подалгебра в представянето

τ , намираме

$$\hat{h}\cdot x_{\lambda^1}\otimes\cdots\otimes x_{\lambda^p}=(\lambda^1+\cdots+\lambda^p)(h)\cdot x_{\lambda^1}\otimes\cdots\otimes x_{\lambda^p}. \qquad /10.109/$$

Това показва, че тензорното произведение на тегловни вектори е тегловен вектор във W . Сред всевъзможните тегловни вектори x_Λ е единствен /с точност до константа/ с тегло

$$\Lambda=\Lambda^1+\Lambda^2+\cdots+\Lambda^p. \qquad /10.110/$$

Това произтича от обстоятелството, че във всяко пространство W^α старшето тегло Λ^α е най-голямото. Ето защо Λ се достига само като сума от старшите тегла Λ^α , $\alpha=1,\dots,p$. Като използуваме дефиниционното равенство /10.102/, намираме

$$\hat{e}_{+i}\, x_\Lambda=0, \qquad i=1,\dots,q. \qquad /10.111/$$

Това показва, че x_Λ е старши вектор на една от неприводимите компоненти на въобще приводимото представяне τ ; ще я означим с τ_Λ, а пространството на представянето - с $W_\Lambda\subset W$. От /10.109/ заключаваме, че ортогоналната сигнатура на τ_Λ е сума от ортогоналните сигнатури на изходните представяния:

$$(L_1,L_2,\dots,L_n)=\sum_{\alpha=1}^{p}(L_1^\alpha,L_2^\alpha,\dots,L_n^\alpha) \qquad /10.112/$$

Направените разсъждения се обобщават веднага за случай, когато част от генераторите $a_1,\dots,a_m$, $m<N$ поражда цялата елгебра /какъвто е случаят с операторите на раждане и унищожение/, тъй като

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j]=\sum_{\alpha=1}^{p}[a_i^\alpha,a_j^\alpha]. \qquad /10.113/$$

Нека сега $b_1^{\alpha\pm},\dots,b_n^{\alpha\pm}$ са ферми-оператори на раждане и унищожение, дефинирани в пространството на Фок W^α със старши вектор $|0\rangle^\alpha$. Аналог на операторните равенства /10.105/ тук са

$$\{ b_i^{\alpha +}, b_{\cdot j}^{\cdot \alpha -} \} = \delta_{ij} \quad , \quad (b_i^{\alpha +})^2 = (b_i^{\alpha -})^2 = 0 \ . \qquad /10.114/$$

Затова съгласно с /10.103 - 10.104/ представянето на параферми-операторите в пространството W , което е тензорно произведение на p пространства на Фок W^α , се дефинира с операторите:

$$b_i^{\pm} = \sum_{\alpha=1}^{p} b_i^{\alpha \pm} \ , \qquad /10.115/$$

$$[b_i^{\alpha,\xi}, b_j^{\beta,\eta}] = 0, \quad i \neq j = 1,\dots,n \ ; \ \xi,\eta = \pm \ . \qquad /10.116/$$

Ако аналогът на $\mathfrak{X}_\Lambda$ се означи с

$$|0\rangle = |0\rangle^1 \otimes |0\rangle^2 \otimes \dots \otimes |0\rangle^p , \qquad /10.117/$$

се получава

$$b_i^{\alpha -} b_j^{\alpha +} |0\rangle = \delta_{ij} |0\rangle \qquad /10.118/$$

Релациите /10.114-116, 10.118/ определят напълно представянето на параферми-операторите $b_i^{\pm}$. От /10.112/ заключаваме, че неприводимото представяне τ_Λ , породено $|0\rangle$, има ортогонална сигнатура

$$\sum_{i=1}^{p} (\tfrac{1}{2}, \dots \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{p}{2}, \tfrac{p}{2}, \dots \tfrac{p}{2}) \qquad /10.119/$$

и следователно съответствува на порядък на парастатистиката p .
Разбира се, в пространството

$$W = W^1 \otimes \dots \otimes W^p \qquad /10.120/$$

има и редица други неприводими представяния на операторите $b_i^{\pm}$.

Представянето /10.115/ на параферми-операторите се нарича анзац на Грин. Виждаме, че анзацът на Грин е по същество конкретизация на понятието тензорно произведение на представяния в случай, когато изходните пространства W^α, $\alpha = 1,\dots,p$, са пространства на Фок за ферми-оператори.

Ясно е, че по аналогичен начин може да се напише анзац на Грин за операторите на раждане и унищожение на всяка от останалите класически алгебри на Ли.

11. Едновакуумни представяния при унитарно квантуване

В сравнение с останалите прости алгебри на Ли при построяване на корневата система на алгебрата A_n възниква една специфична особеност. Оказва се, че в Картановата подалгебра $\mathcal{H}$ не може да се въведе ортогонален спрямо формата на Картан-Килинг базис, в който координатите на корените и на теглата да са цели или полуцели числа. Във всеки ортогонален базис в $\mathcal{H}$ по същество прости закономерности като например свойствата за инвариантност на корневата система или на теглата от дадено представяне спрямо групата на Вайл изглеждат доста непрегледно. Съществува прост и елегантен изход от това затруднение: подалгебрата $\mathcal{H}$ се влага в $(n+1)$-мерно подпространство $\tilde{\mathcal{H}}$. В $\tilde{\mathcal{H}}$ скаларното произведение е дефинирано така, че ограничено върху $\mathcal{H}$ да съвпада с формата на Картан-Килинг. Както бе отбелязано, разширението на $\mathcal{H}$ до $\tilde{\mathcal{H}}$ по същество означава влагане на алгебрата A_n в алгебрата $gl(n+1)$ на групата $GL(n+1)$. Целесъобразността на посоченото разширение произтича й от обстоятелството, че всеки неприводим $gl(n+1)$-модул е и неприводим A_n-модул. Обратно, всеки неприводим A_n-модул може да се продължи по безкрайно много начини до неприводим $gl(n+1)$-модул. Ще изведем последното свойство и ще покажем как то се използува, за да се придаде прост смисъл на трансформациите от групата на Вайл - резултат, който ще ни е необходим.

Напомняме /вж. § 5/, че

$$A_n = \text{л.о.}\{ e_{ii} - e_{jj},\ e_{ij} \mid i \neq j = 0,1,\dots,n \}, \qquad /11.1/$$

$$gl(n+1) = \text{л.о.}\{ e_{ij} \mid i,j = 0,1,\dots,n \}, \qquad /11.2/$$

$$\mathcal{H} = \text{л.о.}\{ e_{ii} - e_{jj} \mid i \neq j = 0,1,\dots,n \}, \qquad /11.3/$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \text{л.о.}\{ h_i \mid h_i = e_{ii},\ i = 0,\dots,n \}. \qquad /11.4/$$

За ковариантен H-базис избираме векторите $h_0, h_1, \dots, h_n$, в термините на които метриката / = КК-формата/ е

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij}\, 2(n+1), \quad i,j = 0,1,\dots,n \qquad /11.5/$$

Относно приетия ред на базисните вектори в $\tilde{\mathcal{H}}$ простите корени са

$$\pi_i = h^{i-1} - h^i, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad /11.6/$$

Затова за F-базиса, чийто спрегнат е каноническият базис в $\overset{*}{\mathcal{H}}$, се получава

$$f_i = \frac{2}{(\pi_i,\pi_i)}\pi_i = h_{i-1} - h_i, \quad i = 1,\dots,n. \qquad /11.7/$$

Нека W е произволен крайномерен неприводим A_n-модул с тегловна система T_W и тегловни вектори x_λ, $\lambda \in T_W$. С Λ и x_Λ означаваме старшето тегло и старшия вектор във W. Картановата подалгебра $\mathcal{H}$ е диагонална върху тегловните вектори:

$$h x_\lambda = \lambda(h) x_\lambda, \quad h \in \mathcal{H}. \qquad /11.8/$$

В частност

$$f_i x_\Lambda = \Lambda(f_i) x_\Lambda. \qquad /11.9/$$

Както знаем, собствените стойности $\Lambda_i \equiv \Lambda(f_i)$ на $f_1,\dots,f_n$ върху x_Λ характеризират представянето - това са каноничните координати на A_n-модула W. За да се продължи W до неприводим

$gl(n+1)$-модул, е достатъчно един от елементите на центъра, например

$$f_0 = \sum_{i=0}^{n} h_i = \sum_{i=0}^{n} e_{ii}, \qquad /11.10/$$

да се дефинира върху W . За да бъде представянето неприводимо f_0 трябва да е оператор, кратен на единичния:

$$f_0 \cdot x = \Lambda_0 \cdot x \quad \forall\, x \in W, \qquad /11.11/$$

където Λ_0 е произволно число.

Векторите

$$\widetilde{F} = \{ f_0, f_1, \ldots, f_n \} \qquad /11.12/$$

определят базис в $\widetilde{\mathcal{H}}$, а собствените стойности $\Lambda_0, \ldots \Lambda_n$ на $\widetilde{F}$ - базиса върху x_Λ характеризират неприводимия $gl(n+1)$-модул W . В този смисъл дуалният базис на $\widetilde{F}$ може да се счита за каноничен базис в $gl(n+1)$. Удобно е теглата λ да се продължат /в смисъл на линейни функционали/ върху $\widetilde{\mathcal{H}}$ по такъв начин, че за тегловните вектори да е изпълнено /11.11/. Представяйки произволен елемент $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ по единствен начин във вида

$$\tilde{h} = \alpha f_0 + h, \quad h \in \mathcal{H}, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

полагаме

$$\tilde{\lambda}(\tilde{h}) = \alpha \Lambda_0 + \lambda(h). \qquad /11.13/$$

В такъв случай /11.8/ се обобщава по следния начин:

$$\tilde{h}\, x_{\tilde{\lambda}} = \tilde{\lambda}(\tilde{h})\, x_{\tilde{\lambda}}, \quad x_{\tilde{\lambda}} = x_\lambda. \qquad /11.14/$$

В частност

$$f_i\, x_{\tilde{\Lambda}} = \Lambda_i\, x_{\tilde{\Lambda}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad /11.15/$$

Връзката между координатите на произволно тегло $\tilde{\lambda}$ от каноничния базис $\overset{*}{f}{}^i$ и ортогоналния базис $\overset{*}{h}{}^i$, $i = 0, \ldots, n$, се намира от изискването

$$\tilde{\lambda} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\lambda}(f_i) \overset{*}{f}{}^{i} = \sum_{j=0}^{n} \tilde{\lambda}(h_j) \overset{*}{h}{}^{j}$$

Ако означим $\lambda_i \equiv \tilde{\lambda}(f_i)$, $\ell_j \equiv \tilde{\lambda}(h_j)$ и положим

$$f_i = A_i^{\ j} h_j \, ,$$

тогава

$$\lambda_i = A_i^{\ j} \ell_j \quad , j,i = 0,1,\dots, n \, . \qquad /11.16/$$

Матрицата $(A_i^{\ j})$ е напълно дефинирана с равенствата /11.7/ и /11.10/. Решавайки /11.16/ спрямо ортогоналните координати L_i на старшето тегло Λ , намираме

$$L_0 = \frac{1}{n+1} \left[\Lambda_0 + n\Lambda_1 + (n-1)\Lambda_2 + (n-2)\Lambda_3 + \dots + 1.\Lambda_n \right], \qquad /11.17/$$

Освен това

$$\begin{aligned} L_1 &= L_0 - \Lambda_1 \\ L_2 &= L_0 - \Lambda_1 - \Lambda_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_n &= L_0 - \Lambda_1 - \Lambda_2 - \dots - \Lambda_n \, . \end{aligned} \qquad /11.18/$$

Сега ще се възползуваме от обстоятелството, че Λ_0 е произволна константа, която ще изберем така, че L_0 да е цяло число. Доколкото каноничните координати $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ са цели неотрицателни числа, от /11.18/ заключаваме, че всички ортогонални координати L_i , $i=0,\dots,n$ са цели числа, удовлетворяващи неравенствата

$$L_0 \geqslant L_1 \geqslant \dots \geqslant L_n \, . \qquad /11.19/$$

Ако вместо Λ_0 изберем

$$\Lambda_0' = \Lambda_0 + k(n+1), \quad k\text{- цяло число}, \qquad /11.20/$$

за ортогоналните координати получаваме

$$(L_0+k, L_1+k, \ldots, L_n+k) . \qquad /11.21/$$

При произволно k ортогоналната сигнатура /11.21/ съответствува на едни и същи канонични координати $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ и затова описва едно и също представяне на A_n. Разбира се, при различни стойности на k се получават различни неприводими представяния на $gl(n+1)$. Доколкото засега се интересуваме от представянията на алгебрата A_n, можем да считаме, че ортогоналните координати са определени с точност до адитивна константа. В частност можем да положим $L_n=0$. Тогава всички останали ортогонални координати са неотрицателни.

Преминаваме към решаването на основната задача на този параграф - намиране на пространствата на Фок за a-операторите на раждане и унищожение. Напомняме, че a-операторите са корневи вектори на A_n с корени, както следва:

$$\begin{aligned} a_i^+ &= e_{i0} \longleftrightarrow -h^0 + h^i , \\ a_i^- &= e_{0i} \longleftrightarrow h^0 - h^i , \end{aligned} \qquad i = 1,2,\ldots,n. \qquad /11.22/$$

В /11.22/ корените са записани чрез векторите от контравариантния базис. Виждаме, че операторите на раждане /респ.унищожение/ отговарят на отрицателни /респ.положителни/ корени.

<u>Теорема 11.1.</u> Неприводимият A_n-модул W е пространство на Фок на операторите на раждане и унищожение /11.22/ тогава и само тогава, когато ортогоналната му сигнатура е $(p,0,0,\ldots,0)$; p е произволно цяло положително число [+].

<u>Доказателство.</u>

Както знаем от теорема 9.1, пространствата на Фок са тези крайномерни неприводими A_n-модули, чиито старши вектори x_Λ се анулират от оператора $a_i^- a_j^+$ при $i \neq j$, т.е.

[+] При $p=0$ се получава тривиалното, едномерно пространство.

$$a_i^- a_j^+ x_\Lambda = 0, \quad i \neq j. \qquad /11.23/$$

Тъй като $a_i^- x_\Lambda = 0$, вместо $a_i^- a_j^+$ в /11.23/ може да подставим комутатора на тези оператори, който от своя страна е пропорционален на генератора e_{ji}. Затова условие /11.23/ е еквивалентно на изискването

$$e_{ij} x_\Lambda = 0, \quad i \neq j = 1, \ldots, n. \qquad /11.24/$$

Доколкото съответствието между корените и корневите вектори е

$$e_{ij} \longleftrightarrow h^i - h^j, \quad i \neq j = 1, \ldots, n. \qquad /11.25/$$

при $i < j$ корневият вектор e_{ij} е положителен и /11.24/ се удовлетворява по определение на старшия вектор. Остава да намерим при какви стойности на ортогоналните координати на старшето тегло

$$\Lambda = (L_0, L_1, \ldots, L_n) \qquad /11.26/$$

сумите

$$\Lambda + h^j - h^i, \quad i < j = 1, \ldots, n \qquad /11.27/$$

не са тегла. Ще де възползуваме от свойствата /2.28/ и /2.30/ на групата на Вайл. Съгласно с /2.28/, ако $S_{h^i - h^j}$ е произволен елемент от групата на Вайл, а $\lambda = (\ell_0, \ldots, \ell_i, \ldots \ell_j, \ldots, \ell_n)$ - произволно тегло, то $S_{h^i - h^j} \cdot \lambda$ е също тегло. Използувайки метриката /11.5/, намираме

$$S_{h^i - h^j} \cdot \lambda = \lambda - \frac{2(\lambda, h^i - h^j)}{(h^i - h^j, h^i - h^j)} (h^i - h^j) = \qquad /11.28/$$

$$= (\ell_0, \ldots, \overset{i}{\ell_j}, \ldots, \overset{j}{\ell_i}, \ldots, \ell_n)$$

Ето защо трансформациите от групата на Вайл се свеждат до пермутации на ортогоналните координати. За старшето тегло можем да напишем

$$(L_0\cdots,\overset{i}{L_j},\cdots,\overset{j}{L_i},\ldots) = (\cdots,\overset{i}{L_i},\ldots,\overset{j}{L_j},\ldots)+(L_i-L_j)(0,\ldots,0,\overset{i}{-1},0,\ldots,0,\overset{j}{1},0\ldots0)$$

Затова съгласно с /2.30/ всички вектори

$$(L_0,\ldots,\overset{i}{L_i},\ldots,\overset{j}{L_j},\ldots,L_n)+k(0,\ldots,0,\overset{i}{-1},0,\ldots,0,\overset{j}{1},0,\ldots,0) \qquad /11.29/$$

за които $0\leq k\leq L_i-L_j$ са също тегла. Както знаем, при $i<j$ $L_i\geqslant L_j$. Да допуснем, че неравенството е строго, $L_i>L_j$. Тогава $L_i-L_j>0$ и при $k=1$ от /11.29/ заключаваме, че

$$\lambda=\Lambda+h^j-h^i\ ,\quad i<j \qquad /11.30/$$

е тегло. Затова A_n-модулът W не е пространство на Фок, ако в ортогоналната му сигнатура $(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ съществува $L_i>L_j$ при $0<i<j$.

Остава да разгледаме A_n-модулите W със сигнатура

$$\Lambda=(L_0,L,L,\ldots,L),\quad L_0\geqslant L. \qquad /11.31/$$

Да допуснем, че при $i<j$

$$\lambda=\Lambda+h^j-h^i=(L_0,L,\ldots,L,\overset{i}{L-1},L,\ldots,L,\overset{j}{L+1},L,\ldots,L) \qquad /11.32/$$

е тегло. Тогава

$$\lambda'=(L_0,L+1,L-1,L,L,\ldots,L) \qquad /11.33/$$

също ще е тегло. Това би означавало, че в лексикографическото подреждане на теглата има тегло λ', по-голямо от старшето тегло Λ, което е невъзможно. Заключаваме, че за представянията със сигнатури /11.31/ е изпълнено изискването /11.27/ и затова съответствуващите им A_n-модули са пространства на Фок.

За довършване на доказателството ще привлечем някои естествени физични аргументи. Ние вече отбелязахме, че от гледна точка на представянията на алгебрата A_n ортогоналните координати в сигнатурата са определени с точност до адитивна константа. Сигнатурите

$$\Lambda = (L_0+k, L+k, L+k, \dots, L+k) \qquad /11.34/$$

съответствуват на един и същ неприводим A_n-модул. Константата k е свързана със стойността на линейния оператор на Казимир на $gl(n+1)$ и би могла да се остави произволна, ако динамичните променливи на системата зависеха само от генераторите на A_n или, което е същото, от операторите на раждане и унищожение. Видяхме обаче, че полето има правилни трансформационни свойства, ако операторът на 4-мерния импулс е представен във вида

$$P^m = \sum_i k_i^m \{[a_i^+, a_i^-] + e_{oo}\}. \qquad /11.35/$$

По такъв начин операторът на импулса е функция от базисните елементи на цялата Картанова подалгебра $\tilde{\mathcal{H}}$ и затова собствените му стойности зависят от адитивната константа k. Ще я определим от изискването енергията на вакуума $|0\rangle$ да е 0. Записан чрез елементите на Картановия базис, операторът P^m добива вида

$$P^m = \sum_{i=1}^{n} k_i^m h_i \qquad . \qquad /11.36/$$

Както знаем, числото L_i, $i=0,1,..,n$ е собствена стойност на h_i върху старшия вектор x_Λ, $\Lambda = (L_0, L_1, \dots, L_n)$. Затова, като вземем под внимание, че в пространството на Фок вакуумът $|0\rangle$ е пропорционален на x_Λ и считаме, че Λ е от вида /11.31/, намираме

$$P^m |0\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i^m L |0\rangle . \qquad /11.37/$$

Тук стойностите на $k_1^0, \dots, k_n^0$ са аналог на спектъра на енергията на едночастичното състояние и затова $k_i^0 > 0$. Ето защо енергията на вакуума е 0 тогава и само тогава, когато $L=0$ или, с други думи, когато A_n-модулът има сигнатура $(p,0,0,\dots,0)$. С това теоремата е доказана.

По-нататък ще видим, че операторът h_i играе роля на оператор на числото на частиците в състояние i. Оттук също следва, че $L=0$, тъй като вакуумът е безчастично състояние, т.е.

$$h_i x_\Lambda = L x_\Lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \qquad i = 1,\dots,n .$$

Като използваме определението /11.22/ на a-операторите, можем да напишем

$$a_i^- a_j^+ |0\rangle = \delta_{ij} [a_i^-, a_i^+] |0\rangle = \delta_{ij} (h_0 - h_i) x_\Lambda$$

и тъй като $L_0 = p$, а $L_1 = L_2 = \dots = L_n = 0$, намираме

$$a_i^- a_j^+ |0\rangle = \delta_{ij} p |0\rangle, \quad i,j = 1,2,\dots,n, \quad p \in \mathbb{N} . \qquad /11.38/$$

При дадена стойност на p това равенство характеризира напълно представянето. Числото p е аналог на порядъка на парафермистатистиката. Ще го наричаме порядък на A-статистиката.

Да резюмираме получените резултати. Операторите $a_i^\pm$ се наричат a-оператори на раждане и унищожение, ако удовлетворяват трилинейните комутационни съотношения:

$$[[a_i^+, a_j^-], a_k^+] = \delta_{kj} a_i^+ + \delta_{ij} a_k^+ ,$$

$$[[a_i^+, a_j^-], a_k^-] = -\delta_{ki} a_j^- - \delta_{ij} a_k^- , \qquad /11.39/$$

$$[a_i^+, a_j^+] = [a_i^-, a_j^-] = 0 .$$

В пространството на Фок W_p с порядък на A-статистиката $p \in \mathbb{N}$ съществува единствено вакуумно състояние /с точност до константа/ $|0\rangle$, анулиращо се от операторите на унищожение

$$a_i^- |0\rangle = 0 . \qquad /11.40/$$

Представянето на a-операторите от порядък p се дефинира напълно с изискването

$$a_i^- a_j^+ |0\rangle = p\delta_{ij} |0\rangle . \qquad /11.41/$$

Да се спрем на някои Ли-алгебрични свойства на пространството на Фок. Както знаем, в A_n-модула W със старше тегло $\Lambda = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ произволно тегло $\lambda = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$ е представимо във вида

$$\lambda = \Lambda + \sum_i k_i \omega_i , \qquad k_i \in \mathbb{N}_0 , \qquad /11.42/$$

където

$$\omega_i \in \Sigma^- = \{ h^i - h^j \mid i > j = 0, 1, \dots, n \} . \qquad /11.43/$$

Доколкото сумата на първите m координати, $m = 1, 2, \dots, n$, на всеки отрицателен корен $\omega_i \in \Sigma^-$ е неположителна, това е в сила и за вектора $\sum_i k_i \omega_i$. Ето защо

$$\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_m \le L_0 + L_1 + \dots + L_m , \qquad m = 0, 1, \dots, n . \qquad /11.44/$$

Оттук и от обстоятелството, че тегловната система остава инвариантна при пермутации на ортогоналните координати, заключаваме, че за да бъде векторът $\lambda = (\ell_0, \dots, \ell_n)$ тегло, е необходимо и достатъчно ортогоналните му координати да удовлетворяват неравенствата:

$$\ell_{i_0} + \ell_{i_1} + \dots + \ell_{i_m} \le L_0 + L_1 + \dots + L_m , \qquad /11.45/$$

където $i_0 \neq i_1 \neq \dots \neq i_m$; $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Очевидно /11.45/ при $m = n$ е равенство.

Лема 11.1. Всички тегла в A_n-модула на Фок W_p с порядък на статистиката p са прости.

Доказателство.

Всеки тегловен вектор x_λ от W_p се поражда с полиноми от оператори на раждане от старшия вектор

$$x_\lambda = P(a_1^+, \dots, a_n^+) x_\Lambda . \qquad /11.46/$$

Затова теглото $\lambda=(\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_n)$ на x_λ е представимо във вида

$$\lambda = \Lambda + \sum_{i=1}^{n} k_i(-h^0+h^i), \quad k_i \in \mathbb{N}_0. \qquad /11.47/$$

Записано чрез ортогоналните си координати, последното съотношение се редуцира в

$$(\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_n) = (p,0,0,\dots,0) + (-\sum_{i=1}^{n} k_i, k_1, k_2,\dots,k_n), \qquad /11.48/$$

откъдето намираме

$$k_i = \ell_i, \quad i=1,\dots,n$$

Следователно произволно тегло λ се представя еднозначно във вида /11.47/. На езика на тегловните вектори това означава, че полиномът P в /11.46/ трябва да е хомогенен по всеки оператор на раждане a_i^+ със степен на хомогенност ℓ_i :

$$P(a_1^+,\dots,\lambda a_i^+,\dots,a_n^+) = \lambda^{\ell_i} P(\dots,a_i^+,\dots) \qquad /11.49/$$

Като използуваме комутативността на операторите на раждане, заключаваме, че

$$P \cong (a_1^+)^{\ell_1}(a_2^+)^{\ell_2}\cdots(a_n^+)^{\ell_n}.$$

Това показва, че всеки тегловен вектор x_λ с тегло $\lambda=(\ell_0,\dots,\ell_n)$ е колинеарен на вектора

$$(a_1^+)^{\ell_1}\cdots(a_n^+)^{\ell_n}\cdot x_\Lambda \qquad /11.50/$$

и затова тегловното подпространство е едномерно.

Аналогично твърдение не би могло да се докаже за произволно представяне - в този случай числата k_i в /11.42/ се определят въобще нееднозначно, а освен това отрицателните корени не комутират. Тази лема няма аналог и в парастатистиката при $p>1$. Например състоянията

$$b_i^+ b_j^+|0\rangle \quad \text{и} \quad b_j^+ b_i^+|0\rangle,$$

имайки едно и също тегло, са въобще неколинеарни. Това обстоятелство води до чисто технически трудности при пресмятане на изрази с пара-оператори.

В следващата лема се установява едно от важните свойства на A -статистиката.

Лема 11.2. В A_n-модула на Фок W_p с порядък на статистиката p векторът

$$(a_1^+)^{\ell_1}(a_2^+)^{\ell_2}\dots(a_n^+)^{\ell_n}|0\rangle \qquad /11.51/$$

не се анулира тогава и само тогава, когато

$$\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_n \leq p \,. \qquad /11.52/$$

В частност в пространството на Фок W_p не може да има състояния с повече от p частици.

Доказателство.

В предидущата лема видяхме, че теглото на вектора /11.51/ е

$$\lambda = (p-\ell_1-\dots-\ell_n, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \,. \qquad /11.53/$$

В модулът W_p

$$L_0+L_1+\dots+L_m = p \quad \forall\, m=0,1,2,\dots,n. \qquad /1154/$$

Ако $\ell_1+\dots+\ell_n \leq p$, то при $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m = 1,2,\dots,n$ и $m=1,\dots,n$ са изпълнени неравенствата:

а) $\ell_{i_1}+\dots+\ell_{i_m} \leq p$,

б) $\ell_0+\ell_{i_1}+\dots+\ell_{i_m} \leq p$.

Затова съвкупността от неравенства /11.45/ се удовлетворява и λ е тегло. От обстоятелството, че λ е просто и че има поне един вектор с тегло λ , заключаваме, че векторът /11.51/ е тегловен /и затова не е 0/.

При $\ell_1+\dots+\ell_n > p$ се нарушава неравенство /11.45/ за $m=n-1$.

Следователно такива тегла, а значи и тегловни вектори с такива тегла няма. С това лемата е доказана.

Ние видяхме, че 4-векторът на импулса може да се запише във вида

$$P^m = \sum_i K_i^m \cdot h_i$$

Естествено е операторът h_i да се интерпретира като оператор на числото на частиците в състояние i. Действувайки с h_i върху вектора /11.51/, намираме

$$h_i \cdot (a_1^+)^{\ell_1} \ldots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle = \ell_i (a_1^+)^{\ell_1} \ldots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle .$$

Ето защо векторът /11.51/ трябва да се интерпретира като състояние, в което присъствуват ℓ_1 частици от сорт 1, ℓ_2 - от сорт 2 и т.н. Виждаме, че порядъкът на статистиката p има добре определен смисъл - това е максималният брой частици, описвани от дадената статистика, които могат едновременно да съществуват.

Доколкото числата $\ell_1, \ldots, \ell_n$ заедно с порядъка на статистиката p характеризират еднозначно състоянието /11.51/, може да се въведе означението

$$|p; \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\rangle = (a_1^+)^{\ell_1} \ldots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle . \qquad /11.55/$$

Съответствието между тегловните вектори и теглата им, записани чрез ортогоналните координати, е

$$|p; \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\rangle \longleftrightarrow (p - \sum_{i=1}^{n} \ell_i, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \qquad /11.56/$$

Трябва да се помни, че означението $|p; \ell_1, \ldots, \ell_n\rangle$ има смисъл, само ако е изпълнено неравенство /11.52/.

Сега ще намерим матричните елементи на операторите на раждане и унищожение в избрания базис /11.55/. Веднага можем да напишем

$$h_0 |p; \ell_1, \ldots, \ell_n\rangle = (p - \sum_{i=1}^{n} \ell_i) |p; \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\rangle ,$$

$$h_i|p;l_1,\dots,l_n\rangle = l_i|p;l_1,\dots,l_n\rangle, \quad i=1,\dots,n. \qquad /11.57/$$

Равенствата /11.57/ следват от обстоятелството, че ортогоналните координати на теглото на вектора /11.56/ са собствени стойности на съответните вектори от ортогоналния ковариантен базис. От определението /5.21/ на операторите $a_i^{\pm}$ и това на ортогоналния базис /11.4/ намираме

$$[a_i^-, a_i^+] = h_0 - h_i \qquad /11.58/$$

Ето защо

$$[a_i^-, a_i^+]|p;l_1,\dots,l_n\rangle = (p-L-l_i)|p;l_1,\dots,l_n\rangle, \qquad /11.59/$$

където за краткост положихме

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_n. \qquad /11.60/$$

Равенство /11.59/ може да се изведе, като се използуват само комутационните съотношения /11.39/ и свойствата на вакуума, но това би било значително по-сложно.

Сега сме готови да пресметнем матричните елементи на a_i^-. За да избегнем някои трудности от техническо естество, най-напред ще пресметнем матричните елементи на a_1^-:

$$a_1^-|p;l_1,\dots,l_n\rangle = [a_1^-,(a_1^+)^{l_1}\dots(a_n^+)^{l_n}]|0\rangle =$$

$$= [a_1^-,(a_1^+)^{l_1}](a_2^+)^{l_2}\dots(a_n^+)^{l_n}|0\rangle + (a_1^+)^{l_1}\, a_1^-(a_2^+)^{l_2}\dots(a_n^+)^{l_n}|0\rangle$$

/11.61/

Ако векторът

$$a_1^-(a_2^+)^{l_2}\dots(a_n^+)^{l_n}|0\rangle \qquad /11.62/$$

е ненулев, то теглото му ще е

$$\left(l_0 = p - \sum_{i=2}^{n} l_i + 1, -1, l_2, l_3, \dots, l_n\right) \qquad /11.63/$$

Такива тегла обаче няма, тъй като

$$\ell_0 + \ell_2 + \dots + \ell_n = p + 1 > p \qquad /11.64/$$

и неравенството /11.45/ се нарушава при $m = n-1$. Затова второто слагаемо в /11.61/ е 0. Същият резултат може да се получи още така: преписваме второто слагаемо от /11.61/ във вида

$$(a_1^+)^{\ell_1} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i_k=0}^{\ell_k - 1} (a_2^+)^{\ell_2} \dots (a_{k-1})^{\ell_{k-1}} \cdot$$

$$\cdot (a_k^+)^{i_k} [a_1^-, a_k^+] (a_k^+)^{\ell_k - i_k - 1} \cdot (a_{k+1}^+)^{\ell_{k+1}} \dots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle . \qquad /11.65/$$

Всяко слагаемо от тази сума е 0, тъй като операторът $[a_1^-, a_k^+]$, $k \neq 1$, комутира с всички оператори, намиращи се от дясната му страна, и анулира вакуума.

За да използуваме вече получения резултат /11.59/, преписваме първото слагаемо в дясната част на /11.61/ , както следва:

$$\sum_{i=0}^{\ell_1 - 1} (a_1^+)^i [a_1^-, a_1^+] (a_1^+)^{\ell_1 - i - 1} (a_2^+)^{\ell_2} \dots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell_1 - 1} (p - L - \ell_1 + 2i + 2) (a_1^+)^{\ell_1 - 1} (a_2^+)^{\ell_2} \dots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle . \qquad /11.66/$$

Като пресметнем сумата, достигаме до

$$a_1^- | p; \ell_1, \dots, \ell_n \rangle = \ell_1 \left(p - \sum_{i=1}^{n} \ell_i + 1 \right) | p; \ell_1 - 1, \ell_2, \dots, \ell_n \rangle \qquad /11.67/$$

За пресмятане на матричните елементи на оператора a_i^- изхождаме от равенството

$$a_i^- | p; \ell_1, \dots, \ell_n \rangle =$$

$$= a_i^- (a_i^+)^{\ell_i} (a_1^+)^{\ell_1} \dots (a_{i-1}^+)^{\ell_{i-1}} (a_{i+1}^+)^{\ell_{i+1}} \dots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle . \qquad /11.68/$$

При преномерация на операторите, дефинирана с: $i \to 1$, $k \to k+1$ при

$k=1,2,\dots,i-1$ и останалите индекси без изменение, равенството /11.66/ се трансформира в /11.67/. Затова в изходните означения то добива вида

$$a_i^-|p;l_1,\dots,l_i,\dots l_n\rangle = l_i\left(p-\sum_{k=1}^{n} l_k+1\right)|p;l_1,\dots,l_i-1,\dots,l_n\rangle. \qquad /11.69/$$

Освен това

$$a_i^+|p;l_1,\dots,l_i,\dots l_n\rangle = |p;l_1,\dots,l_i+1,\dots,l_n\rangle . \qquad /11.70/$$

Оттук за комутационните съотношения на операторите в W_p намираме

$$[a_i^-,a_j^+]|p;l_1,\dots,l_i,\dots,l_j,\dots,l_n\rangle =$$

$$= \left[\delta_{ij}\left(p-\sum_{k=1}^{n} l_k\right)-l_i\right]|p;\dots,l_i-1,\dots,l_j+1,\dots\rangle \qquad /11.71/$$

При $i=j$ този резултат се свежда естествено към /11.59/.

Ще въведем метрика в W_p в пълна аналогия със скаларното произведение в пространството на Фок на бозе- /или ферми-/ частици, постулирайки, че:

$$\text{а)}\quad \langle 0|0\rangle = 1 ; \qquad /11.72/$$

$$\text{б)}\quad \langle 0|a_i^+ = 0, \quad i=1,2,\dots$$

В такъв случай дефинираме:

$$\left((a_1^+)^{m_1}\dots(a_n^+)^{m_n}|0\rangle,(a_1^+)^{l_1}\dots(a_n^+)^{l_n}|0\rangle\right) =$$

$$= \langle 0|(a_1^-)^{m_1}\dots(a_n^-)^{m_n}(a_1^+)^{l_1}\dots(a_n^+)^{l_n}|0\rangle . \qquad /11.73/$$

В така въведената метрика базисните вектори $|p;l_1,\dots,l_n\rangle$ са ортогонални. За да покажем това, ще предположим, че в /11.73/ някое $m_i\neq l_i$ и за определеност нека $m_i>l_i$. Тогава векторът

$$(a_i^-)^{m_i}(a_1^+)^{l_1}\dots(a_i^+)^{l_i}\dots(a_n^+)^{l_n}|0\rangle = 0 \qquad /11.74/$$

тъй като в противен случай той ще има тегло

$$\left(p-\sum_{j=1}^{n} \ell_j + m_i , \ell_1 ,\dots, \ell_{i-1}, -(m_i-\ell_i), \ell_{i+1},\dots, \ell_n\right) \qquad /11.75/$$

а тегла с отрицателни координати няма - сумата на останалите ще е по-голяма от p . При $m_i < \ell_i$, разглеждайки комплексно спрегнатото на /11.73/, стигаме отново до същия извод. При $m_i = \ell_i$, $i=1,\dots,n$ от /11.69/ и /11.72/ получаваме

$$\left(|p;\ell_1,\dots,\ell_n\rangle, |p;\ell_1,\dots,\ell_n\rangle\right) = \frac{p!}{(p-L)!}\prod_{i=1}^{n} \ell_i! \; ; \qquad /11.76/$$

тук и по-нататък $L = \ell_1 + \dots + \ell_n$. Ще наричаме L число на запълване за състоянието $|p;\ell_1,\dots,\ell_n\rangle$.

За ортонормиран базис във W_p могат да се вземат векторите

$$|p;\ell_1,\dots,\ell_n) = \sqrt{\frac{(p-L)!}{p!}}\,\frac{(a_1^+)^{\ell_1}\dots(a_n^+)^{\ell_n}}{\sqrt{\ell_1!\,\ell_2!\,\dots\,\ell_n!}}\,|0\rangle . \qquad /11.77/$$

В този базис равенствата /11.69 - 11.70/ добиват следния вид:

$$a_i^+|p;\ell_1,\dots,\ell_n) = \sqrt{(\ell_i+1)\left(p-\sum_{j=1}^{n}\ell_j\right)}\,|p;\ell_1,\dots,\ell_i+1,\dots,\ell_n), \qquad /11.78/$$

$$a_i^-|p;\ell_1,\dots,\ell_n) = \sqrt{\ell_i\left(1+p-\sum_{j=1}^{n}\ell_j\right)}\,|p;\ell_1,\dots,\ell_i-1,\dots \ell_n). \qquad /11.79/$$

Комутационните съотношения /11.71/ подсказват едно интересно свойство на A-статистиката, състоящо се в следното. Да въведем операторите

$$A_i^{\pm} = \frac{a_i^{\pm}}{\sqrt{p}}, \quad i=1,\dots,n \qquad /11.79/$$

и да пресметнем матричните им елементи върху състояния с числа на запълване, пренебрежимо по-малки от максималния брой едновременно допустими частици p :

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n \ll p \qquad /11.80/$$

В този случай изразите /11.78 - 79/ се редуцират в

$$A_i^- |p; l_1, \dots, l_n) \approx \sqrt{l_i}\, |p; l_1, \dots, l_i - 1, \dots l_n), \qquad /11.81/$$

$$A_i^+ |p; l_1, \dots, l_n) \approx \sqrt{l_i + 1}\, |p; l_1, \dots, l_i + 1, \dots, l_n). \qquad /11.82/$$

За комутационните съотношения на така въведените оператори, ограничени върху състояния, за които е изпълнено неравенство /11.80/, намираме

$$[A_i^+, A_j^+] = [A_i^-, A_j^-] = 0 \quad \text{точни комутатори}, \qquad /11.83/$$

$$[A_i^-, A_j^+] \approx \delta_{ij} \quad \text{при} \quad l_1 + \dots + l_n \ll p. \qquad /11.84/$$

Виждаме, че когато A-статистиката допуска едновременното съществуване на голям брой частици, комутационните съотношения между операторите $A_i^\pm$ върху състояния с малко число на запълване /11.80/ преминават в първо приближение в комутационните съотношения на бозе-оператори на раждане и унищожение. Записвайки базисните вектори /11.77/ в термините на операторите $A_i^\pm$, достигаме до

$$|p; l_1, l_2, \dots, l_n) = \sqrt{\frac{(p-L)!}{p!}\, p^L}\; \frac{(A_1^+)^{l_1} \dots (A_n^+)^{l_n}}{\sqrt{l_1!\, l_2! \dots l_n!}} |0\rangle \qquad /11.85/$$

Тъй като при $p \gg L$

$$\frac{(p-L)!}{p!}\, p^L = \frac{p}{p-L+1} \cdot \frac{p}{p-L+2} \dots \frac{p}{p} \approx 1, \qquad /11.86/$$

в първо приближение /11.85/ също преминава в известните изрази за ортонормирания базис в пространството на Фок на бозе-оператори:

$$|p; \ell_1, \dots, \ell_n) \approx \frac{(A_1^+)^{\ell_1} \dots (A_n^+)^{\ell_n}}{\sqrt{\ell_1! \, \ell_2! \dots \ell_n!}} |0\rangle \qquad /11.87/$$

Интуитивно е ясно, че в пространството

$$W = \bigcup_{p=1}^{\infty} W_p \qquad /11.88/$$

в което пространствата $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_p \subset \dots$ са вложени по естествен начин едно в друго чрез отъждествяване на ненулевите им елементи

$$(a_1^+)^{\ell_1} \dots (a_n^+)^{\ell_n} |0\rangle \in W_L, W_{L+1} \dots, W_{L+K}, \dots \qquad /11.89/$$

може да се дефинира представянето $(p, 0, 0, \dots, 0)$ на A_n и да се въведе топология, в която границата

$$\lim_{p \to \infty} (p, 0, \dots, 0) \qquad /11.90/$$

за редицата /от приводими в W / представяния $(p, 0, 0, \dots, 0)$, $p = 1, 2, \dots$ на A_n във W да е добре дефинирана и да клони към посоченото представяне на бозе-операторите на раждане и унищожение.

Тук няма да разглеждаме това свойство на по-строго равнище. Искахме само да отбележим интересния факт, когато границата на представяния на проста алгебра - в случая на A_n - се оказва неприводимо представяне на една от най-простите разрешими алгебри на Ли - алгебрата на Хайзенберг.

Както отбелязахме в края на § 8, за операторите на раждане и унищожение на всяка класическа алгебра може да се напише аналог на анзаца на Грин. За целта да въведем операторите

$$a_i^{\alpha \pm}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, p, \qquad /11.91/$$

които съгласно с /10.104/ комутират при $\alpha \neq \beta$ -

$$[\, a_i^{\alpha, \xi}, a_j^{\beta, \eta} \,] = 0, \quad \alpha \neq \beta = 1, \dots, p; \quad i, j = 1, \dots, n; \; \xi, \eta = \pm, \qquad /11.92/$$

а при едни и същи горни индекси $a_1^{\alpha\pm}, \dots, a_n^{\alpha\pm}$ удовлетворяват алгебрически съотношения за низшето представяне. Като се вземе под внимание, че при това представяне

$$a_i^+ = e_{io}, \quad a_i^- = e_{oi},$$

достатъчни са релациите:

$$a_i^{\alpha+} a_j^{\alpha+} = a_i^{\alpha-} a_j^{\alpha-} = 0, \quad i,j = 1,\dots,n, \qquad /11.93/$$

$$a_i^{\alpha-} a_j^{\alpha+} = 0 \quad i \neq j = 1,\dots,n \qquad /11.94/$$

$$a_i^{\alpha+} a_j^{\alpha-} a_k^{\alpha+} = \delta_{jk} a_i^{\alpha+}. \qquad /11.95/$$

За анзаца на Грин на a-операторите можем да напишем

$$a_i^{\pm} = \sum_{\alpha=1}^{p} a_i^{\alpha\pm}. \qquad /11.96/$$

Представянията от порядък p на A-статистиката се реализират в пространство на Фок на операторите от анзаца на Грин $a_i^{\alpha\pm}$. При практическите пресмятания е удобно да се използува и съотношението

$$a_i^{\alpha-} a_i^{\alpha+} |0\rangle = |0\rangle \qquad /11.97/$$

което е следствие от операторните равенства /11.93-95/. Наистина нека $a_i^{\alpha-}$ е оператор в пространството на Фок W^α. От /11.93/ заключаваме, че в пространството W^α освен вакуума има само едночастични състояния. Затова

$$a_i^{\alpha-} a_i^{\alpha+} = \beta|0\rangle + \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j^{\alpha+}|0\rangle, \qquad /11.98/$$

където β и β_j са константи, които сега ще определим. Действувайки върху двете страни на равенството /11.98/ с a_k^+, намираме, че β =1. Умножавайки с a_k^-, получаваме

$$\beta_k a_k^{\alpha-} a_k^{\alpha+}|0\rangle = 0$$

и тъй като

$$a_k^{\alpha-}\ a_k^{\alpha+} \neq 0$$

заключаваме, че $\beta_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

При парферми-статистиката анзацът на Грин е полезен главно при пресмятане на матрични елементи, намиране на линейно независими базисни вектори и аналогични технически сметки. В този аспект анзацът на Грин /11.96/ за a-операторите едва ли е от особена полза, като се има предвид, че намирането на матричните елементи в явен вид не представлява трудност.

В заключение накратко ще разгледаме един по-общ подход за дефиниране на A-статистиката, произтичащ от обстоятелството, че идентификацията /11.22/ на операторите на раждане и унищожение с генератори от A_n не е единствено възможна. Реализацията /11.22/, която разглеждахме досега, има ред привлекателни свойства и е може би най-естествена както от физична гледна точка - едночестотните оператори комутират, така и в математически аспект, доколкото дава възможност лесно да се пресметнат матричните елементи на a-операторите и да се направят изводи за допустимия брой на частиците в дадено състояние. За обобщението, което ще разгледаме, е удобно генераторите на $gl(n+1)$ да се въведат с операторите

$$gl(n+1) = л.о.\{ e_{ij} \mid i,j = -q, -q+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, p;\ p+q = n \} \qquad /11.99/$$

а векторите от H-базиса да се подредят, както следва:

$$H = \{ h_{-q}, \dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots, h_p \mid h_i = e_{ii},\ i = -q, \dots, p \}. \qquad /11.100/$$

За оператори на раждане и унищожение ще положим

$$\begin{aligned}
a^+_{-i} &= e_{0,-i} \longleftrightarrow -h^{-i} + h^0, \\
a^-_{-i} &= e_{-i,0} \longleftrightarrow h^{-i} - h^0, \qquad i = 1, 2, \dots, q, \\
a^+_j &= e_{j0} \longleftrightarrow -h^0 + h^j, \qquad j = 1, 2, \dots, p \qquad /11.101/ \\
a^-_j &= e_{0,j} \longleftrightarrow h^0 - h^j
\end{aligned}$$

$$a_j^- = e_{0j} \longleftrightarrow h^0 - h^j . \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$

Вдясно са приведени корените на операторите на раждане a_i^+ и унищожение a_i^-, записани чрез векторите от контравариантния базис. Виждаме, че операторите на раждане /респ.унищожение/ са отрицателни /респ.положителни/ корневи вектори. Операторът на 4-импулса, водещ до правилни трансформационни свойства за полето /5.8/, в този случай се модифицира по следния начин:

$$P^m = \sum_{0 \neq i = -q}^{p} K_i^m \{ [a_i^+, a_i^-] + \frac{i}{|i|} e_{00} \} . \qquad /11.102/$$

Няма да изписваме комутационните съотношения между така въведените оператори $a_{\eta i}^{\xi}$ - те лесно се получават от реализацията /11.101/ и също са трилинейни. Всъщност тези оператори, които в пообобщен смисъл могат да се нарекат също a-оператори на раждане и унищожение, се получават от изходните /11.22/ с трансформацията

$$\begin{aligned} a_i^{\pm} &\longrightarrow a_{-i}^{\mp} , \qquad i = 1, \ldots, q , \\ a_j^{\pm} &\longrightarrow a_{j-q}^{\pm} , \qquad j = q+1, \ldots, n \end{aligned} \qquad /11.103/$$

Тази трансформация се свежда до преименуване на част /първите q / от старите оператори на раждане в оператори на унищожение и обратно. Това обаче не е тривиална стъпка, тъй като води до ново лексикографическо подреждане /11.100/ на векторите в Картановата подалгебра, а следователно и до нови, нееквивалентни на разгледаните досега A_n-модули W . В частност едночестотните части на така въведените оператори комутират само частично:

$$[a_{\eta i}^{\xi}, a_{\eta j}^{\xi}] = 0 , \quad [a_{\eta i}^{\xi}, a_{-\eta j}^{-\xi}] = 0 , \quad \xi, \eta = \pm \qquad /11.104/$$

Сега ще покажем, че в пространствата на Фок или p, или q е 0. Съгласно с теорема 9.1 A_n-модулът W_Λ с ортогонална сигнатура /старше тегло/

$$\Lambda = (L_{-q}, \dots, L_{-1}, L_0, L_1, \dots, L_p) \qquad /11.105/$$

е пространство на Фок тогава и само тогава, когато за старшия вектор са изпълнени условията.

$$[a^-_{\xi i}, a^+_{\eta j}] = 0, \quad \xi i \neq \eta j, \ \xi, \eta = \pm . \qquad /11.106/$$

Като се вземе под внимание, че положителните корневи вектори анулират старшия вектор, заключаваме, че равенството е еквивалентно на изискването векторите

$$\begin{aligned}
&\Lambda + h^{-i} - h^{-j}, \quad -j < -i, \quad i,j = 1,\dots,q, \quad (a)\\
&\Lambda + h^{i} - h^{j}, \quad j < i \quad i,j = 1,\dots,p, \quad (б) \qquad /11.107/\\
&\Lambda + h^{i} - h^{-j}, \quad i = 1,\dots,p, \quad j = 1,\dots,q \quad (в)
\end{aligned}$$

да не са тегла. Има три възможности:

1. Случаят $q=0$ беше вече подробно разгледан.

2. При $p=0$ посочените вектори не са тегла, само ако старшият вектор Λ е от вида

$$\Lambda = (L, L, \dots, L, L_0) . \qquad /11.108/$$

Ако отъждествим оператора /вж. 11.102/

$$N_i = [a^+_{-i}, a^-_{-i}] - e_{00} = e_{-i,-i}$$

с оператора на числото на частиците в състояние i, от изискването вакуумът $|0\rangle = x_\Lambda$ да е безчастично състояние,

$$e_{-i,-i}|0\rangle = -L|0\rangle \quad \text{следва, че} \quad L = 0 \qquad /11.109/$$

Като вземем под внимание и обстоятелството, че $L \geq L_0 \equiv -m$, достигаме до извода, че A_n-модулът W_Λ е модул на Фок, ако има ортогонална сигнатура:

$$\Lambda = (0, 0, \ldots, 0, -m) \quad , \quad m \in \mathbb{N} . \qquad /11.110/$$

Този случай малко се различава от първия и за него всички получени досега резултати се обобщават по естествен начин. В частност едночестотните оператори комутират и всички тегловни вектори са прости. Все пак трябва да се има предвид, че представянията

$$(m, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad (0, 0, \ldots, 0, -m) \qquad /11.111/$$

не са еквивалентни и затова при $p = 0$ се получават нови неприводими модули на Фок. Например за $SU(3)$ $(1,0,0)$ съответствува на кварковото, а $(0,0,-1)$ - на антикварковото представяне.

3. $p \neq 0$, $q \neq 0$; от /11.107/ имаме

$$L_{-q} = \cdots = L_{-1} \equiv L_- \quad ; \quad L_1 = \cdots = L_p \equiv L_+$$

Последното изискване /11.107/ дава $L_- = L_+$. Тъй като за старшето тегло винаги $L_- \geqslant L_0 \geqslant L_+$ заключаваме, че

$$\Lambda = (L, L, \ldots, L) \approx (0, 0, \ldots, 0) . \qquad /11.112/$$

Получи се тъждественото, едномерно представяне. По такъв начин в пространствата на представянията, характеризиращи се с единствено нормирано вакуумно състояние - пространствата на Фок, едночастичните състояния винаги комутират и всички доказани за случай 1. свойства остават в сила.

Могат да представляват интерес и някои не собствени пространства на Фок, но тук няма да се спираме на този въпрос.

12. D-пространства на Фок

Както за алгебрите A_n и B_n, така и тук при намиране на пространствата на Фок на d-операторите ще е необходим критерий, позволяващ да съдим кога даден вектор е тегло. За да го установим най-напред ще приведем F-базиса и ще намерим връзката между каноничните и ортогоналните координати. Ще се наложи да използваме различно лексикографическо подреждане на векторите в Картановата подалгебра. Започваме с ковариантен базис в $\mathcal{H} \subset D_{n+1}$, чиито ортогонални вектори /6.6/ са подредени по естествен начин:

$$H = \{ h_0, h_1, \dots, h_n \} . \qquad /12.1/$$

Като използваме метриката /6.7/, от /2.41/ и /6.11/ намираме векторите от F-базиса:

$$f_i = A_i^{\ j} h_j , \qquad /12.2/$$

изразени чрез елементите на ковариантния базис:

$$f_i = h_i - h_{i+1} , \quad f_n = h_{n-1} + h_n , \quad i = 0,1,2,\dots,n-1 . \qquad /12.3/$$

Оттук за връзката между ортогоналните координати $l_i = \lambda(h_i)$ и каноничните координати $\lambda_i = \lambda(f_i)$ на произволно тегло $\lambda \in \mathcal{H}^*$ се получава

$$l_i = (A^{-1})_i^{\ j} \lambda_j . \qquad /12.4/$$

Записано явно, това равенство добива вида

$$l_i = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_{n-1} + \frac{1}{2}(\lambda_n - \lambda_{n-1}), \quad i = 0,1,\dots,n . \qquad /12.5/$$

Доколкото каноничните координати λ_i на доминантните тегла са цели неотрицателни числа, ортогоналните им координати удовлетворяват системата от неравенства

$$l_0 \geq l_1 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq |l_n| . \qquad /12.6/$$

При това всички те, а заедно с тях и ортогоналните координати на произволно тегло са едновременно или цели, или полуцели числа. В частност за координатите на старшето тегло са в сила неравенствата:

$$L_0 \geq L_1 \geq \cdots \geq L_{n-1} \geq |L_n|. \qquad /12.7/$$

Групата на Вайл за D_{n+1} се свежда към пермутация и смяна на знаците на четен брой ортогонални координати.

<u>Лема 12.1.</u> Векторът $\lambda = (l_0, l_1, \ldots, l_n)$ от неприводимия D_{n+1}-модул W със старше тегло $\Lambda = (L_0, \ldots, L_n)$ е тегло тогава и само тогава, когато координатите му удовлетворяват релациите:

$$\text{а)}\quad |l_{i_0}| + |l_{i_1}| + \cdots + |l_{i_m}| \leq |L_0| + \cdots + |L_m|,\ i_0 \neq \cdots \neq i_m;\ m = 0, \ldots, n;$$

$$\text{б)}\quad \left|\sum_{i=0}^{n} l_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} L_i; \qquad /12.8/$$

$$\text{в)}\quad \sum_{i=0}^{n} l_i = \sum_{i=0}^{n} L_i \pmod 2.$$

Неравенството а се доказва както в лема 10.2, а равенство в следва от обстоятелството, че сумата от ортогоналните координати на корените е винаги четно число. За да докажем неравенство б, най-напред разглеждаме произволно доминантно тегло $\bar{\lambda} = (\bar{l}_0, \bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n)$:

$$\bar{l}_0 \geq \bar{l}_1 \geq \cdots \geq \bar{l}_{n-1} \geq |\bar{l}_n|. \qquad /12.9/$$

Тъй като всяко тегло /в това число и $\bar{\lambda}$ / е представимо във вида

$$\bar{\lambda} = \Lambda + \sum_i k_i \omega_i, \quad k_i \in \mathbb{N},$$

където ω_i са отрицателни корени, то

$$0 \leq \bar{l}_0 + \cdots + \bar{l}_n \leq L_0 + \cdots + L_n. \qquad /12.10/$$

Съгласно с едно от свойствата на групата на Вайл S, ако λ е тегло, съответствуващият на λ доминантен вектор $\bar{\lambda} = (\bar{l}_0, \dots, \bar{l}_n)$, получаващ се от λ с трансформации от групата S, е също тегло. Очевидно

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \bar{l}_i \right| \geq \left| \sum_{i=1}^{n} l_i \right|$$

и затова, ако предположим, че има тегло, нарушаващо условие δ, то последното неравенство би противоречало на неравенство /12.10/.

Сега сме готови да пристъпим към класификация на D_{n+1} -модулите на Фок. В § 6 въведохме две нееквивалентни системи от d -оператори - $d^{\xi}_{\eta j}$ /6.16/ и $D^{\xi}_{\eta j}$ /6.33/, удовлетворяващи изходното уравнение за квантуване. Тук най-напред ще се спрем на фоковските представяния на още една, нееквивалентна на първите две, съвкупност от оператори $\tilde{d}^{\xi}_{\eta i}$, получаваща се от $d^{\xi}_{\eta j}$ -операторите с преименуване на част от операторите на раждане в оператори на унищожение и обратно. Имаме предвид множеството от корневи вектори с корени както следва:

$$\begin{aligned} \tilde{d}^{+}_{\xi j} &= e_{\xi j,0} - e_{-0,-\xi j} \longleftrightarrow -h^0 + \xi h^j, \\ \tilde{d}^{-}_{\xi j} &= e_{0,\xi j} - e_{-\xi j,-0} \longleftrightarrow h^0 - \xi h^j . \end{aligned} \qquad \xi = \pm, \quad j = 1, \dots, n \qquad /12.11/$$

Веднага се вижда, че сумата от корените на всеки два оператора на раждане /или унищожение/ не е корен. Затова едночестотните оператори комутират:

$$[\tilde{d}^{+}_{\xi i}, \tilde{d}^{+}_{\eta j}] = [\tilde{d}^{-}_{\xi i}, \tilde{d}^{-}_{\eta j}] = 0 .$$

Това е едно от привлекателните свойства на $\tilde{d}$ -операторите. Съгласно с теорема 9.1 крайномерният неприводим D_{n+1}-модул W_Λ със старши вектор x_Λ е пространство на Фок, само ако

$$[\tilde{d}^{-}_{\xi i}, \tilde{d}^{+}_{\eta j}]\, x_\Lambda = 0, \; \forall\, \xi i \neq \eta j . \qquad /12.12/$$

Тъй като коренът на комутатора пред x_Λ е $\eta h^j - \xi h^i$, това равенство е еквивалентно на изискването векторът

$$\lambda = \Lambda + \eta h^j - \xi h^i , \quad i,j = 1,\dots,n ; \ \xi,\eta = \pm ; \quad \xi i \neq \eta j$$

да не е тегло. При $\eta h^j - \xi h^i > 0$ това е изпълнено. Остава да установим при какви старши тегла $\Lambda = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ векторите

$$\lambda_1 = \Lambda + h^j - h^i, \qquad i < j = 1,\dots,n,$$
$$\lambda_2 = \Lambda - h^j - h^i, \qquad i \neq j = 1,\dots,n, \tag{12.13}$$

не са тегла. Повтаряйки дословно разсъжденията от стр.146, заключаваме, че λ_1 не е тегло тогава и само тогава, когато

$$L_1 = L_2 = \dots = L_n \equiv L . \tag{12.14}$$

При това $L \geqslant 0$. Действувайки с елемента от групата на Вайл $S_{-h^i-h^j}$ при $0 < i \neq j$ върху $\Lambda = (L_0, L, \dots, L)$, намираме

$$S_{-h^i-h^j} \cdot \Lambda = \Lambda + 2L(-h^i - h^j). \tag{12.15}$$

От свойства /2.29-30/ на групата на Вайл заключаваме, че при $0 \leq k \leq 2L$, $k \in \mathbb{N}_0$, векторите

$$\Lambda + k(-h^i - h^j) \tag{12.16}$$

са тегла. Ето защо при $L \neq 0$ W_Λ не е пространство на Фок. Остава да разгледаме D_{n+1}-модулите с тегла

$$\Lambda = (L_0, 0, \dots, 0). \tag{12.17}$$

Векторът

$$(\ell_0, \dots, \ell_n) = (L_0, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0) \tag{12.18}$$

очевидно нарушава първото неравенство в /12.8/. Затова векторите λ_1 и λ_2 с $\Lambda = (L_0, 0, \dots, 0)$ не са тегла. Ще формулираме този резултат като следствие.

<u>Следствие 12.1.</u> D_{n+1}-модулът W_Λ е пространство на Фок за $\tilde{a}$-операторите /12.11/ тогава и само тогава, когато ортогоналната му сигнатура е

$$\Lambda = (p, 0, \ldots, 0) \qquad /12.19/$$

за всяко цяло положително число p.

В частност сред D_{n+1}-модулите на Фок няма представяния, чиито ортогонални координати са полуцели числа - нещо, което е характерно за парафермии-статистиката.

Произволен вектор от пространството на Фок W_p със старше тегло $(p, 0, \cdots, 0)$ е линейна комбинация от вектори:

$$(\tilde{a}_1^+)^{p_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1} \cdots (\tilde{a}_n^+)^{p_n}(a_{-n}^+)^{q_n} |0\rangle, \quad p_i, q_i \in \mathbb{N}_0. \qquad /12.20/$$

От /12.11/ и /12.19/ заключаваме, че този вектор има тегло

$$\lambda = \Big(p - \sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i), p_1 - q_1, p_2 - q_2, \cdots, p_n - q_n\Big). \qquad /12.21/$$

За разлика от A_n -модулите на Фок тук теглата не са прости. Например векторът

$$(\tilde{a}_1^+)^{p_1+\alpha_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1+\alpha_1} \cdots (\tilde{a}_n^+)^{p_n+\alpha_n}(\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n+\alpha_n} |0\rangle \qquad /12.22/$$

където $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ са цели числа, чиято сума е 0, има също тегло /12.21/. Не е трудно да се пресметне кратността на произволно тегло от този вид - тя се равнява на броя на възможните представяния на числото

$$N = \min(p_1, q_1) + \cdots + \min(p_n, q_n) \qquad /12.23/$$

като сума от n неотрицателни числа β_i, т.е.

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = N, \quad \beta_i \in \mathbb{N}_0. \qquad /12.24/$$

Наистина тегловните вектори /12.22/, отговарящи на различни допустими набори от числа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, изчерпват съвкупността от линейно независими вектори с тегло λ. Затова кратността на теглото /12.21/ е равна на броя на допустимите вектори $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целочислени координати, такива, че

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 . \qquad /12.25/$$

Освен това степенните показатели в /12.22/ трябва да са неотрицателни и следователно числата α_i удовлетворяват неравенствата:

$$\beta_i = \alpha_i + \min(p_i + q_i) \geqslant 0 \quad i = 1, \cdots, n . \qquad /12.26/$$

От /12.26/ и /12.25/ следва /12.24/.

<u>Лема 12.2.</u> В D_{n+1}-модула на Фок W_p със старше тегло $\Lambda = (p, 0, \ldots, 0)$ векторът

$$(\tilde{a}_1^+)^{p_1} (\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1} \ldots (\tilde{a}_n^+)^{p_n} (\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n} |0\rangle , \quad p_i, q_i \in \mathbb{N}_0 \qquad /12.27/$$

не се анулира тогава и само тогава, когато

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leq p \quad \text{и} \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_n \leq p . \qquad /12.28/$$

В пространството на Фок не може да има състояния /12.27/ с повече от $2p$ частици.

<u>Доказателство.</u>

От получения критерий /12.8/ заключаваме, че векторът $\lambda = (\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n)$ е тегло, ако и само ако координатите му удовлетворяват релациите

$$a') \quad |\ell_{i_0}| + |\ell_{i_1}| + \cdots + |\ell_{i_m}| \leq p, \quad i_0 \neq \ldots \neq i_m = 1, \ldots, n, \quad m = 0, \ldots, n ;$$

$$б') \quad \left| \sum_{i=0}^{n} \ell_i \right| \leq p ; \qquad /12.29/$$

$$в') \quad \sum_{i=0}^{n} \ell_i = p (\mathrm{mod}\, 2)$$

От /12.21/ се вижда, че теглото на всеки вектор /12.27/ удовлетворява равенството /12.29 в'/. Освен това a' може да се замени с равносилното неравенство

$$|\ell_0| + |\ell_1| + \cdots + |\ell_n| \leq p . \qquad /12.30/$$

В частност $|\ell_0| \leq p$, което за теглото /12.21/ добива вида

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i) \leq 2p \qquad /12.31/$$

и следователно състояния /12.27/ с повече от $2p$ частици няма.

Нека за определеност приемем, че:

$$\begin{array}{l} p_{i_1} \geq q_{i_1}, \ldots, p_{i_r} \geq q_{i_r}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n = 1,\ldots,n, \\ p_{i_{r+1}} \leq q_{i_{r+1}}, \ldots, p_{i_n} \leq q_{i_n}, \end{array} \qquad /12.32/$$

Ако неравенствата /12.28/ се удовлетворяват, то и неравенство /12.30/ е в сила и затова съответният вектор /12.27/ е тегловен. Да допуснем, че $p_1+\cdots+p_n > p$. Тогава

$$|\ell_0|+\cdots+|\ell_n| = \left|p-\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i)\right| + \sum_{i=1}^{n}|p_i-q_i| =$$

$$= -p+\sum_{s=1}^{n}(p_{i_s}+q_{i_s}) + \sum_{s=1}^{r}(p_{i_s}-q_{i_s}) + \sum_{s=r+1}^{n}(q_{i_s}-p_{i_s}) =$$

$$= 2\sum_{s=1}^{r} p_{i_s} + 2\sum_{s=r+1}^{n} q_{i_s} - p \geq 2\sum_{s=1}^{n} p_{i_s} - p > p, \qquad /12.33/$$

което е невъзможно.

Неравенството $q_1+\cdots+q_n \leq p$ следва веднага от δ' .

Ето защо базисните вектори /12.27/, за които поне едно от неравенствата /12.28/ не е изпълнено, се анулират.

Ако в /12.12/ положим $\xi i = \eta j$ и вземем под внимание, че координатите на теглата са собствени стойности на векторите от ковариантния базис, получаваме

$$[\tilde{d}^-_{\xi i}, \tilde{d}^+_{\xi i}]\, x_\Lambda = (h_0-\xi h_i)\, x_{(p,0,\ldots,0)} = p\, x_\Lambda . \qquad /12.34/$$

Въз основа още на равенства /12.12/ и обстоятелството, че $x_\Lambda = |0\rangle$ и $\tilde{d}^-_{\xi i}|0\rangle = 0$, заключаваме

$$\tilde{d}^-_{\xi i}.\tilde{d}^+_{\eta j}|0\rangle = \delta_{\xi i,\eta j}.\,p|0\rangle; \quad i,j=1,\ldots,n; \quad \xi,\eta=\pm . \qquad /12.35/$$

Матричните елементи на $\tilde{a}$ -операторите макар и по-сложно в сравнение с тези за a -операторите, се пресмятат явно в базиса

$$|p;p_1,q_1;p_2,q_2;\cdots;p_n,q_n\rangle = (\tilde{a}_1^+)^{p_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1}\ldots(\tilde{a}_n^+)^{p_n}(\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle . \qquad /12.36/$$

За генераторите $h_0, h_1, \ldots, h_n$ от Картановата подалгебра веднага можем да напишем:

$$h_0|p;p_1,q_1;\cdots;p_n,q_n\rangle = \Big(p - \sum_{i=1}^{n}[p_i+q_i]\Big)|p;p_1,q_1;\cdots;p_n,q_n\rangle , \qquad /12.37/$$

$$h_i|p;p_1,q_1;\cdots;p_n,q_n\rangle = (p_i-q_i)|p;p_1,q_1;\cdots;p_n,q_n\rangle , \quad i=1,\ldots,n.$$

Освен това очевидно имаме

$$\tilde{a}_i^+|p;\cdots;p_i,q_i;\cdots\rangle = |p;\cdots;p_i+1,q_i;\cdots\rangle , \qquad /12.38/$$

$$\tilde{a}_{-i}^+|p;\cdots;p_i,q_i;\ldots\rangle = |p;\cdots;p_i,q_i+1;\cdots\rangle . \qquad /12.39/$$

При пресмятането на матричните елементи на операторите на унищожение е удобно да се започне с оператора $\tilde{a}_1^-$. Използувайки известни тъждества за многократни комутатори, можем да напишем

$$\tilde{a}_1^-|p;p_1,q_1;\cdots;p_n,q_n\rangle = \mathrm{I} + \mathrm{II} \qquad /12.40/$$

където

$$\mathrm{I} = [\tilde{a}_1^-,(\tilde{a}_1^+)^{p_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1}](\tilde{a}_2^+)^{p_2}(\tilde{a}_{-2}^+)^{q_2}\ldots(\tilde{a}_n^+)^{p_n}(\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle , \qquad /12.41/$$

$$\mathrm{II} = \sum_{k=2}^{n}(\tilde{a}_1^+)^{p_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1}\ldots[\tilde{a}_1^-,(\tilde{a}_k^+)^{p_k}(\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k}]\ldots(\tilde{a}_n^+)^{p_n}(\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle \qquad /12.42/$$

Първото слагаемо се пресмята лесно, ако се използува тъждеството

$$[\tilde{a}_1^-,(\tilde{a}_1^+)^{p_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1}] = \sum_{i=0}^{p_1-1}(\tilde{a}_1^+)^{i}(h_0-h_1)(\tilde{a}_1^+)^{p_1-i-1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1} , \qquad /12.43/$$

и формулите /12.37/. Получава се

$$I = p_1(p+q_1-\sum_{i=1}^{n}[p_i+q_i]+1)|p; p_1-1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_n, q_n\rangle . \qquad /12.44/$$

При пресмятането на второто слагаемо изхождаме от тъждеството

$$[\tilde{a}_1^-, (\tilde{a}_k^+)^{p_k}(\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k}] = p_k(\tilde{a}_k^+)^{p_k-1}[\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_k^+](\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k} + \qquad /12.45/$$
$$+q_k(\tilde{a}_k^+)^{p_k}(\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k-1}[\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_{-k}^+] .$$

Като се действува с лявата и дясната страна на това операторно равенство върху вектора

$$(\tilde{a}_{k+1}^+)^{p_{k+1}}(\tilde{a}_{-k+1}^+)^{q_{k+1}} \dots (\tilde{a}_n^+)^{p_n}(\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle , \qquad /12.46/$$

и се използува обстоятелството, че при

$$[[\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_{\xi k}^+], \tilde{a}_{\eta j}^+] = 0, \quad \xi, \eta = \pm, \quad k \neq j = 1, \dots, n , \qquad /12.47/$$

и още тъждеството

$$[[\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_k^+], (\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k}] = q_k \tilde{a}_{-1}^+(\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k-1} , \qquad /12.48/$$

след известни преобразования достигаме до

$$[\tilde{a}_1^-, (\tilde{a}_k^+)^{p_k}(\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k}](\tilde{a}_{k+1}^+)^{p_{k+1}}(\tilde{a}_{-k+1}^+)^{q_{k+1}} \dots (\tilde{a}_n^+)^{p_n}(\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle =$$

$$= p_k q_k \tilde{a}_{-1}^+(\tilde{a}_k^+)^{p_k-1}(\tilde{a}_{-k}^+)^{q_k-1}(\tilde{a}_{k+1}^+)^{p_{k+1}} \dots (\tilde{a}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle \qquad /12.49/$$

Като се умножи /12.49/ отляво с

$$(\tilde{a}_1^+)^{p_1}(\tilde{a}_{-1}^+)^{q_1} \dots (\tilde{a}_{k-1}^+)^{p_{k-1}}(\tilde{a}_{-k+1}^+)^{q_{k-1}}$$

и се сумира по k от 2 до n, се получава търсеният израз за $\boxed{II}$.

Прибавяйки към него I , от /12.44/ окончателно намираме

$$\tilde{d}_1^- |p; p_1, q_1; \cdots ; p_n, q_n\rangle =$$

$$= p_1 \left(p + q_1 - \sum_{i=1}^{n} [p_i + q_i] + 1\right) |p; p_1 - 1, q_1; p_2, q_2; \cdots ; p_n, q_n\rangle + \qquad /12.50/$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} p_k q_k |p; p_1, q_1 + 1; p_2, q_2; \cdots ; p_{k-1}, q_{k-1}; p_k - 1, q_k - 1; p_{k+1}, q_{k+1}; \cdots ; p_n, q_n\rangle .$$

Оттук с разсъждения, аналогични на използуваните при намирането на a_i^- /11.69/, за трансформациите на базиса под действието на оператора $\tilde{d}_i^-$ получаваме

$$\tilde{d}_i^- |p; p_1, q_1; \cdots ; p_i, q_i; \cdots ; p_n, q_n\rangle =$$

$$= p_i \left(p + q_i - \sum_{j=1}^{n} [p_j + q_j] + 1\right) |p; \cdots ; p_i - 1, q_i; \cdots ; p_n, q_n\rangle \qquad /12.51/$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} p_k q_k |p; \cdots ; p_i, q_i + 1; \cdots ; p_k - 1, q_k - 1; \cdots \rangle .$$

В това равенство трябва да се подразбира, че координатите, заменени с многоточие във векторите от дясната част, не се различават от съответните координати на вектора отляво.

При пресмятане на матричните елементи на $\tilde{d}_{-1}^-$ е полезно да се имат предвид тъждествата $(k \neq 1)$:

$$[\tilde{d}_{-1}^-, (\tilde{d}_k^+)^{p_k} (\tilde{d}_{-k}^+)^{q_k}] = p_k (\tilde{d}_k^+)^{p_k - 1} [\tilde{d}_{-1}^-, \tilde{d}_k^+] (\tilde{d}_{-k}^+)^{q_k} +$$

$$+ q_k (\tilde{d}_k^+)^{p_k} (\tilde{d}_{-k}^+)^{q_k - 1} [\tilde{d}_{-1}^-, d_{-k}^+] \qquad /12.52/$$

$$[[\tilde{d}_{-1}^-, \tilde{d}_k^+], (\tilde{d}_{-k}^+)^{q_k}] = q_k \tilde{d}_1^+ (\tilde{d}_{-k}^+)^{q_k - 1} . \qquad /12.53/$$

Окончателно намираме, че $\tilde{d}_{-i}^-$ трансформира по следния начин базисните вектори:

$$\tilde{d}^-_{-i}\,|p;p_1,q_1;\dots;p_i,q_i;\dots;p_n,q_n\rangle =$$

$$= q_i\big(p+p_i+1-\sum_{j=1}^{n}[p_j+q_j]\big)\,|p;\dots;p_i,q_i-1;\dots;p_n,q_n\rangle + \qquad /12.54/$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_k q_k\,|p;\dots;p_i+1,q_i;\dots;p_k-1,q_k-1;\dots\rangle .$$

Като сравняваме изразите /12.51/ и /12.54/, забелязваме, че има симетрия между матричните елементи на $\tilde{d}^-_i$ и $\tilde{d}^-_{-i}$. Това не е случайно - операторите с долни положителни индекси и долни отрицателни индекси имат една и съща Ли-алгебрична структура: както $\tilde{d}^\pm_1,\dots,\tilde{d}^\pm_n$, така и $\tilde{d}^\pm_{-1},\dots,\tilde{d}^\pm_{-n}$ пораждат подалгебри, изоморфни на A_n.

Досега умишлено не поставяхме въпроса, дали $\tilde{d}$-операторите са d-оператори по смисъла на определение 6.1. Оказва се, че те не са d-оператори и трудно биха могли да бъдат интерпретирани в термините на общоприетата идеология в квантовата теория на полето. Ако за оператор на енергията положим

$$P^0 = \frac{1}{2}\sum_{i,\eta} K^0_i\,[\tilde{d}^+_{\eta i},\tilde{d}^-_{\eta i}], \qquad /12.55/$$

то последният, изразен чрез елементите от Картановата подалгебра, добива вида

$$P^0 = -K^0 h_0, \qquad K^0=\sum_i K^0_i .$$

Оттук за трансформационните свойства на операторите $\tilde{d}^\xi_{\eta i}$ се получава

$$[P^0,\tilde{d}^\pm_{\xi i}] = \pm K^0\tilde{d}^\pm_{\xi i} .$$

По такъв начин операторите $\tilde{d}^\pm_{\xi i}$ не удовлетворяват изходното уравнение за квантуване /1.23/ - вместо K^0 отдясно трябваше да се получи K^0_i. Затова тези оператори не са d-оператори. От друга страна,

$\tilde{d}$ -операторите имат някои интересни свойства. За спектъра на P° се получава

$$P^\circ (\tilde{d}_1^+)^{p_1}(\tilde{d}_{-1}^+)^{q_1} \dots (\tilde{d}_n^+)^{p_n}(d_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle =$$

$$= K^\circ \left(\sum_{i=1}^{n}[p_i + q_i] - p\right)(\tilde{d}_1^+)^{p_1}(d_{-1}^+)^{q_1} \dots (\tilde{d}_n^+)^{p_n}(\tilde{d}_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle \qquad /12.56/$$

Енергията на вакуума /мерена в единици на K° / е $-p$, а всяка "частица" увеличава енергията с 1. Запълненото състояние, когато

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i) = 2p ,$$

отговаря на енергия p . Спектърът на енергията е краен и се мени еквидистантно. Това навежда на мисълта, че базисните вектори /12.27/ биха могли да се интерлретират като свързани състояния. При наличие на повече от $2p$ частици "системата става нестабилна и се разпада".

Бихме могли за оператор на 4-импулса да приемем

$$P^m = \frac{1}{2} \sum_{i,\eta} K_i^m [d_{\eta i}^+ , d_{\eta i}^-] = \sum_{i=1}^{n} K_i^m h_i \qquad /12.57/$$

В този случай

$$[P^m, \tilde{d}_{\eta i}^{\pm}] = \mp \eta K_i^m \tilde{d}_{\eta i}^{\pm} \qquad /12.58/$$

и отново операторите $\tilde{d}_i^{\pm}$ влизат в посочения комутатор с неправилен знак.

По такъв начин в термините на традиционната интерпретация $\tilde{d}$ -операторите едва ли могат да се използуват. Разгледахме пространствата на Фок на тези оператори, защото като конструкция те са твърде естествени и биха могли да представляват интерес за теоретичната физика въобще. Така например, доколкото d_j^+ -операторът намалява импулса на системата с K_j^m , на езика на безкрайното море от запълнени състояния той може да се интепретира като оператор на раждане на "дупка" с импулс k_j^m .

Тук повече няма да се спираме на тази и подобни спекулации, и ще преминем към разглеждане на пространствата на Фок на d-операторите.

В подредбата /12.1/ d-операторите /6.16/ на раждане и унищожение не съответствуват на отрицателни и положителни корени. Затова ще приемем ново лексикографическо подреждане в Картановата подалгебра:

$$h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1} \equiv h_0 . \qquad /12.59/$$

За да бъдат означенията по-естествени, заменяме нулевия индекс с $n+1$. Тогава за d-операторите и съответствуващите им корени можем да напишем

$$d_j^+ = e_{n+1,j} - e_{-j,-n-1} \longleftrightarrow -h^j + h^{n+1},$$

$$d_j^- = e_{j,n+1} - e_{-n-1,-j} \longleftrightarrow h^j - h^{n+1},$$

$$d_{-j}^+ = e_{-j,n+1} - e_{-n-1,j} \longleftrightarrow -h^j - h^{n+1}, \qquad /12.60/$$

$$d_{-j}^- = e_{n+1,-j} - e_{j,-n-1} \longleftrightarrow h^j + h^{n+1} .$$

Доколкото

$$[d_{\eta j}^{\xi}, d_{-\eta i}^{-\xi}] = [d_{\eta j}^{\xi}, d_{\eta i}^{\xi}] = 0 , \; j,i = 1,\ldots,n; \; \xi,\eta = \pm \qquad /12.61/$$

освен d-операторите ненулеви са и генераторите:

$$[d_{\eta i}^-, d_{\eta j}^+] \longleftrightarrow h^i - h^j , \qquad \eta = \pm , \; i,j = 1,\ldots,n$$

$$[d_{\eta j}^{\xi}, d_{-\eta i}^{\xi}] \longleftrightarrow -\xi(h^j + h^i), \quad \xi,\eta = \pm, \quad i \neq j = 1,\ldots,n \qquad /12.62/$$

Лема 12.3. D_{n+1}-модулът W_Λ е пространство на Фок за d-операторите /12.60/ тогава и само тогава, когато първите n ортогонални координати на старшето му тегло $\Lambda = (L_1, L_2, \ldots, L_n, L_{n+1})$ са равни помежду си:

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_n . \qquad /12.63/$$

Доказателство.

Съгласно с теорема 9.1 D_{n+1}-модулът W_Λ със старши вектор x_Λ е пространство на Фок само и само тогава, когато

$$[d^-_{\xi i}, d^+_{\xi j}]\, x_\Lambda = 0 \; , \quad i \neq j = 1,\dots,n . \qquad /12.64/$$

Последното е еквивалентно на изискването векторът

$$\Lambda + h^i - h^j \quad \text{при} \quad i > j = 1,\dots,n \qquad /12.65/$$

да не е тегло. Очевидно за сигнатури $\Lambda = (L, L, \dots, L, L_{n+1})$ това изискване е изпълнено, тъй като за координатите на векторите от вида

$$(L,\dots, L, L-1, L,\dots, L, L+1, L,\dots, L, L_{n+1}) \qquad /12.66/$$

не са изпълнени неравенствата /12.8/. Необходимата част от доказателството няма да се разглежда - тя следва от свойствата на групата на Вайл и до голяма степен повтаря вече приведените аналогични доказателства.

Произволен елемент от W_Λ е линейна комбинация от векторите:

$$d^+_{\xi_1 i_1} d^+_{\xi_2 i_2} \cdots d^+_{\xi_r i_r} x_\Lambda , \quad r \in \mathbb{N}_0 \qquad /12.67/$$

Тъй като положително-честотните оператори $d^+_{\eta i}$ въобще не комутират помежду си структурата на W_Λ е по-сложна в сравнение с пространството на Фок на $\tilde{d}$ -операторите. За да намерим базис в W_Λ ще разпределим базисните вектори на алгебрата в три групи:

$$\mathrm{I} = \{d^+_1, d^+_{-1}, d^+_2, d^+_{-2}, \dots, d^+_n, d^+_{-n}\} ,$$

$$/12.68/$$

$$\underline{\mathrm{II}} = \{e_1, \dots, e_m\} , \quad \underline{\mathrm{III}} = \{h_1, h_2, \dots, h_{n+1}\} .$$

В $\underline{\mathrm{II}}$ сме включили тези от корневите вектори на D_{n+1}, които не влизат в $\underline{\mathrm{I}}$.

Мономите

$$(d_1^+)^{p_1}(d_{-1}^+)^{q_1}\dots(d_n^+)^{p_n}(d_{-n}^+)^{q_n}\, e_1^{r_1}\dots e_m^{r_m}\, h_1^{s_1}\dots h_{n+s}^{s_{n+1}}\ , \qquad /12.69/$$

$$p_i, q_i, r_i, s_i \in \mathbb{N}_0\ ,$$

задават базис в универсалната обвиваща алгебра на D_{n+1}. Оттук, като използуваме неприводимостта на D_{n+1}-модула W_Λ и обстоятелството, че

$$e_i x_\Lambda = 0\ , \quad e_i \in \mathrm{I\!I}\ , \qquad /12.70/$$

с разсъждения, аналогични на приведените на стр.130 заключаваме, че векторите

$$(d_1^+)^{p_1}(d_{-1}^+)^{q_1}(d_2^+)^{p_2}(d_{-2}^+)^{q_2}\dots(d_n^+)^{p_n}(d_{-n})^{q_n}\, x_\Lambda\ , \qquad /12.71/$$

$$p_1,\dots,p_n, q_1,\dots,q_n \in \mathbb{N}_0\ ,$$

дефинират базис във W_Λ.

За теглото на вектора /12.71/ записано чрез ортогоналните координати, намираме

$$\left(L-p_1-q_1, L-p_2-q_2, \dots, L-p_n-q_n, L_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i)\right) \qquad /12.72/$$

Оттук и от системата неравенства /12.8/ следва, че векторът /12.71/ не се анулира само, ако:

$$p_i + q_i \le 2L\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \le nL + L_{n+1}\ , \qquad /12.73/$$

$$\left| L_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i)\right| < L$$

$$\sum_{i=1}^{n}|L-p_i-q_i| + \left|L_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i)\right| \le nL + |L_{n+1}|$$

Няма да се спираме на тази съвкупност от неравенства, която спрямо p_i и q_i няма просто решение. Ще отбележим само, че както в /12.71/ така и в произволно състояние /12.67/ операторът $d_{\xi i}^+$, $\xi = \pm$, не може да присъствува повече от $2L$ пъти.

Кратността на теглото /12./2/ може да се пресметне от следните съображения. Всеки вектор, получен от /12.71/ със субституцията

$$p_i' = p_i + \alpha_i\,, \quad q_i' = q_i - \alpha_i\,, \qquad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\,, \qquad /12./4/$$

отговаря на същото тегло /12.72/. Очевидно е, че целите числа α_i могат да се менят само в границите $-p_i \leq \alpha_i \leq q_i$. Въвеждайки нови променливи $\beta_i = \alpha_i + \beta_i$, заключаваме, че кратността на теглото е равна на броя на решенията на системата

$$\beta_1 + \dots + \beta_n = N\,, \qquad N = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)$$
$$0 \leq \beta_i \leq q_i + p_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad /12.75/$$

и отново се свежда към брой на разбивки на числото N.

Обстоятелството, че d-операторите на раждане не комутират помежду си и тук, както и при параферми-операторите, поражда специфични трудности и при интерпретацията, и при конкретни сметки с тези оператори. Съществува обаче клас от представяния, при който посочените трудности не се появяват и който е интересен още с това, че дава нетривиален пример на несобствени пространства на Фок. Имаме предвид съвкупността от D_{n+1}-модули $W_\Lambda^{\pm}$, чиито старши вектори са от вида

$$\Lambda^+ = (L, \dots, L, L) \text{ или } \Lambda^- = (L, \dots, L, -L) \qquad /12.76/$$

Доколкото

$$\Lambda^+ - h^j + h^{n+1} = (\overset{1}{L}, \dots, \overset{j}{L-1}, \dots, \overset{n+1}{L+1}) \qquad /12.77/$$

не е тегло, то

$$d_j^+ x_{\Lambda^+} = d_j^+ |0\rangle = 0\,, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad /12.78/$$

и съгласно с определение 9.2 W^+ не е собствено пространство на Фок.

Аналогично намираме, че

$$d^+_{-j}\, x_{\Lambda} = 0 , \qquad j = 1,\dots,n . \qquad /12.79/$$

Пространствата $W^{\pm}$ имат свойства, симетрични спрямо операторите $d^{\xi}_{\pm j}$. Затова ще се спрем по-подробно на класа W^+. Доколкото всевъзможните вектори от вида

$$d^+_{j_1}\dots d^+_{j_m}|0\rangle , \quad m\in\mathbb{N} ,$$

се анулират, от /12.78/ заключаваме, че "частиците" d^+_j не могат да съществуват в свободно състояние.

Лема 12.4. D_{n+1} -модулът на Фок W^+ със старши вектор $\Lambda=(L,L,\dots,L)$ е пространство на Фок на корените

$$\Sigma' = \{ d^+_{-k} , [d^+_{-j}, d^+_i] \mid i\neq j ; \ i,j,k = 1,\dots,n \} . \qquad /12.80/$$

Доказателство.

В съответствие с определение 9.3 и следствията към него, за да докажем лемата, е достатъчно да покажем, че всеки корнев вектор, непринадлежащ на съвкупността /12.80/, анулира старшия вектор x_Λ. Това са генераторите:

$$\begin{aligned} &d^-_{\xi j} \longleftrightarrow h^j - h^{n+1}, && j=1,\dots,n \ ; \ \xi=\pm \\ &[d^-_{\xi i}, d^+_{\xi j}] \longleftrightarrow h^i - h^j, && i\neq j = 1,\dots,n ; \ \xi=\pm \\ &[d^-_{\xi i}, d^-_{-\xi j}] \longleftrightarrow h^i + h^j . && i,j = 1,\dots,n ; \ \xi=\pm \end{aligned} \qquad /12.81/$$

Както се вижда, коренът на всеки от посочените генератори има поне една положителна координата /=+1/ в ортогоналния базис /12.59/. Нека e_i е кой да е от генераторите /12.81/. Ако

$$x_\ell = e_i x_\Lambda \neq 0 , \qquad /12.82/$$

то теглото на този вектор би имало поне една координата $\ell_i > L$, което е невъзможно. С това лемата е доказана.

Сумата от корените на всеки два корневи вектора от Σ'

не е корен и следователно Σ' е комутативна съвкупност от оператори. Тъй като съгласно с /6.24/

$$[d_i^+, d_{-j}^+] = [d_{-i}^+, d_j^+], \qquad /12.83/$$

сред елементите на Σ' линейно независими са само генераторите

$$d_{-i}^+, \quad [d_{-j}^+, d_k^+], \qquad j<k, \quad i,j,k=1,\dots,n. \qquad /12.84/$$

Ето защо в пространството на Фок W^+ за базис могат да се изберат тегловните вектори

$$(d_{-1}^+)^{k_{11}}\dots(d_{-n}^+)^{k_{nn}}[d_{-1}^+, d_2^+]^{k_{12}}\dots[d_{-(n-1)}^+, d_n^+]^{k_{n-1,n}}|0\rangle \qquad /12.85/$$

където редът на операторите в /12.85/ е произволен. По такъв начин d_j^+ -операторите се появяват винаги в комбинация, в "свързано състояние" с d_{-i}^+-оператори. За определеност ще приемем приведения в /12.85/ ред на операторите, влизащи като множители в базисния вектор /12.85/, т.е.

$$11, 22, \dots, nn, 12, 13, \dots, 1n, 23, 24, \dots 2n; 34, \dots, 3n, \dots, (n-1)n. \qquad /12.86/$$

Теглото на /12.85/ се дава с вектора Те

$$\left(L-\sum_{i=1}^{n} k_{1i},\ L-\sum_{i=1}^{n} k_{2i},\ \dots,\ L-\sum_{i=1}^{n} k_{ni},\ L-\mathrm{Tr}\,K\right) \qquad /12.87/$$

където K е симетрична квадратна n-мерна матрица с матрични елементи:

$$K=(k_{ij}), \quad k_{ij}=k_{ji}, \quad i,j=1,\dots,n. \qquad /12.88/$$

В W^+ матричните елементи на d -операторите се пресмятат явно. За да опростим записа, ще се възползуваме от обстоятелството, че Σ' е комутативна съвкупност от оператори, и ще въведем формално обратни степени на операторите:

$$(d_{-i}^+)^{-1}, \quad [d_{-j}^+, d_k^+]^{-1}, \qquad j\neq k, \quad i,j,k=1,\dots,n. \qquad /12.89/$$

ще считаме, че операторите /12.89/ комутират помежду си и с операторите от системата Σ'.[+]

Изнасяйки доказателството в приложение 1, ще приведем крайните изрази за трансформациите на базиса под действието на d-операторите. Нека

$$|k_{11}, \ldots, k_{n-1,n}\rangle \qquad /12.90/$$

е съкратено означение за базисния вектор /12.85/ с вече приетия ред /12.86/ на операторните множители. Окончателните формули са следните:

$$d^+_{-i}|k_{11},\ldots,k_{ii},\ldots,k_{nn},k_{12},\ldots,k_{n-1,n}\rangle = |k_{11},\ldots,k_{ii}+1,\ldots,k_{nn},k_{12},\ldots,k_{n-1,n}\rangle \qquad /12.91/$$

$$d^+_i|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_{jj}(d^+_{-j})^{-1}[d^+_{-i}, d^+_j]|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle \qquad /12.92/$$

$$d^-_i|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_{ij}\, d^+_{-j}[d^+_{-i}, d^+_j]^{-1}|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle \qquad /12.93/$$

$$d^-_{-i}|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle = \{ k_{ii}[2L - \mathrm{Tr}K - (k_{i1}+\ldots+k_{in}) + k_{ii}+1](d^+_{-i})^{-1} +$$

$$+ \sum_{\substack{j\neq r=1\\ j,r\neq i}}^{n} k_{rr}k_{ij}(d^+_{-r})^{-1}[d^+_{-r}, d^+_j][d^+_{-i}, d^+_j]^{-1}\}|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle. \qquad /12.94/$$

В тези формули трябва да се има предвид тъждеството

$$[d^+_{-i}, d^+_j] = -[d^+_{-j}, d^+_i], \quad i\neq j = 1,\ldots,n. \qquad /12.95/$$

[+] Рационални функции от генераторите на произволна алгебра на Ли $\mathcal{A}$ и в частност от операторите /12.89/ могат да бъдат дефинирани строго като разширение на универсалната обвиваща алгебра на $\mathcal{A}$. В такъв случай комутативността на операторите /12.89/ с елементите от Σ' и помежду им е следствие. Тук ние разглеждаме обратните степени само формално.

Затова, когато в тези равенства се появяват комутатори от вида $[d^+_{-i}, d^+_j]$ при $i>j$, те трябва да се заменят с $-[d^+_{-j}, d^+_i]$.

Да разгледаме един пример. Нека $n = 3$. За трансформациите на базиса с генератора $d^-_{-1} \in D_4 \approx so(8,\mathbb{C})$ от /12.94/ се получава

$$d^-_{-1}\,|K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{12}, K_{13}, K_{23}\rangle = \{K_{11}(2L-K_{11}-K_{22}-K_{12}+1)(d^+_{-1})^{-1} +$$

$$+ K_{22}K_{13}(d^+_{-2})^{-1}[d^+_{-2}, d^+_3][d^+_{-1}, d^+_3]^{-1} - K_{33}K_{12}(d^+_{-3})^{-1}[d^+_{-2}, d^+_3][d^+_{-1}, d^+_2]^{-1}\}.$$

$$.(d^+_{-1})^{K_{11}}(d^+_{-2})^{K_{22}}(d^+_{-3})^{K_{33}}[d^+_{-1}, d^+_2]^{K_{12}}[d^+_{-1}, d^+_3]^{K_{13}}[d^+_{-2}, d^+_3]^{K_{23}}|0\rangle =$$

$$= K_{11}(2L-K_{11}-K_{22}-K_{12}+1)\,|K_{11}-1, K_{22}, K_{33}, K_{12}, K_{13}, K_{23}\rangle +$$

$$+ K_{22}K_{13}\,|K_{11}, K_{22}-1, K_{33}, K_{12}, K_{13}-1, K_{23}+1\rangle -$$

$$- K_{12}K_{33}\,|K_{11}, K_{22}, K_{33}-1, K_{12}-1, K_{13}, K_{23}+1\rangle . \qquad /12.96/$$

В §6 се въведе още една, неизоморфна на $d^\xi_{\eta i}$, съвкупност от d-оператори $D^\xi_{\eta i}$ -

$$D^\xi_{\eta i} = d^\xi_i + \eta\, d^\xi_{-i}, \qquad i = 1,\dots,n, \quad \xi,\eta = \pm , \qquad /12.97/$$

и се отбеляза, че при фиксиран знак на η $D^\xi_{\eta i}$ са параферми-оператори на раждане $(\xi=+)$ и унищожение $(\xi=-)$. Сега по-подробно ще се спрем на свойствата на тези оператори в D_{n+1}-модулите $W^\pm$. За определеност отново ще изберем $W^+ \equiv W_\Lambda$ със старши вектор $\Lambda = (L,\dots,L)$. От /12.97/ заключаваме, че

$$D^+_{\eta i}|0\rangle = \eta\, d^+_{-i}|0\rangle, \text{ т.е. } D^+_i|0\rangle = -D^+_{-i}|0\rangle \qquad /12.98/$$

и затова $D^+_{\pm i}$, i -фиксирано, пораждат от вакуума едно и също състояние и би следвало да се интерпретират като оператори на раждане на една и съща частица. Следващата лема усилва този резултат.

Лема 12.5. Нека $V_\pm$ са подпространствата на W_Λ, породени с операторите $D^+_{\pm i}$ от вакуума:

$$V_\xi = \text{л.о.}\left\{ D^+_{\xi i_1} D^+_{\xi i_2} \cdots D^+_{\xi i_m} |0\rangle \;|\; i_1, i_2, \dots, i_m = 1, \dots, n;\ m \in \mathbb{N}_0;\ \xi\text{-фиксирано} \right\}$$

/12.99/

Тогава

$$W_\Lambda = V_+ = V_- . \qquad /12.100/$$

Доказателство.

Тъй като $V_\xi \subset W_\Lambda$, остава да докажем обратното включване. За целта действуваме с оператора d^+_{-i} върху вектора

$$D^+_{j_1} D^+_{j_2} \cdots D^+_{j_m} |0\rangle \in V_+ \qquad /12.101/$$

Въз основа на равенство /12.98/ и тъждеството

$$[d^+_{-i}, D^+_j] = \frac{1}{2}[D^+_i, D^+_j] = -\frac{1}{2}[D^+_{-i}, D^+_{-j}] \qquad /12.102/$$

можем да напишем

$$d^+_{-i} D^+_{j_1} \cdots D^+_{j_m} |0\rangle = \sum_{s=1}^{m} D^+_{j_1} \cdots D^+_{j_{s-1}} [d^+_{-i}, D^+_{j_s}] D^+_{j_{s+1}} \cdots D^+_{j_m} |0\rangle +$$

$$+ D^+_{j_1} \cdots D^+_{j_m} d^+_{-i} |0\rangle = D^+_{j_1} \cdots D^+_{j_m} D^+_i |0\rangle + \qquad /12.103/$$

$$+ \frac{1}{2} \sum D^+_{j_1} \cdots D^+_{j_{s-1}} [D^+_i, D^+_{j_s}] D^+_{j_{s+1}} \cdots D^+_{j_m} |0\rangle \in V_+ .$$

Оттук заключаваме, че

$$(d^+_{-1})^{q_1} \cdots (d^+_{-n})^{q_n} D^+_{j_1} \cdots D^+_{j_m} |0\rangle \in V_+ , \qquad /12.104/$$

или още по-общо

$$(d^+_{-1})^{q_1} \cdots (d^+_{-n})^{q_n} P(D^+_1, \dots, D^+_n) |0\rangle \in V_+ \qquad /12.105/$$

където $P(D^+_1, \dots, D^+_n)$ е произволен елемент от операторите

За да довършим доказателството, ще използуваме тъждеството

$$[d^+_{-j}, d^+_k] = \frac{1}{2}[D^+_j, D^+_k] = -\frac{1}{2}[D^+_{-j}, D^+_{-k}] \qquad /12.106/$$

и ще препишем произволен базисен вектор /12.85/ във вида

$$|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle = (d^+_{-1})^{k_{11}}\ldots(d^+_{-n})^{k_{nn}} \prod_{i<j=1}^{n} \frac{1}{2}[D^+_i, D^+_j]^{k_{ij}}|0\rangle \qquad /12.107/$$

Съгласно с /12.105/ $|k_{11},\ldots,k_{n-1,n}\rangle \in V_+$, което доказва, че $W_\Lambda = V_+$.

Ако бяхме използували вторите части на равенствата /12.102/ и /12.106/, щяхме да получим $W_\Lambda = V_-$. С това лемата е доказана.

Полученият резултат не е неочакван. Известно е, че представянето на D_{n+1} със сигнатура $\Lambda = (L, L,\ldots, L, \pm L)$ е неприводимо спрямо подходящо избрана подалгебра $B_n \subset D_{n+1}$ [53] и спрямо нея има сигнатура $\tilde{\Lambda} = (L,\ldots, L)$. Ако бихме искали да докажем лемата, изхождайки от това свойство, би трябвало най-напред да докажем, че съществува автоморфизъм на породените от D -операторите подалгебри B_n върху посочените по-горе.

Полученият резултат има няколко интересни следствия. Преди всичко става ясно, че веднага могат да се напишат матричните елементи на параферми-операторите в базиса /12.85/ [59] . Сигнатурата на B_n в $V_\pm$ е $(L,\ldots, L)$. Освен от общи съображения, това произтича от следствие 10.3 и равенство /10.28/, което в случая дава

$$\frac{1}{2}[D^-_i, D^+_i]|0\rangle = L|0\rangle . \qquad /12.108/$$

По такъв начин във W_Λ се реализират точно едновакуумните представяния на параферми-операторите и по-конкретно в D_{n+1} -модула със старше тегло $(L, L,\ldots, L)$ се задава представяне с порядък на парастатистиката $p = 2L$. Тъй като това е нов резултат, ще го разгледаме по-подробно. От съответствието между базисните вектори във

V_+ и теглата им

$$|k_{11},\dots,k_{n-1,n}\rangle \longrightarrow \left(L-\sum_{i=1}^{n}k_{1i},\dots,L-\sum_{i=1}^{n}k_{ni},\ L-\mathrm{Tr}\,K\right) \qquad /12.109/$$

и въз основа на системата неравенства /12.8/ заключаваме, че $|k_{11},\dots,k_{n-1,n}\rangle$ е определен /= не се анулира/ само за цели неотрицателни числа, дефинирани със симетричната матрица

$$K=\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn}\end{pmatrix} \qquad /12.110/$$

и удовлетворяващи системата от неравенства

$$\begin{aligned} &0 \leq k_{1i}+k_{2i}+\dots+k_{ni} \leq 2L\ , \quad i=1,\dots,n \\ &0 \leq \mathrm{Tr}\,K \leq 2L\ , \qquad\qquad k_{ij}\in\mathbb{N}_0 \end{aligned} \qquad /12.111/$$

Ясно е, че базисният вектор може да се отъждестви със симетричната матрица /12.110/.

Метриката $(\ ,\ )$ във V_+, спрямо която се изпълнява условието за ермитовост

$$(d^{+}_{\xi i})^{*} = d^{-}_{\xi i}\ , \qquad /12.112/$$

се дефинира по обикновения за пространството на Фок начин. Не е трудно да се покаже, че базисът /12.110/ не е ортогонален - скаларното произведение между базисните вектори с едно и също тегло въобще не е 0. От /12.109/ се вижда, че такива са векторите, чиито координати се подчиняват но равенствата

$$\mathrm{Tr}\,K = C_0\ , \quad k_{1i}+\dots+k_{ni} = C_i\ , \quad i=1,\dots,n, \quad C_i\in\mathbb{N}_0 \qquad /12.113/$$

Например

$$\left(\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\right) \neq 0 \qquad /12.114/$$

За да представим d -операторите в независещ от базиса вид, ще се възползуваме от комутативността на d_{-i}^{+} и $[d_{-j}^{+}, d_{k}^{+}]$, $j\neq k$, $i,j,k=1,\dots,n$ и ще положим

$$|k_{11},\dots,k_{n-1,n}\rangle = \prod_{1\le i\le j\le n}(x_{ij})^{k_{ij}} . \qquad /12.115/$$

По същество ние направихме субституция:

$$d_{-i}^{+} \to x_{ii} , \quad [d_{-j}^{+}, d_{k}^{+}] \to x_{jk}, \quad j\neq k;\ i,j,k=1,\dots,n \qquad /12.116/$$

Тъй като

$$[d_{-j}^{+}, d_{k}^{+}] = -[d_{-k}^{+}, d_{j}^{+}]$$

ще разглеждаме също и променливи x_{ij} при $i>j$, като винаги ще считаме, че

$$x_{ij} = -x_{ji} \quad \text{при} \quad i\neq j . \qquad /12.117/$$

Сега имаме всичко необходимо, за да представим d-операторите във вид на диференциални оператори, дефинирани в D_{n+1}-модула $W_{\Lambda} = V_{+}$ с базис /12.115/ . Както се вижда от равенствата /12.91-94/ , можем да положим:

$$d_{-i}^{+} = x_{ii}$$

$$d_{i}^{+} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{jj}} ,$$

$$d_{i}^{-} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_{jj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} , \qquad /12.118/$$

$$d_{-i}^{-} = \frac{\partial}{\partial x_{ii}}\left[2L - \sum_{j=1}^{n} x_{jj}\frac{\partial}{\partial x_{jj}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} + 1\right] +$$

$$+ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k\neq i}}^{n} x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{kk}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{ij}} .$$

Реализацията на тези оператори в пространството W_Λ от полиноми на $\frac{1}{2}(n+1)n$ променливи с базис /12.115/ задава неприводимо представяне на алгебрата D_{n+1} със сигнатура $\Lambda = (L, \ldots, L)$. Във W_Λ старшият вектор е $x_\Lambda = 1$. Трябва да се помни, че базисът /12.115/ е дефиниран само за стойности на степенните показатели, удовлетворяващи неравенство /12.111/. За да се получи пространство, затворено спрямо d-операторите /12.118/ , без да е необходимо да се държи непрекъснато сметка за неравенствата /12.111/ , е удобно да се приеме нов базис, дефиниран, както следва :

$$|K_{11}, \ldots, K_{n-1,n}) = \frac{2L - \mathrm{Tr}\,K + 1}{(2L+1)^{n+1}} \prod_{j=1}^{n} \Big(p - \sum_{i=1}^{n} K_{ij} + 1\Big) |K_{11}, \ldots, K_{n-1,n}\rangle . \qquad /12.119/$$

В /12.119/ коефициентът пред $|\quad\rangle$ е подбран така, че да се анулира, когато стойностите на K_{ij} преминат допустимите интервали на изменение.

Следствие 12.2. Операторите

$$b_i^- = \frac{\partial}{\partial x_{ii}} \Big[p - \sum_{j=1}^{n} x_{jj} \frac{\partial}{\partial x_{jj}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + 1 \Big] +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} x_{jj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k \neq i}}^{n} x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{kk}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{ij}} , \qquad /12.120/$$

$$b_i^+ = x_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{jj}} , \qquad x_{ij} = - x_{ji} \ \text{при} \ i \neq j ; \ i,j = 1, \ldots, n$$

удовлетворяват трилинейните комутационни съотношения за n двойки параферми-оператори. В пространството V_+ с базис /12.119/ те задават неприводимо представяне с порядък на парастатистиката $p = 2L$

Като генератори от B_n операторите $b_i^{\pm}$, $i=1,\dots,n$, пораждат неприводимо представяне във V_+ със старши вектор $x_\Lambda = 1$ и старше тегло $\Lambda = (L,\dots,L)$. Обстоятелството, че във $V_+ = W_\Lambda$ се реализира неприводимо представяне на B_n, дава основание да се формулира още едно следствие

<u>Следствие 12.3.</u> Всяко неприводимо представяне на n-двойки парафермиоператори $b_i^{\pm}$, $i=1,\dots,n$, характеризиращо се с единствено вакуумно състояние $|0\rangle$, може да се продължи до неприводимо представяне на алгебрата D_{n+1} или, което е същото, до неприводимо представяне на операторите $D_{\eta j}^{\xi}$, $\xi,\eta=\pm$, $j=1,\dots,n$. Породеното от b-операторите представяне на B_n със сигнатура $(\frac{p}{2},\dots,\frac{p}{2})$, $p\in \mathbb{N}_0$ може да се продължи до две нееквивалентни представяния на d-операторите със сигнатури $(\frac{p}{2},\dots,\frac{p}{2},\pm\frac{p}{2})$.

Да покажем как практически се осъществява това продължение. В представянето на D_{n+1} със сигнатура

$$\Lambda = \left(\frac{p}{2},\dots,\frac{p}{2},\varepsilon\frac{p}{2}\right),\quad \varepsilon=\pm\,,\quad \text{имаме}\quad d_{\varepsilon i}^{+}|0\rangle = 0$$

Затова от равенството

$$D_{\eta i}^{+}|0\rangle = (d_i^{+} + \eta\, d_{-i}^{+})|0\rangle$$

намираме

$$D_i^{+}|0\rangle = -\varepsilon D_{-i}^{+}|0\rangle \qquad /12.121/$$

Това ни дава основание да положим

$$D_j^{\xi} = b_j^{\xi},\quad D_{-j}^{+}|0\rangle = -\varepsilon D_j^{+}|0\rangle\,,\quad D_{-j}^{-}|0\rangle = 0 \qquad /12.122/$$

$$j=1,\dots,n,\qquad \xi=\pm,\qquad \varepsilon=\pm.$$

Тези равенства заедно с комутационните съотношения /6.35/ дефинират $D_{-j}^{\pm}$ върху всеки вектор от пространството на представянето и продължават изходното представяне на b-операторите до представяне на D_{n+1} със сигнатура $(\frac{p}{2},\dots,\frac{p}{2},\varepsilon\frac{p}{2})$.

В частност представянето $\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right)$ на n двойки ферми-оператори се продължава до представяне $\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$ по следния начин. Нека $|r\rangle$ $(|H\rangle)$ е произволно състояние с четен /респ. нечетен/ брой фермиони, например $|r\rangle = b_1^+ b_2^+ |0\rangle$. Тогава се оказва, че са изпълнени равенствата $(D_i^\pm \equiv b_i^\pm)$:

$$D_{-i}^-|r\rangle = \varepsilon D_i^-|r\rangle, \qquad D_{-i}^-|H\rangle = -\varepsilon D_i^-|H\rangle,$$
$$D_{-i}^+|r\rangle = -\varepsilon D_i^+|r\rangle, \qquad D_{-i}^+|H\rangle = \varepsilon D_i^+|H\rangle. \qquad /12.123/$$

13. Пространства на Фок при симплектично квантуване

По форма квантуването с въведените в § 7 с-оператори наподобява D-квантуването. По-съществена разлика произтича от обстоятелството, че при $i=j$ комутаторите

$$[C_j^+, C_{-i}^-] \quad \text{и} \quad [C_j^-, C_{-i}^+] \qquad /13.1/$$

не се анулират, а пораждат нови, линейно независими корневи вектори. За да намерим пространствата на Фок, ще започнем изложението с установяване на основните характеристики на C_{n+1}-модулите.

В началото за подреден ортогонален ковариантен базис в Картановата подалгебра $\mathcal{H} \subset C_{n+1}$ приемаме векторите

$$h_0, h_1, \dots, h_n, \qquad h_i = e_{ii} - e_{-i,-i}, \qquad i=0,1,\dots,n, \qquad /13.2/$$

със скаларно произведение /КК-форма/

$$(h_i, h_j) = 4(n+2)\delta_{ij}. \qquad /13.3/$$

От /7.5-6/ и дефиницията на F-базиса /2.41/ палучаваме/

$$f_i = h_i - h_{i+1}, \quad f_n = h_n, \qquad i=0,1,\dots,n-1. \qquad /13.4/$$

Връзката между ортогоналните координати ℓ_i и каноничните координати λ_i на поризволно тегло $\lambda \in \overset{*}{\mathcal{H}}$ се установява от равенството

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overset{*}{f}^i = \sum_{i=0}^{n} \ell_i \overset{*}{h}^i \qquad /13.5/$$

и се дава в явен вид със системата равенства:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n , \\ \ell_1 &= \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n , \\ \ell_2 &= \qquad\qquad \lambda_2 + \dots + \lambda_n , \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \ell_n &= \qquad\qquad\qquad\quad \lambda_n . \end{aligned} \qquad /13.6/$$

Като вземем под внимание обстоятелството, че каноничните координати Λ_i на старшето тегло

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i \overset{*}{f}^i = \sum_{i=0}^{n} L_i \overset{*}{h}^i \qquad /13.7/$$

са цели неотрицателни числа, заключаваме,че

$$L_0 \geqslant L_1 \geqslant \dots \geqslant L_n \geqslant 0 . \qquad /13.8/$$

По такъв начин произволен крайномерен неприводим D_{n+1}-модул се характеризира със съвкупност от $n+1$ цели неотрицателни числа, ортогоналните координати на старшето тегло Λ , за които са изпълнени неравенствата /13.8/. Като се използува формата на Картан-Килинг /13.3/ и дефиниционното равенство /2.28/, лесно се показва, че групата на Вайл на C_{n+1} се свежда към пермутация и смяна на знаците на произволен брой ортогонални координати. Тъй като в даден неприводим C_{n+1}-модул W_Λ тегловните вектори могат да бъдат получени от старшето тегло Λ само с използуване на свойствата на групата на Вайл, заключаваме, че както и при B_{n+1} , векторът

$$\lambda = (l_0, l_1, \ldots, l_n) \equiv \sum_{i=0}^{n} l_i \overset{*}{h}^i$$

може да е тегло, само ако ортогоналните му координати удовлетворяват неравенствата:

$$|l_{i_0}| + |l_{i_1}| + \cdots + |l_{i_m}| \leq L_0 + L_1 + \cdots + L_m \qquad /13.9/$$

при $m = 0,1,2,\ldots,n; \quad i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m = 0,1,2,\ldots,n.$

Тук обаче това е само необходимо условие. Доколкото сумата от координатите на всеки корен е винаги четно число, както и при D_{n+1} се появява още едно ограничение - сумата от ортогоналните координати на произволно тегло $\lambda = (l_0, \ldots, l_n)$ трябва да има същата четност, както сумата от координатите на старшето тегло:

$$l_0 + l_1 + \cdots + l_n = L_0 + L_1 + \cdots + L_n \pmod 2 \qquad /13.10/$$

Векторът $\lambda = (l_0, \ldots, l_n)$ е тегло тогава и само тогава, когато координатите му удовлетворяват релациите /13.9-10/.

В наредбата /13.2/ на базисните вектори в $\mathcal{H}$ корневите вектори

$$\tilde{C}^+_{\xi j} = e_{\xi j, 0} - \xi e_{-0,-\xi j} \longleftrightarrow -h^0 + \xi h^j, \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$\tilde{C}^-_{\xi j} = e_{0,\xi j} - \xi e_{-\xi j,-0} \longleftrightarrow h^0 - \xi h^j, \qquad \xi = \pm \qquad /13.10/$$

са аналог на $\tilde{a}$ -операторите /12.11/. И в този случай /вж.следствие 12.1/ C_{n+1}-модулите W_Λ са пространства на Фок за c-операторите само когато съответствуващите им старши тегла Λ са от вида

$$\Lambda = (L, 0, \ldots, 0) \qquad /13.12/$$

Матричните елементи на c-операторите в представянията /13.12/ могат да се пресметнат явно. По съществена разлика в сравнение с $\tilde{a}$ -операторите произтича от обстоятелството, че положителночестотните

/респ. отрицателночестотните/ оператори тук не образуват комутативна съвкупност от оператори, тъй като

$$[\tilde{C}^{+}_{\xi j}, \tilde{C}^{+}_{-\xi j}] \neq 0$$

Ние няма да се спираме по-подробно на $\tilde{c}$-операторите, макар че те представляват не по-малък интерес от $\tilde{d}$-операторите, и ще преминем към разглеждане на пространствата на Фок на c-операторите /7.7/

За да бъдат c-операторите на раждане и унищожение съответно отрицателни и положителни корневи вектори, редът на базисните вектори в Картановата подалгебра трябва да се положи:

$$h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1} \equiv h_0 . \qquad /13.13/$$

Като се замести нулевият индекс в /7.7/ с $n+1$, за c-операторите и съответствуващите им корени в реализация на низшето матрично редставяне получаваме

$$\begin{aligned}
c^{+}_{j} &= e_{n+1,j} - e_{-j,n+1} &&\longleftrightarrow -h^{j} + h^{n+1}, \\
c^{-}_{j} &= e_{j,n+1} - e_{-n-1,-j} &&\longleftrightarrow h^{j} - h^{n+1}, \\
c^{+}_{-j} &= e_{-n-1,j} + e_{-j,n+1} &&\longleftrightarrow -h^{j} - h^{n+1}, \\
c^{-}_{-j} &= e_{n+1,-j} + e_{j,-n-1} &&\longleftrightarrow h^{j} + h^{n+1}, \\
j &= 1, 2, \ldots, n .
\end{aligned} \qquad /13.14/$$

Тъй като

$$[c^{-}_{i}, c^{+}_{j}] = [c^{-}_{i}, c^{+}_{-j}] = 0 \qquad i \neq j = 1, \ldots, n, \qquad /13.15/$$

ненулевите генератори, дефиниращи пространството на Фок, са:

$$[c^{-}_{i}, c^{+}_{j}] \longleftrightarrow h^{i} - h^{j}, \quad [c^{-}_{k}, c^{+}_{-k}] \longleftrightarrow -2h^{n+1}, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, \ldots, n. \qquad /13.16/$$

Лема 13.1. C_{n+1}-модулът W_Λ със старше тегло

$$\Lambda = (L_1, L_2, \ldots, L_n, L_{n+1})$$

е пространство на Фок за $C^{\xi}_{\eta j}$ -операторите на раждане и унищожение тогава и само тогава, когато за ортогоналните координати на Λ са изпълнени равенствата:

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_n\,, \quad L_{n+1} = 0\,. \qquad /13.17/$$

Доказателство.

Ако за някакви стойности на индексите $1 \leq i_0 < j_0 \leq n$, $L_{i_0} > L_{j_0}$, то координатите на вектора

$$\lambda_1 = \Lambda - h^{i_0} + h^{j_0} = (L_1, \ldots, L_{i_0} - 1, \ldots, L_{j_0} + 1, \ldots, L_n, L_{n+1}) \qquad /13.18/$$

удовлетворяват неравенствата /13.9/ и векторът λ_1 е тегло. Затова

$$[C^-_i, C^+_j]\, x_\Lambda = 0,$$

само ако $L_1 = L_2 = \cdots = L_n$. Аналогично се заключава, че

$$\sum_{i=1}^{n} L_i + |L_{n+1} - 2| > \sum_{i=1}^{n+1} L_i \qquad /13.19/$$

само когато $L_{n+1} = 0$. Ето защо само в този случай $\Lambda - 2h^{n+1}$ не е тегло и следователно

$$C^-_k\, C^+_{-k}\, x_\Lambda = 0\,. \qquad /13.20/$$

Лемата е доказана.

В пространството на Фок W_Λ може да се избере базис от вектори

$$(C^+_1)^{p_1}(C^+_{-1})^{q_1}(C^+_2)^{p_2}(C^+_{-2})^{q_2} \ldots (C^+_n)^{p_n}(C^+_{-n})^{q_n}\, x_\Lambda\,, \qquad /13.21/$$

където $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}_0$, а x_Λ е старшият вектор във W_Λ . За теглото на този вектор намираме

$$(L - p_1 - q_1, L - p_2 - q_2, \ldots, L - p_n - q_n, \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)) \qquad /13.22/$$

Доколкото равенство /13.10/ се удовлетворява за произволни p_i и q_i, $i=1,\dots,n$, от /13.9/ заключаваме, че векторът /13.22/ е тегло тогава и само тагава, когато

$$|p_i+q_i| \leq 2L\,, \quad i=1,\dots,n\,, \tag{13.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |L-p_i-q_i| + \left|\sum_{i=1}^{n} (p_i-q_i)\right| \leq nL\,. \tag{13.24}$$

Неравенството /13.23/ показва, че всяко състояние /13.21/, съдържащо повече от $2L$ "частици" от сорт ξi ; i - фиксирано ; $\xi=\pm$, се анулира. Използувайки неравенството

$$\left|\sum_{i=1}^{n} l_i \pm l_{n+1}\right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |l_i| \tag{13.25}$$

от /13.24/ намираме

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \leq nL\,, \quad \sum_{i=1}^{n} q_i \leq nL \tag{13.26}$$

и затова общият брой на"частиците" от сорт ξi, ξ - фиксирано, $i=1,\dots,n$ не надхвърля nL.

Ние няма да разглеждаме по-подробно C -статистиката в този аспект. Ще добавим само, че пресмятането на матричните елементи тук е значително по-комплицирано от разгледаните досега случаи.

Ще се спрем накратко на квантуване с оператори, пораждащи алгебрата C_{n+1}, при които подходът е подобен на този при унитарно квантуване. За целта полагаме:

$$\begin{aligned}
c_j^+ &= e_{n+1,j} - e_{-j,-n-1} \longleftrightarrow -h^j + h^{n+1}\\
c_j^- &= e_{j,n+1} - e_{-n-1,-j} \longleftrightarrow h^j - h^{n+1} \qquad j=1,\dots,n,\\
c_{n+1}^+ &= e_{-n-1,n+1} \longleftrightarrow -2h^{n+1},\\
c_{n+1}^- &= e_{n+1,-n-1} \longleftrightarrow 2h^{n+1}.
\end{aligned} \tag{13.27}$$

Системата от корени

$$\Phi' = \{ h^1 - h^{n+1}, h^2 - h^{n+1}, \dots, h^n - h^{n+1}, 2h^{n+1} \}$$ /13.28/

е очевидно пълна /определение 3.4/ и затова генераторите /13.27/ пораждат алгебрата C_{n+1}.

За оператор на 4-импулса /при n -крайно/ ще положим

$$P^m = \sum_{i=1}^{n} K_i^m \{ [C_i^+, C_i^-] + e_{-n-1,-n-1} - e_{n+1,n+1} \} .$$ /13.29/

Тук

$$e_{-n-1,-n-1} - e_{n+1,n+1} = h_{n+1}$$

е $(n+1)$-ят базисен елемент /13.13/ от Картановата подалгебра. Използувайки комутационните съотношения /7.12/, намираме

$$[P^m, C_i^{\pm}] = \pm K_i^m C_i^{\pm}, \quad i = 1, \dots, n,$$ /13.30/

$$[P^m, C_{n+1}^{\pm}] = 0$$ /13.31/

По такъв начин операторите $C_1^{\pm}, \dots, C_n^{\pm}$ имат правилни трансформационни свойства при транслации. Същото може да се каже и за $C_{n+1}^{\pm}$, ако се приеме, че това е оператор на раждане /респ. унищожение/ на безмасова частица с импулс 0. Няма да обсъждаме по-подробно тази възможност, тъй като по-нататък ще разгледаме само несобственото спрямо $C_{n+1}^{\pm}$-операторите пространство на Фок. Интересно е да се отбележи, че операторът /13.29/ се получава от стандартния антисиметризиран израз

$$P^m = \sum_{i=1}^{n+1} K_i^m [C_i^+, C_i^-],$$ /13.32/

ако положим

$$K_i^m = \sum_{i=1}^{n} K_i^m .$$ /13.33/

В този случай както от /13.32/, така и от /13.29/ за оператора на

4-импулса, изразен чрез базисните елементи /13.13/ на Картановата подалгебра, получаваме

$$P^m = -\sum_{i=1}^{n} k_i^m h_i . \qquad /13.34/$$

Поради споменатите свойства на операторите $C^{\pm}_{n+1}$ няма да се опитваме да ги интерпретираме като оператори на раждане и унищожние на реални, свободни частици[+] и ще търсим пространства на Фок, в които

$$C^{+}_{n+1}|0\rangle = 0 . \qquad /13.35/$$

Лема 13.2. C_{n+1}-модулът W_Λ е пространство на Фок на операторите $C^{\pm}_1, \ldots, C^{\pm}_{n+1}$, несобствено спрямо C^{+}_{n+1} /вж.10.35/ тогава и само тогава, когато координатите на старшето му тегло $\Lambda=(L_1,\ldots,L_{n+1})$ удовлетворяват условията

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_n , \quad L_{n+1} = 0 . \qquad /13.36/$$

Доказателство.

Освен операторите $C^{\pm}_i$, $i=1,\ldots,n+1$, ненулевите корени са

$$\begin{aligned} [C^-_i, C^+_j] &\longleftrightarrow h^i - h^j, \quad i,j = 1,\ldots,n , \\ [C^-_{n+1}, C^-_j] &\longleftrightarrow h^j + h^{n+1}, \quad j = 1,\ldots,n , \qquad /13.37/ \\ [C^+_{n+1}, C^+_j] &\longleftrightarrow -h^j - h^{n+1}, \quad j = 1,\ldots,n . \end{aligned}$$

Търсят се C_{n+1}-модули, за които векторите

$$\Lambda + h^i - h^j , \quad i \neq j = 1,\ldots,n ,$$

$$\Lambda - 2h^{n+1} ,$$

не са тегла. Тази задача бе вече решена при доказателството на лема 13.1. ▯

[+] Твърдението, че частицата, съответствуваща на оператора C^{+}_i , е реална или свободна тук и по-нататък означава, че $C^{+}_i|0\rangle \neq 0$

Генераторите, неанулиращи вакуума, са

$$C_i^+ \ , \quad [\,C_{n+1}, C_j^+\,], \qquad i,j = 1,\dots,n \,. \qquad /13.38/$$

Затова векторите

$$(C_1^+)^{p_1}[\,C_{n+1}^+, C_1^+\,]^{q_1} \dots (C_n^+)^{p_n}[\,C_{n+1}^+, C_n^+\,]^{q_n}\,|0\rangle \qquad /13.39/$$

са линейно независими и задават базис в пространството на представянето. Тъй като

$$[\,C_{n+1}^+, C_j^+\,] = C_{-j}^+ \,, \qquad [\,C_{n+1}^-, C_j^-\,] = -\,C_{-j}^- \,, \quad j = 1,\dots,n \qquad /13.40/$$

и обратно -

$$C_{n+1}^- = \tfrac{1}{2}[\,C_j^+, C_{-j}^-\,], \qquad C_{n+1}^+ = \tfrac{1}{2}[\,C_{-j}^+, C_j^-\,], \qquad /13.41/$$

заключаваме, че векторът /13.39/ е идентичен с базисния вектор /13.21/ и затова пространствата на Фок на генераторите $C_{\eta j}^{\xi}$, $j = 1,\dots,n$; $\xi,\eta = +,-$ и тези на операторите C_i^{ξ}, $i = 1,\dots,n+1$, са едни и същи. Вторият подход показва обаче, че C_{-j}^+ -операторите могат да се интерпретират като оператори на раждане на "свързано състояние" на C_j^+ с ненаблюдаема в свободно състояние "частица" C_{n+1}^+.

Ако искаме енергията на вакуума да е нула, вместо /13.34/ за оператор на 4-импулса трябва да положим.

$$P^m = -\sum_i K_i^m (h_i - L)\,. \qquad /13.42/$$

Това следва от обстоятелството, че теглото на вакуумът /=старшият вектор/ е

$$|0\rangle \longleftrightarrow (L, L, \dots, L, 0)$$

и затова

$$(h_i - L)|0\rangle = 0$$

За енергията на произволно състояние /13.21/ или /13.39/ от

/13.22/и свойствата на операторите h_i намираме

$$P^0(C_1^+)^{p_1}(C_{-1}^+)^{q_1}\dots(C_n^+)^{p_n}(C_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle =$$

$$= \Big[\sum_i K_i^0(p_i+q_i)\Big](C_1^+)^{p_1}(C_{-1}^+)^{q_1}\dots(C_n^+)^{p_n}(C_{-n}^+)^{q_n}|0\rangle . \qquad /13.43/$$

Естествено получава се, че спектърът на енергията е положително определен.